Nombres complexes
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

Il semble que ce soit William Oughtred (1574-1660) qui ait le premier utilisé la notation π, comme les signes $\pm$ et $\times$. Il a aussi construit une des premières échelles logarithmiques, ouvrant ainsi la voie à la règle à calcul. La lettre π est devenue une notation standard après les travaux d'Euler en 1737.

On lui a attribué l'invention de la notation $\times$ pour la multiplication, et concomitamment avec Albert Girard les abréviations des lignes trie ^{X^3+pX+q=0} en ^{4Y^3-Y+\sin(3a)=0}, dont les solutions sont données par la trisection d'un angle. Il montre comment on peut représenter ces solutions comme trois cordes inscrites dans le cercle et enseigne à les construire géométriquemennométriques ainsi que l'invention des échelles logarithmiques, dont le mérite semble revenir tout entier à Edmund Gunter.

Oughtred avait lu Viète1, et c'est un des premiers mathématiciens, avec Johannes Geysius à noter avec un exposant les puissances de l'inconnu.

Rigolo : $\sqrt{b+2c} = \sqrt{b' + \sqrt{b'^2 - c^2}} + \sqrt{b' - \sqrt{b'^2 - c^2}}$
EG : $\sqrt{6} = \sqrt{1 + i\sqrt{3}} + \sqrt{1 - i\sqrt{3}}$
Racine de $X^3 - 3pX - 2q$ est $\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$
Rigolo : 4 racine de $X^3 - 15X - 4$ tout comme $\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$

C est un plan ! -> Toute l'intuition de la géométrie plane.

introduire avec les matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Exo : trouver des lois à mettre sur R^2 pour que $C \simeq R^2$

$|ab|^2 = ab\overline{ab} = |a|^2 |b|^2$, d'où identité Lagrange (Diophante ?).
Quid des quaternions ? $\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)\left(|\gamma|^2 + |\delta|^2\right) = \left|\alpha\gamma - \beta\overline{\delta}\right|^2 + |\alpha\delta + \beta\overline{\gamma}|^2$.
(identité de Brahmagupta)

méthode de la quantités conjugés : écrire $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
cercle unté : $\mathcal{U}, \mathcal{U}_1, \mathbb{U}, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}_1$
Sousgroup finis de U : soit g son card. Lagrange => G$\subset U_d$, puis égalité des cardinaux.

Auto du corps $\mathbb{C}$ qui préserve $\mathbb{R}$: Id ou conjugaison.
mais AC => il y ades auto ne préservant par $\mathbb{R}$. (cf base de transcendance)

1 Trigo

On peut définir un logatimhe qui suit continumenet un complexe : Relevement : si $\gamma : [0, L]$ pas surjection, mettons évite -1, on relève par $\mathrm{Arg} = 2\,\mathrm{atn}\,\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re} + |\cdot|}$. Ensuit, uniformeC0 => on découpe sur segment où γ pas surj, et on recolle avec $2\pi Z$.

1.1 exponentielle complexe

intutoin du triangle rectangle primordiale, cercle du cercle aussi
def e^z par une limite
On démontre $e^a e^b = e^{a+b}$: $|S_N(a+b) - S_N(a)\,S_N(b)| \leq S_{2N}(|a| + |b|) - S_N(|a| + |b|) \longrightarrow 0$.
$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, d'où $\left|e^{i\theta}\right| = 1$: en effet, dessiner les premier termes de $e^{i\theta}$: escargot à quatre côtés
définir cos et sin via Euler, et retrouver les cos et sin réels sur le cercle unité via $\cos^2 + \sin^2 = 1$.
Pour θ réel, Euler montre que $\cos = \mathrm{Re}\, e$ et $\sin = \mathrm{Im}$, d'où $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

POurquoi θ représente notre intuittion d'un angle ? On peut calculer la longueur du cercle unité $y = \sqrt{1-x^2}$ entre 1 et $\cos\theta$ (pour $0 \leq \theta \leq \pi$) : on trouve $\int \sqrt{1+f'^2} = \int \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{acs} x$, d'où θ !

rq : pourquoi tan ? parce que tangente à 1. pourquoi sécant ? parce que ca coupe $y = 1$. C'est complètement débile car interchangeable.

Rq : $\sin z$ vaut $\frac{1}{2i}$ la limite du polynome $\left(1+\frac{iz}{n}\right)^n - \left(1-\frac{iz}{n}\right)^n$ dont le racines sont les λ tq $\frac{1+i\frac{\lambda}{n}}{1-i\frac{\lambda}{n}}$ est un raacine $u = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ de U_n, ie $\frac{i\lambda}{n} = \frac{1-u}{1+u} = i\frac{\frac{1-u}{2i}}{\frac{1+u}{2}}$ et $\lambda = n\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Donc le polynome $\left(1+\frac{iz}{n}\right)^n - \left(1-\frac{iz}{n}\right)^n$ vaut $C\prod_{k=1}^n \left(z - \tan\left(k\frac{\pi}{n}\right)\right)$. (gaffe à n pari ou pas...), d'où le produit Eulérien.

1.2 forme polaire

un argument est un θ tq $z = |z|\, e^{i\theta}$

tout complexe a un argument

tout réel est argument de 0 (certain disent que 0 n'a pas d'argument, ce qui est vrai modulo 2π, mais ce qui peut amener à distinguer des cas inutilement).

les arguments d'un complexe $\neq 0$ donné sont tous égaux modulo $2\pi\mathbb{Z}$.

ATTENTION : ne vérifie pas $\operatorname{Arg}(ab) = \operatorname{Arg} a + \operatorname{Arg} b$ à cause des arguments qui pouraieet sortir de $[-\pi, \pi]$ par addition : on a quand même égalité modulo $2\pi\mathbb{Z}$.

Dessin -> $\tan\theta = \frac{b}{a}$ (clair par calcul), d'où (si $a > 0$ pour avoir $|\theta| < \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} a+ib &= \sqrt{a^2+b^2}e^{i \operatorname{atn} \frac{b}{a}} \\ \operatorname{Arg} &= \operatorname{atn}\frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}} \end{aligned}$$

Application : calculer $\operatorname{atn} 2 + \operatorname{atn} 5 + \operatorname{atn} 8 =$

formule Machin

EG : $\sum$alterné binoaux impairs ? $\operatorname{Re}(1+i)^n =$...

1.3 arc moitité

Introduire $1 + e^{ix}$ –> un desisn montre que argument est divié par deux, donc on factorise par $e^{i\frac{x}{2}}$, ce qui donne

$= 2\cos\frac{x}{2}e^{i\frac{x}{2}}$

De même, on aurait $1 - e^{ix} = 2i\sin\frac{x}{2}e^{i\frac{x}{2}}$

(rq : on peut aussi utiliser ses formules de dupliation de cos et sin, mais c'est tellement moche de repasser en Re et Im)

Idée : lorsque deux arcs ne sont pas symétriques, on mets la moyenne à 0 : 0etθ –> $\frac{\theta}{2}$, mais aussi 3θ et 5θ -> $-\theta, \theta$

On peut ainsi simplifier $\sum_0^n e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}e^{i\frac{n}{2}x}$.

En prenant les parties réelles et imaginaires, on obtiendrait $\sum_0^n \cos kx$ et $\sum_0^n \sin kx$.

EXO : calculer $\prod_0^n \cos kx$ et $\prod_0^n \sin kx$

EXO : calculer $\prod_0^n \cos\frac{x}{2^k}$ et $\prod_0^n \sin x$

(multiplier par $\sin\frac{x}{2^n}$: donne $\cos x \sin x \mapsto \sin 2x$, d'où par récurrence sin

Plus généralement, que peut-on dire sur l'angle moitié ? Faire un dessin :-) et mettre dans intro.

Soit O le cercle du cercle unité, $A = -1$, $B = 1$, $M = e^{i\theta}$, $H = \cos\theta$ avec $0 < \theta < \pi$ La droite (AM) recoupe la droite $\mathbb{R}i$ en T.

Nous avons $\frac{\theta}{2} = \widehat{OAT}$, d'où $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{OT}{AO} = OT$; notons ce dernier t. Pythagore dans OAT donne $AT = \sqrt{1+t^2}$

Le cosinus de $\frac{\theta}{2}$ se lit dans trois triangles rectangles :

$$\frac{AH}{AM}=\frac{AM}{AB}=\cos\frac{\theta}{2}=\frac{AO}{AT}.$$

On en déduit $AH=AM\cos\frac{\theta}{2}=AB\cos^2\frac{\theta}{2}=2\left(\frac{AO}{AT}\right)^2=\frac{2}{1+t^2}$, d'où

$$\begin{aligned}\cos\theta &= AH-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \text{et }\sin\theta &= HM=AH\tan\frac{\theta}{2}=\frac{2t}{1+t^2}.\end{aligned}$$

En termes pédants, ce que t'a expliqué David c'est le paramétrage rationnel du cercle par la droite verticale en question : t est le birapport entre le point M et les points 0, $\frac{\pi}{2}$, et π.

SEconde méthode : les triangles ATB et AMO sont isocèles et de même angles θ à la base, donc semblable selon un rapport $r:=\frac{AO}{AT}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

On en déduit

$$\begin{aligned}\sin\theta &= 2\mathcal{A}(AOM)=2r^2\mathcal{A}(ATB)=\frac{1}{1+t^2}\left(\frac{1}{2}t\cdot 2\right)=\frac{2t}{1+t^2}\text{ et}\\ \cos\theta &= \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{AT}\cdot r\overrightarrow{TB}=\frac{1}{1+t^2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{TB}}_{=1}-\underbrace{\overrightarrow{TO}\cdot\overrightarrow{TB}}_{=t^2}\right)=\frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Enchainer sur $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ géom et calcul par arc moitié, d'où l'argument principlal sur $C\backslash R^-$: pour $|\theta|<\pi$, on a

$$\operatorname{atn}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\operatorname{Arg}\left((1+\cos\theta)+i\sin\theta\right)=\operatorname{Arg}\left(1+e^{i\theta}\right)=\operatorname{Arg}\left(\underbrace{2\cos\frac{\theta}{2}}_{>0}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{\theta}{2}$$

Blabla pour limite vers R^- : On peut s'intéresser à ce qui se passe lorsque z tend à s'approcher de $\mathbb{R}^-$. Le point 0 n'ayant pas d'argument, il n'y a rien à espérer ; de fait, il suffit de prendre la limite (en 0) selon n'importe quelle demi-droite autre que $\mathbb{R}^-$ pour obtenir tous les arguments possible de $]-\pi,\pi[$. On regarde donc la limité en un point $z_0<0$.

Au voisinage d'un tel point, la partie réelle est elle aussi <0, mettons $\mathrm{Re}=-\alpha$ avec $\alpha>0$. En posant posant $c=\frac{b}{\alpha}$, notre formule devient

$$\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}+|\cdot|}=\frac{b}{\sqrt{\alpha^2+b^2}-\alpha}=\frac{c}{\sqrt{1+c^2}-1}=\frac{c\left(\sqrt{1+c^2}+1\right)}{(1+c^2)-1}=\frac{\sqrt{1+c^2}+1}{c}.$$

Or, lorsque $z\longrightarrow z_0$, notre paramètre c tend vers $\frac{\mathrm{Im}\,z_0}{\mathrm{Re}\,z_0}=0$, ce qui montre que la quantité ci-dessus diverge vers $\pm\infty$, donc son arc-tangente tend vers $\pm\frac{\pi}{2}$, dont le double a pour limite $\pm\pi$ (qui est bien définie modulo 2π).

Plus précisément, si l'on tend selon les $\mathrm{Im}>0$, c tendra vers 0^+, donc l'argument trouvé tendra vers π, qui est bien l'argument principal d'un réel <0. Si en revanche l'on tend selon les $\mathrm{Im}<0$, on trouvera un argument $-\pi$. Se pose alors le problème de la défintion d'un argument principal qui soit continu sur tout C^*. En effet, si l'on tend vers R^- selon les $\mathrm{Im}>0$, en faisant le tour dans l'autre sens pour tendre selon les $\mathrm{Im}<0$, on trouve une limite différant de 2π.

1.4 Logarihme complexe

un logatihme de z est un l tq $e^l=z$

0 n'a pas de logarithme

les logatihmes de $re^{i\theta}$ sont tous égaux à $\ln r+i\theta$, modulo $2\pi i\mathbb{Z}$.

Le *log principal* est défini par

$$\operatorname{Ln}z=\ln|z|+i\operatorname{Arg}z$$

Il ets donc intimeent lié à l'agrument par la formule

$$\mathrm{Arg} = \mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}\,.$$

ATTENTION : ne vérifie pas $\mathrm{Ln}\,(ab) = \mathrm{Ln}\,a + \mathrm{Ln}\,b$ à cause des arguments qui pouraieet sortir de $[-\pi, \pi]$ par addition (on retire donc au log son principal intéret) mais ok mod $2\pi i$.

Clairement, Ln est continue sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$. On verra que Ln y est dérivable de dérivée $\frac{1}{\mathrm{Id}}$.

1.5 trigo circulaire

pour retenir les graphes :
http ://sawb.soup.io/post/121980402/Beautiful-Dance-Moves PB SIN ! ! ! !
pour les formules qui caractérisent : cf exo DM continuité

pour $\cos(a-b) =$... interprétaer en terme de produit scalaire.

Formules de duplication de l'angle :

Soit AB un diamètre du cercle unité de centre O, $M = e^{i2\theta}$, H le projeté orthgonal. On trace AM pour faire apparaître θ (qui se trouve être tq $|\theta| < \frac{\pi}{2}$).

Montrons que $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$. Pour faire apparaître $\cos^2\theta$, on projette B en M puis M en H, de sorte que $AH = AM\cos\theta = AB\cos^2\theta = 2\cos^2\theta$. Comme par ailleurs $AH = AO + OH = 1 + \cos\theta$, c'est gagné.

Pour le sinus ($\theta > 0$), on projette B en M, puis A en H, d'où $MH = AM\sin\theta = AB\cos\theta\sin\theta = 2\cos\theta\sin\theta$.

RQ : formule de duplication caractérise cos ? (cf eq fonction dans cours CO)

PLus géométrique : on projette O en N sur AM.

Alors $\cos\theta$ et $\sin\theta$ se lisent en AN et ON : leur produit donne deux fois l'aire de ANO, i. e. celle de AOM, de base $AO = 1$ et de hauter $HM = \sin 2\theta$, CQFD.

pour le cos, on projette N en I sur AB, d'où $AI = \cos^2\theta$. Comme IN parallèle à HM et N milieu de AM, I milieu de AH, d'où $\cos^2\theta = \frac{1+\cos\theta}{2}$.

TOUTES les formules !

Ppour les $\sum$ de cos / sin, passer à l'expoenetielle et utiliser l'arc moitité : EG

$$\cos p + \cos q = \mathrm{Re}\left(e^{ipx} + e^{iqx}\right) = \mathrm{Re}\, e^{i\frac{p+q}{2}x}\left(e^{i\frac{p-q}{2}x} + e^{-i\frac{p-q}{2}x}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{p+q}{2}x} 2\cos\frac{p-q}{2}x\right).$$

pour les $\cos(x \pm \pi/2)$, faire un cercle avec θ petit ($< 30°$)

$\tan\left(\sum a_i\right) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_5 - \ldots}{\sigma_0 - \sigma_2 + \sigma_4 - \ldots}$
APP : $\tan^{-1}(\mathbb{Q})$ sg additif de $\mathbb{R}$. DE même en remplaçant $\mathbb{Q}$ par sous-corps de $\mathbb{R}$.
Applicatio : $\mathrm{ath}\left(\frac{3x-x^3}{1+3x^2}\right) = 3\,\mathrm{ath}\, x$
Appl : $\tan nx = \frac{\binom{n}{1}\tan x - \binom{n}{3}\tan^3 x + \cdots}{1 - \binom{n}{2}\tan^2 x + \binom{n}{4}\tan^4 x - \cdots}$

Méthode de génération : recvenir à la définiton d'Euler.
App : $\sum_0^n \cos px$?
$\cos nx$? =Re e^{inx} –> le faire en ch avec parties pairtes et impaires de exp.
$\cos^n x$? developper Euler
fonction trigo réciproque, graphe, dérivée,
caclul de cos asn par dessin (9 cas théorique)

Pour les fonction réciproque : pour avoir $\mathrm{atn}\tan a = a$, il est néssaire que $a = \mathrm{atn}\tan a \in \mathrm{Im}\,\mathrm{atn}$! ! ! et d'aillerus suffisant. de même pour acs cos et asn sin.

le a devaant cos sin tan est prononcé "arc" ou "arg"

Un dessin montre que

$$\begin{aligned} i \operatorname{acs} c &= \operatorname{Ln}\left(c+\sqrt{1-c^2}i\right) \\ i \operatorname{asn} s &= \operatorname{Ln}\left(\sqrt{1-s^2}+si\right) \\ i \operatorname{atn} t &= \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+ti}{1-ti} \end{aligned}$$

Rq : on retrouve les formule de l'arc moitié dans $\frac{1-t^2+2ti}{1+t^2} = \cos(2t) + i\sin(2t) = e^{i2t}$.

Formules de division :

$$\begin{aligned} \cos\frac{\cdot}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos}{2}} \\ \sin\frac{\cdot}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos}{2}} \end{aligned}$$

(vérifier que $\sin^2 + \cos^2 = 1$)

$$\tan\frac{\cdot}{2} = \frac{\sqrt{\tan^2 + 1} - 1}{\tan} = \frac{\sin}{1+\cos} = \frac{1-\cos}{\sin}$$

Comparaison "de Jordan" : cercle unité, cercle de diam $\left[e^{i\theta}e^{-i\theta}\right]$. Alors cordes $e^{i\theta}e^{-i\theta}$ ont pour lgrs 2θ (cercle unité) et $\pi\sin\theta$ (cercle de raon $\sin\theta$), d'où $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin\theta$ (graphe de sin concave au dessu de sa corde entre 0 et $\frac{\pi}{2}$)

1.5.1 Histoire du mot *sinus* selon Stella Baruk

« Hipparque de Nicée [...] aurait écrit un traité de douze livres sur le calcul des cordes dans un cercle, et avait en tout cas laissé à ses successeurs une *table des cordes* [...] annonçant les tables de sinus. Ceux continuèrent de s'annoncer avec Ptolémée – l'Euclide de l'astronomie – et son *Almageste* [...] où les calculs sont établis pour des cordes et expliquée la méthode permettant d'y parvenir. Cette correspondance *corde-angle au centre* devint l'outil indispensable des astronomes. Même en changeant de ciel. Les Hindous, quatre siècles environ après J.-C., reprennent [...] des contenus d'origine grecque, mas remplacent la correspondance corde-angle au centre par une relation fonctionnelle entre la demi-corde et le demi-angle au centre. Ca se précisait. Puis vinrent le arabes... Un astronme musulman du nom d'Al Battani (vers 850-929) [...] fait paraître *De la science des astres*, qui pourrait être considéré comme l'acte de naissance explicite de la trigonométrie ; car y figurent des tables, bien sûr, mais à défaut d'en inventer complètement l'objet, Al Battani le *nomma* : « djayb », ce qui veut dire, en arabe, ouverture d'un vêtement, fente, pli, cavité.

Elle était donc là, la métaphore perdue. C'était donc ce mot, *djayb*, qui par analogie avec la retombée d'un tissu d'un vêtement avait inspiré l'astronome arabe et désigné la chose. Djayb, dont la traduction par les savants européens de l'époque médiévale en *sinus*, terme latin voulant dire cavité, fente, pli, rabattait l'un sur l'autre le métaphorisant et le métaphorisé. »

complément de B. Hauchecorne (en parlant des demi-cordes)

« Aryabatha l'appelle alors *jya-ardha*, mot à mot *corde-demi* bientôt devenu *jya*. Les Arabes l'empruntent et le déforment en *jiba*. Or, en arabe, seules les consonnes sont notées et *jb* se confond avec *jaïb* qui signifie comme *sinus* le pli d'un vêtement. On traduit bien sûr ce mot par *sinus* en latin médiéval. »

1.5.2 Blabl pour introduire sin et cos

On considère à présent plein de cordes verticales, toutes parallèles à la droite (OJ). Leur hauteur depuis la droite horizontale (OI) permettant de les repérer, de les ordonner, le long de cette droite, on appelle cette hauteur *ordonnée*. Comme cette hauteur correspond à la moitié de la longueur de la corde, on l'appelle aussi *demi-corde*, terme qui a donné après des siècles de dérive linguistique le mot *sinus*.

Pour repérer l'endroit où une corde coupe l'axe horizontal (OI) – appelons X le point d'intersection –, on mesure la longueur OX, comptée positivement si on est du côté de I, négativement sinon : cette longueur signée est appelée *abscisse*[1]. Comme il s'agit d'une longueur qui va de pair avec l'ordonnée, *i. e.* avec le sinus, on l'appelle aussi *cosinus*.

Les termes sinus et cosinus sont traditionnellement associés à un *angle*. Qu'est-ce qu'un angle ? Une représentation simple[2] de l'angle $\widehat{AOB}$ (où A et B sont des points du cercle) est l'arc de cercle le plus court situé entre A et B. La longueur de cet arc est une *mesure* de l'angle $\widehat{AOB}$. Par exemple, une mesure de l'angle droit $\widehat{IOJ}$ est le quart de la circonférence totale (laquelle vaut 2π), soit $\frac{\pi}{2}$, ce qui correspondant aux $90°$ connus pour un angle droit.

Ainsi, l'on retrouve qu'un angle droit a pour sinus 1 et pour cosinus 0.

1.6 trigo hyperbolique

introduire ch et sh : paramètre de la branche d'hypercol $x^2 - y^2 = 1$.

Les formules de trigo hyperbolique sont vraiment simples à retenir. Pour le lien entre circ et hyper, se souvenir de $\cos(\cdot) = \operatorname{ch}(i\cdot)$ etc...

(on commence par + partout ; seule chose à retenir -> pour les termes croisés ch sh, il faut du sh)

$\operatorname{ch}(a \pm b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$

$\operatorname{sh}(a \pm b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$

$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b))$

$\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b))$

$\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(a+b) - \operatorname{sh}(a-b))$

$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$

$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$

$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$

De même,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} na &= \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} \operatorname{ch}^{n-k} a \operatorname{sh}^k a \\
\operatorname{sh} na &= \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} \operatorname{ch}^{n-k} a \operatorname{sh}^k a
\end{aligned}$$

Puis formule explicite

$$\begin{aligned}
\operatorname{ach} c &= \ln\left(c + \sqrt{c^2 - 1}\right) \\
\operatorname{ash} s &= \ln\left(s + \sqrt{s^2 + 1}\right) \\
\operatorname{ath} t &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}
\end{aligned}$$

on retrouve les radicaux des primitives (donner une méthode de dérivée), à calquer sur le cas circulaire.

lien rigolo : $\operatorname{atn} \operatorname{sh} = \operatorname{asn} \operatorname{th}$.

Appliquer tan donne $\tan \operatorname{asn} \operatorname{th} = \frac{\operatorname{th}}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2}} = \operatorname{sh}$, CQFD.

ou bien dériver donne la meêm chose (fonctino impaire fixe la constante)

Autre idéentité du genre ?

EXO (lien circ hyper)

[1] que l'on scindera en abs-cisse pour comprendre le rapport avec « lieu où la corde coupe »

[2] La définition précise d'un angle nous emporterait trop loin.

* l'aire délimité par les deux segments $O\binom{r}{0}$, $O\binom{r\,\mathrm{ch}\,\theta}{r\,\mathrm{sh}\,\theta}$ et par l'arc d'hypoerbole $x^2 - y^2 = r^2$ allant de $\binom{r}{0}$ à $\binom{r\,\mathrm{ch}\,\theta}{r\,\mathrm{sh}\,\theta}$ vaut $\frac{1}{2}r^2\theta$ (et r est le rayon de courbure à l'origine :

$$R = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^3} = r \frac{\sqrt{\mathrm{sh}^2\,u + \mathrm{ch}^2\,u}^3}{\mathrm{sh}\,u\,(-\,\mathrm{sh}\,u) - \mathrm{ch}\,u\,\mathrm{ch}\,u} \overset{u=0}{=} r.)$$

* les rotation (hyperbolique) donnée par $\begin{matrix} \mathrm{ch}\,u & \mathrm{sh}\,u \\ \mathrm{sh}\,u & \mathrm{ch}\,u \end{matrix}$ préserve les hyperboles équilatères et une branche d'hyperbole (équilatère) est l'image d'un point donnée par les rotations (formule d'additivité)

* les vecteurs tangent et radial sont orthogonaux pour la fq $\binom{a}{b}\binom{x}{y} = ax - by$

* la longuer de la branche (pour la métrique issu de la fq ci-dessus) de $\binom{r}{0}$ à $\binom{r\,\mathrm{ch}\,\theta}{r\,\mathrm{sh}\,\theta}$ vaut $r\theta$ ($\int_0^\theta \sqrt{\dot{y}^2 - \dot{x}^2} = \int r\sqrt{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}} = r\theta$