Suites réelles
(version chantier)

Marc SAGE

15 novembre 2005

Table des matières

Pourquoi des *progressions*, suites et moyennes *arithmétiques*, *géométriques* et *harmoniques* ?

Rappelons que des nombres sont en progression arithmétique si la différence de deux termes consécutifs est constante (comme 8, 12, 16, 20), en progression géométrique si le rapport de deux termes consécutifs est constant (comme 8, 12, 18, 27) et en progression harmonique si les inverses sont en progression arithmétique (comme 3, 4, 6, 12) ; dès lors, une suite est arithmétique, géométrique, harmonique si ses termes sont en progression arithmétique, géométrique, harmonique et c est la moyenne arithmétique, géométrique, harmonique de a et b si les nombres a, c, b sont en progression arithmétique, géométrique, harmonique.

Ces qualificatifs « arithmétique, géométrique, harmonique » sont très anciens : ils sont dus aux pythagoriciens, au sixième siècle avant Jésus-Christ.

L'expression « arithmétique » est probablement due au fait que les entiers naturels 1, 2, 3, 4, (arithmos en grec) forment la plus simple des suites arithmétiques.

L'expression « géométrique » provient plutôt de la moyenne géométrique dont la définition naturelle est de nature géométrique : la moyenne géométrique de a et b, est le côté c du carré qui a même aire que le rectangle de côtés a et b. Et ce nombre s'obtient par une construction à la règle et au compas très simple :

moyenne géométrique

L'expression « harmonique » est probablement à rattacher à la suite des inverses des naturels qui est la plus simple des suites harmoniques. Cette suite (1/n) s'introduit naturellement en musique : si une corde de longueur l vibre à une fréquence f, une corde (de même masse linéique et de même tension) de longueur l/2, l/3, l/4... vibrera aux fréquences 2f, 3f, 4f... qui sont les « harmoniques » de f.

Autre possibilité : la moyenne harmonique de 1 et 2 est 4/3 et la succession 1 ; 4/3 ; 2, envisagée comme une succession de fréquences, correspond aux notes do - sol - do dans la gamme pythagoricienne.

On peut ajouter que si le terme « raison » (du latin ratio, « rapport ») se justifie bien dans le cas des suites géométriques, où il désigne le rapport constant d'un terme au précédent, ce n'est pas le cas – sinon par analogie – pour une suite arithmétique, où il désigne la différence constante entre un terme et le précédent.

Pourquoi une fonction « **homographique** » ?

Je ne dois pas être le seul à avoir longtemps pensé que les fonctions homographiques x |–> (ax + b) / (cx + d) s'appellent ainsi car elles ont toutes des graphiques semblables (une hyperbole d'asymptotes parallèles aux axes). En fait leur nom provient de ce que les transformations du même type de C dans C : x |–> (az + b) / (cz + d) transforment les figures du plan en des figures similaires (elles transforment des cercles ou droites en des cercles ou droites). Le terme est du à Michel Chasles (1793-1880).

critère de Cauchy : Henri Lombardi, *Épistémologie mathématique* (p. 94-95)
en fait critère de BOLZANO Cauchy

bornées $\iff |u_n| < M$: les barrièrenet de$|.|$ controlent
–> sert à généraliser dans C^N.

idem pour mq $u_n \longrightarrow 0$: on presse des barreaux autour de u_n (ie on rend $|u_n|$ aussi petit que possible).

stationnaire => cv, réciproque fausse, mais vraie dans Z.
dem : $\exists N,\ n > N \implies |u_n - l| < \frac{1}{2}$ (bandeau de largeur 1 stricte) ; si pas constant APCR, on écrit $1 \leq |u_{n_1} - u_{n_2}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, absurde.

pour les $\leq$ et $<$, soit on joue les finaud avec $<$, soit on coupe en plus fin avec $\leq$ pour pas prendre de risque.

DAns tous les énoncés de lim, on peut SNG rajouter APCR.

1 Limites

unicité : $\|l - l'\| \leq \|l - a_n\| + \|l' - a_n\|$ qui est aussi petit que voulu, donc que $\|l - l'\|$ si $l \neq l'$.

TRES UTLIE (transitivité $< \longrightarrow 0$ pour les suites positives)
$|a_n| < \varepsilon_n \longrightarrow 0 \implies a_n \longrightarrow 0$

importance de fixer les ε : si on mq $u_n < \varepsilon + \frac{A}{\varepsilon}$ où $A > 0$ réel qcq, on prend A assez petit une fois ε fixé.
Plus généralement, si $u_n < v_n + \varepsilon$ où $\lim v = 0$, on a àpcr $u_n < 2\varepsilon$.
EG : cesàro

rq : $u_n \longrightarrow l \iff (\forall \varepsilon > 0)(\{n,\ u_n \notin l + \varepsilon \mathbb{B}\}\ \text{fini})$
eg : $u_n \longrightarrow \alpha \neq 0 \implies u_n \neq 0$ APCR
FAIRE UN DESSIN !

Dans C^N, dire $a_n \longrightarrow \infty$ si $|a_n| \longrightarrow \infty$.

divergence de 1iere espace ($\longrightarrow \pm\infty$) second espèce sinon.

défintion de limite en $\pm\infty$ pour une suite définie sur une partie infinie de Z

opérations sur les limite : lim est un morphisme d'anneaux de C^N vers C (évidement pas injectif : 0 et $\frac{1}{n}$ ont même limite)

AU passage, pour la preuve de la somme, on voit qu'il faut couper les ε en 2 : mauvais approche, car que dire devant $\varepsilon^5 + 2\varepsilon$? IL faut énoncer : pour mq que $u_n \longrightarrow 0$, il suffit de trouver une application f de limite nulle (mais il faut défini la notion de limite de fonction !) en 0 tq

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ n > N \implies |u_n| \leq |f(\varepsilon)|$$

(la définiton est le cas particulier de $f = \mathrm{Id}$)

Demo : soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_0 f = 0$, il y a un $\delta > 0$ tq $|f(\delta)| < \varepsilon$. Appliquant l'hypothèe sur u à δ, on récupère un N audelà duquel $|u_n| < |f(\delta)|$, d'où $|u_n| < \varepsilon$ audela de ce rang, CQFD.

RQ : pour que la preuve marche, il suffit en fait de supposer $\inf |f| = 0$ autour de 0.
définir lois avec $\pm\infty$, puis énoncés les théorèmes avec "si les quatntité ont un sens..."
$\forall a \in R$, $a \pm \infty = \pm\infty$. On ne définit pas $\infty - \infty$!
$\forall a \in R^*$, $a(\pm\infty) = \pm sgn(a)\infty$. On ne définit pas $0 \times \infty$!
$\forall a \in R$, $\frac{a}{\pm\infty} = 0$. On ne définit pas $\frac{0}{0}$ ni $\frac{\infty}{\infty}$! (en effet, si $r = \frac{\infty}{\infty}$ a un sens, on aurait $r = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty\frac{\infty}{\infty} = \infty r$ et pareil en bas $r = 0r$)

Rq : ce n'est pas parce que $a_n + b_n$ ou $a_n b_n$ cv que a_n et b_n cv chacun !!!!
$0 = n - n \longrightarrow \infty - \infty$
$1 = n\frac{1}{n} \longrightarrow \infty 0$
MORALITE : on ne passe à la limite que lorsque celle-ci a un sens !
Ecrire les négations de $\longrightarrow l$ et $\longrightarrow \infty$ dès le début, et les réutiliser ensuitepour les ss.

Attention à "et on fait tendre ε vers 0" : on utilsie en fait la propriété $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \implies a = 0$.
évoquer généralisation : $\lim_{A \longrightarrow B} C$:

2 Convregence et ordre

cv => bornée
$\longrightarrow \infty \implies$ minorée
$\longrightarrow -\infty \implies$ majorée

lim est croissante, pas strictemnt !!! Mais on a la réciproque
$l < l' \implies a_n < b_n$ APCR

on ne passe à la limite que lorsque celle-ci a un sens !
$-1 \leq \sin n \leq 1$
Dans R, $\sup A = \lim \nearrow a_n$.
une suite d'enteirs > 0 injective tend vers ∞

eg croissante majorée $u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{n}}}$. Croissanceclair, mais par clair que majoré (on passe de n à $n+\sqrt{n+1}$). On pousse plus loin en regardant $\sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{n-1+\sqrt{2n}}}}$. On passe alors de $2n$ à $n+\sqrt{2n+1}$, ce qui descend pour $n \geq 3$.

eg suite adjacentes :
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (pour la croissance, invoquer les arguments de Rémy : $xlog(1+1/x)$ est la moyenne de la fonction inverse sur $[1, 1+1/x]$, c'est donc croissant[1] parce que inverse est décroissante. $xlog(1+1/x)+1/x$ est la moyenne de $2t+1/(1+t)$ sur $[0, 1/x]$, c'est donc décroissant parce que $2t+1/(1+t)$ est croissante) (en profiter pour montrer $n! \overset{?}{>} \left(\frac{n}{e}\right)^n$: la suite des quotients croît, donc minorée par premiers termes ; on en déduirait $\prod_{\substack{i=1,...,p \\ j=1,...,q}} \frac{pj}{qi} \geq 1$ pour $p > q$ [2])
$\sum \frac{1}{k!}$ et $\sum \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!n}$
approximation décimale : $a_n^- = \frac{\lfloor 10^n a \rfloor}{10^n}$ et $a_n^+ = \frac{\lfloor 10^n a+1 \rfloor}{10^n}$ (=> Q dense dans R)

EXO : les suites $\sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}$ et $\sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{n-1+\sqrt{2n}}}}$ sont adjcantes.
Utilise l'inégalité $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leq \frac{a-b}{2}$ pour $1 \leq b \leq a$ d'où $\sqrt{2n}-\sqrt{n} \leq \frac{n}{2}$ et $v_n - u_n \leq \frac{n}{2^n}$

3 Sous-suites

Def ***extraction / extractrice, sous-suite*** ou ***suite extraite***

Si u_n cv , tout ss aussi
<= fausse $(-1)^n$
vrai si suite *monotone*
vrai si nb fini de ss recourvnat n de me^me limite

EXO : *mq la limite est le seul morphisme d'anneaux* $\lambda : \mathbb{R}_{cv}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *invariant par extraction.*
DEM : soit $i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{cv}^{\mathbb{N}} \\ a & \longmapsto & (a) \end{array} \right.$ Alors $\lambda \circ i$ est un endomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ donc vaut l'identité. Par invariance par extraction, on en déduit que $\lambda = \lim$ sur les suites stationnaires. De plus, λ conserve les carrés, donc l'ordre produit ; mieux, si $u_n \leq v_n$ APCR, alors (par extracction) $\varphi(u) \leq \varphi(v)$. Ainsi, si $u \longrightarrow l$, étant donné un $\varepsilon > 0$, on a APCR $i(l-\varepsilon)_n \leq u_n \leq i(l+\varepsilon)_n$, d'où $l-\varepsilon \leq \varphi(u) \leq l+\varepsilon$ et $\varphi = \lim$.

ATTETNTION à l'ordre de l'éextraction–> boîte noire
Eg : une suite extraite de (u_{2n}) n'est pas de la forme $u_{\varphi(2n)}$. En effet, on extrait unquement des termes pairs, et φ étant qcq a peu de chance d'avoir toutes ses images paires
Notation : ***adhérence d'une suite*** $\mathrm{Adh}\, u$: rq footnote pour ne pas confondre avec l'adhérence d'une partie (car on se palce à l'infini)
lemme : $l \in \mathrm{Adh}\, u$ ssi $\forall \varepsilon, \forall N, \exists n > N, |u_n - l| < \varepsilon$
ou encore ssi $\forall \varepsilon, \forall N, \{n,\ |u_n - l| < \varepsilon\}$ est infini
—> TOut exprmier à l'aide des sous-suites
ne pas être bornée
ne pas tendre vers l

[1] Si f croît, pour $a < b < c$, on peut écrire $\mu[a,c]$ comme bary de $\mu[a,b]$ et $\mu[b,c]$. Comme, sur $[b,c]$, on a $f \geq f(b) = \max_{[a,b]} f \geq \mu[a,b]$, le barycentre est minorée par $\mu[a,b]$, *CQFD*.

[2] Bon, il suffit de montrer le résultat pour p = q + 1, ce qui nous ramène à montrer que n / (n!)^(1/n) < (1 + 1/n)^n. Noter que les deux membres de l'inégalités tendent tous deux vers e.

Le truc chiant est la racine n-ième sur la factorielle. On la fait sauter en invoquant l'inégalité n! > (n/e)^n (intuitée par Stirling) : la suite formée par les quotients est en effet monotone (utiliser la croissance de (1 + 1/n)^n vers e), donc est min/majorée par le terme d'indice 0 qui vaut 1.

Problème : on est alors amenée à vouloir e < (1 + 1/n)^n, ce qui n'est pas. J'affine donc l'inégalité précédente en min/majorant par le terme d'indice 1 qui vaut e.

On veut alors e < e^(-1/n) (1 + 1/n)^n, ce qui devient vrai : la fonction de droite *décroît* vers e grâce au facteur e^(-1/n) introduit.

ne pas tendre vers l'infini
(utilsier le vocab "***être loin de***")

Si non stationnaire, on peut toujours supposer inj quitte à extraire

BW : troi démo ($a_n \in S$ segment)
1 en posant $\underline{\lim}$ ou $\overline{\lim}$
2 dichotomi (poser pour tout segment $S = [a, b]$, en notant le milieu $m = \frac{a+b}{2}$, les segments $S^- = [a, m]$ et $S^+ = [m, b]$. On définir alors suite S_n par $S_0 := S$ et pour tout $n \geq 0$ on pose $S_{n+1} = S_n^+$ si $a^{-1}(S_n^+)$ infini, S_n^- sinon. ALors $l(S_{n+1}) = \frac{1}{2} l(S_n)$, donc $l(S_n) = \frac{l(S)}{2^n} \longrightarrow 0$, d'où $\bigcap S_n = \{l\}$. Montrons maintenatn que $a^{-1}(S_n)$ infini par récurrence sur n. Clair pour $n = 0$ car $a^{-1}(S) = \mathbb{N}$. Ensuite, fixant $n \geq 0$, est infini l'ensemble $a^{-1}(S_n) = a^{-1}(S_n^-) \cup a^{-1}(S_n^+)$, donc ou bien $a^{-1}(S_n^+)$ infini et $S_{n+1} = S_n^+$ CQFD, ou bien ($S_{n+1} = S_n^-$ et $a^{-1}(S_n^-)$ infini, CQFD)
3 lemme on extracit ss monotone (cas limite du cas fini par tiroirs ? ? ?) (un prend un terme, et on cherche des termes plus grands à chaque fois, pour que ça marche bien on considère l'ensemble des $\{n\ ;\ \forall p > n,\ u_p > u_n\}$, soit il est infini ($u_p > u_q > u_r > ...$), soit il est fini (on considère le max et on extrait sous-suite décroissante), et c'est fini.)
BW généralisé : tout suite a une valeur d'adhérence dans $\overline{R}$ (si pas hypohtèse, ie si suite pas bornée, on extrait ->$\pm\infty$)
EXO : Si $u_n - v_n$ et $u_n^3 + v_n^3 \longrightarrow 0$ alors u_n et $v_n \longrightarrow 0$ (soit $l \in Adh(u)$: si $l = \infty$, $v_n \longrightarrow -\infty$, contredisant autr hypithèse)
COR : une suite a une limite (das $\overline{R}$) ssi son adh est réduit à un singleton : $a_n \longrightarrow l$ ssi $Adh(a) = \{l\}$

cor : BW dans C : on extrait deux fois.

montrer bW => **borel lebesgue** : si tout sous recouvrment fini ne recouvre pas tout, il y a une suite $x_n \longrightarrow a$ par extraction. Mais a est dans un U_i, donc tous ses termes aussi APCR, contradiction.

exo : (r_n) cv non stationaire => dénomin -> infini.

parler des lim inf et sup : cf feuille exos suites

EXO : a_n et b_n pas bornééе, mq que $\forall A > 0$ il y a p, q tq $|a_p - a_q|, |b_p - b_q| > A$.
DEM : on extrait ss $\longrightarrow \infty$, deux fois pour avoir une même extractrice. Alors $|a'_n - a'_0|, |b'_n - b'_0| > A$ pour $n >> 1$.

EXO : si $a_{2n} \longrightarrow l$, $a_{2n+1} \longrightarrow l'$, a_{3n} cv, alors $l = \lim a_{6n} = \lim a_{3n} = a_{6n+3} = l'$.

EXO : a_n bornée, $b := a'$ et $c := b' = a''$. Sic cv, mq c et b cv vers 0
DEM : si $c \longrightarrow l > 0$, b sera au dessus d'une droite de pente l àpcr, donc diverge, absurde car $|b| < 2\|a\|$.
Si b ne tend pas vers 0, on peut extrire tq $|b| > \varepsilon_0$. Puisque $b' \longrightarrow 0$, on tombe d'un côté ou de l'autre de $\pm\varepsilon_0$, metttons $b' > \varepsilon_0$, d'om b audesuse droite de pente ε_0, abs

(rq : exo continu : si f bornée et f'' cv, alors f' et f'' converge vers 0)

4 Lim sup/inf et adhérence

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
la limite supérieure est le max de $Adh(u)$, donc la plus grande "limite extraite"
de même la lim inf comme min de $Adh(u)$, ou comm $\underline{\lim} u = -\overline{\lim}(-u)$
Rq : $\forall a > \overline{\lim}$, il n'y a qu'nu nombre fini de termes $\geq a$. (sinon on a une valadh $\geq a > \overline{\lim}$)

PROP

$$\begin{aligned} \limsup(u_n) &:= \lim_{n\infty} \sup_{k \geq n} u_k \\ \liminf(u_n) &:= \lim_{n\infty} \inf_{k \geq n} u_k. \end{aligned}$$

On notera de façon plus concise $\begin{cases} \overline{\lim} u \text{ pour } \limsup (u_n) \\ \underline{\lim} u \text{ pour } \liminf (u_n) \end{cases}$. On notera également $\operatorname{Adh} u$ pour l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n).

• La suite $\left(\sup_{k\geq n} u_k\right)$ étant décroissante (on prend un sup sur des ensembles de plus en plus petits), elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers son infimum s, et de même $(\inf_{k\geq n} u_k)$ converge en croissant vers son supremum.

Pour $a > \overline{\lim} u$, tous les u_k sont $\leq a$ APCR, donc les s_k aussi, donc s aussi. Ceci tenant pour tout $a > \overline{\lim} u$, on en déduit $s \leq \overline{\lim} u$.

Or, $\overline{\lim} u$ est la limité d'un $u_{\varphi(n)}$, donc $s_{\varphi(n)} \geq u_{\varphi(n)}$ d'où $s \geq \overline{\lim}$.

On obtiendrait les mêmes résultats sur la limite inférieure en appliquant ce qui précède à $(v_n) := -(u_n)$.

PROP

1. $\overline{\lim}(a+b) \leq \overline{\lim} a + \overline{\lim} b$ idem pour $\underline{\lim}$, avec $=$ si l'une des suites converge
2. $\overline{\lim} ab \leq \overline{\lim} a \overline{\lim} b$ si $a, b \geq 0$ (avec $=$ si l'une des suites converge)
3. $f\left(\overline{\lim} u_n\right) \leq \overline{\lim} f(u_n)$ avec $=$ si f coissante
4. $(\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$, puis passage à la limite) (mais $b = -a$ donne $0 \leq \overline{\lim} a - \underline{\lim} a$ qui est non nul ssi a ne tend pas vers 0,
5. $\sup(AB) \leq \sup A \sup B$ (mais $b = \frac{1}{a}$ donne $1 \leq \frac{\overline{\lim} a}{\underline{\lim} a}$)
6. si $l = \lim u_{\varphi(n)}$, alors $f(l) \in \operatorname{Adh} f(u_n) \leq \overline{\lim} f(u_n) := l'$.
   Suppos f croiss et $f(l) < l'$. Pour y entre les deux, il y a un $f(u_N) > y$, donc $> f(l)$. Le TVI dit que que $y = f(x)$. Puisque f croit, $x > l$. De plus, l' est un $\lim f\left(u_{\varphi(n)}\right)$, donc APCR $f(u_n) > y = f(x)$, ie $u_n \geq x$, d'où $l \geq x$, abs.
   Si $f$décroit, on aura $f \circ \overline{\lim} = \underline{\lim} \circ f$, donc pas égalité en généal.

APP Soit f continue croissante de R^+ dans R^+ telle que $f(x) - x$ est du signe de $x - a$ pour un ecertain $a > 0$. Posons $x_{n+2} = \frac{f(x_{n+1}) + f(x_n)}{2}$. Alors $\min\{x_0, x_1, a\} \leq x_n \leq \max\{x_0, x_1, a\}$. Puis $\overline{\lim} x_n \leq f\left(\overline{\lim} x_n\right)$, donc $\overline{\lim} x_n \geq a$, et de même pour $\underline{\lim} x_n$, d'où la convergence de $x_n$versa.

5 suites de Cauchy-Bolzano

Une voiture au réservoir dont le contenu tend vers 0 va s'arrter "à l'infini".

suites de Cauchy : dans $\mathbb{Q}$ pas cv ! Les utiliser pour nier convergence : $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$

si de cauchy et $adh \neq \emptyset$, cv vers cette adh.

Prop : $|a_q - a_p| \leq |b_q - b_p|$ et b de cauchy => a de cauchy.
Eg : $|a_q - a_p| \leq \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^q}$.

complétude de R : poser $i_n = \inf_{k\geq n} a_k$ et $s_n = \sup_{k\geq n} a_k$, on a $i \leq a \leq s$, puis mq i et s sont adjacentes.

Cela utilise les suites adjacentes, donc la prop de la borne sup, donc a remettre dans equival complet<=>borne sup

6 Exemples usueles

suites de références :
$\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$ où $a > 0$ (même limite si $\inf a_n > 0$)
$n^\alpha \longrightarrow 0, 1, \infty$ selon signe α
$\frac{z^n}{n!} \longrightarrow 0$ (prendre $n > 2|z|$
fractions rationnelles

stuss variation de la constante : $u_{n+1} = 3nu_n \implies \frac{u_{n+1}}{n!} = 3\frac{u_n}{(n-1)!}$, idem pour géom, arhi, etc...
EG (dérangment) : $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$
EG : $u_{n+1} + a_n u_n = b_n$.
EG (appraielement de $2n$-gone de genre g) : $\varepsilon_g(n+1) = \frac{4n+2}{n+2}\varepsilon_g(n) + \frac{(2n+1)n(2n-1)}{n+2}\varepsilon_{g-1}(n-1)$
hint : poser $C_g(n) := \frac{2^g \varepsilon_g(n)}{\mathrm{Cat}_n}$ où $\mathrm{Cat}_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, il vient

$$C_g(n+1) = C_g(n) + \binom{n+1}{2} C_g(n-1)$$

Idée de la moyenne : lisser imperfections (citer équivalence avec il ya un sous-suite de mesure 1)
Application Cesàro $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l \implies \sqrt{u_n} \longrightarrow l$.
Gen : théorème de Stolz-Cesàro : pour (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que b strictement croissante et non majorée, alors l'existence de la limite $\lim \frac{\delta a}{\delta b}$ implique celle de $\lim \frac{a}{b}$ (et on égalité)
Généralisation cesàro à $\sum \lambda_n = \infty \implies \frac{\sum \lambda_n a_n}{\sum \lambda_n} \longrightarrow \lim a$; même pour indice double sous bonne conditions (ceg à ces conditions ?)

exo : si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l$, alors (INTUITION $u_n \simeq l^n$) $u_n \longrightarrow 0$ ou ∞ selon signe $\lambda - 1$ (indéterminantion pour $\lambda = 1$: prendre $u_n = \frac{1}{n}$ ou n)

7 Séries

ou pas dans les suites : on pourrait parler d'écriture de réels en base truc muche

Pour $E =$ les suites réelles convergentes, on considère $Tu_n = u_{n+1} - u_n$.
Le noyau de T^2 est l'ensemble des u vériifant $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$: on trouve les constantes –> pourquoi pas de dim 2 ? ? ?

Un peu de convolution : montrer que $\frac{u*v}{n} \longrightarrow \lim u \lim v$

8 Sytèmes dynamiques

SAns ev, on montre qu'une suite récurrente linéaire coincide avec ce qu'on veut.
Si $\lambda \neq \mu$, le système $\begin{matrix} A + B = u_0 \\ \lambda A + \mu B = u_1 \end{matrix}$ a une solution (A, B), donc u_n coïncide avec $A\lambda^n + B\mu^n$.
Si $\lambda = \mu \neq 0$, le système $\begin{matrix} A = u_0 \\ \lambda A + \lambda B = u_1 \end{matrix}$ a une solution (A, B), donc u_n coïncide avec $A\lambda^n + Bn\mu^n$.
(si $\lambda = \mu = 0$, la relatin de récurrence devient $u_{n+2} = 0$, donc rien à faire)

Point fixe attractif.
si $|f'(a)| < 1$, alors f stabilise un voisinage de a où toute suite $a_{n+1} = f(a_n)$ cv vers a
si $|f'(a)| > 1$, la seul convergence possible est stationnaire.

EXO page 58 Gourdon

EXO : soit $f : S \longrightarrow S$ continue et $s_n := f^{\circ n}(s)$ avec $s \in S$. On suppose que s_n possède une valeur d'adhérence a isolée des autres (et fixe par f). Mq $s_n \longrightarrow a$.

Dem s_n étant bornée, il suffit de montrer que a est la seule valeur d'ahrédence. Soit b une autre. IL y a une boule autour de a (de rayon ε) ne contenant aucune valeur d'adhérence. Puisque a est vadh, l'ensemble A des n tq $|s_n - a| < \varepsilon$ et $|s_n - b| > \varepsilon$ est inifni. Puisque b est vadh, idem Ben échangena a et b. On regarde alors les entier n de A tq $n+1 \in B$. Il est infini car B infini. Soit un tel n : on a $\varepsilon > |s_{n+1} - b| = |f(s_n) - b| \longrightarrow |f(a) - b| = |a - b|$ absrude. ? ? ? ? ?

EXO *Soit a valeur d'adhéucen isolée pour un système dynamique* a_n *continu* f *et fixé par* f. *Mq* $a_n \longrightarrow a$.

Par l'absurde. Soit B voisinga de a sans autre valeur d'adhérence. PUisque a_n ne tend pas vers a, on peut extraire un sous $a_{\varphi(n)}$ suite hors de V (sinon tous les a_n sont APCR dans V or une suite dans un compact ayant une seul valeur d'adhérence converge vers cete denrière) avec les $\varphi(n)$ succcessivement minimaux. Alors la suite $a_{\varphi(n)-1}$ cv vers a (même argt), donc son image $a_{\varphi(n)}$ cv vers $f(a) = a$, ce qui n'es pas.

e et π par système dyna ordre.

Def a_n par $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n}$. Mq $a_n \sim \frac{n}{e}$

Def b_n par $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b_{n+2} = \frac{b_{n+1}}{n} + b_n$. Mq $b_n \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$

DEM (premier termes : $\begin{matrix} 0, 1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{17}{6} \\ 0, 1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{15}{8} \end{matrix}$)

def $\alpha_n := \frac{a_n}{n}$ et mq $\alpha_n \longrightarrow e^{-1} = \lim \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Or la suite $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ vérifie mêmes relation récurrence et CI que $\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\alpha_{n-1} + \frac{1}{n}\alpha_{n-2}$, CQFD.

def $c_n := \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$ et $\gamma_n := c_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}$. Alors même rel réc & CI