

Nombres réels (version chantier)

Marc SAGE

22 avril 2007

Table des matières

1	Rant sur ordre complétude tout ca	3
2	Ordre et comparaisons	4
3	inégalités	5
4	Approximation rationnelles	5
5	ouverts de $\mathbb{R}$	6
6	Remarques sur mesure	6

commensurables : on dit que m mesure A si A est un nombre entier de m , ce dernier joue le rôle d'une unité et est appelé une *mesure* de A . Alors commensurables $\Leftrightarrow$ possédant une commune mesure $\Leftrightarrow$ le rapport est un quotient d'entiers (la mesure se simplifie)

discret : du latin *discretus*, de *discernere*, "discerner"

NON à l'axiome d'Archimède, oui à Eudoxe (cf Bourbaki)

(rq : Archimède a utilisé son axiome pour quarrer une parabole, par l'absurde si l'aire ne vaut pas $1/3$ du triangle BLABLA, alors il y a une erreur, laquelle peut être prise > 1 si on la répète suffisamment, cf conf de Perrin sur site IREM http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/archimede_la_quadrature_de_la_parabole_et_les_cinq_sources_

La continuité des réels (opposés aux *padiques* totalement discontinus) vient de l'ambiguïté des écritures décimales : sinon on pourrait bijeter avec un Cantor, cf http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/42_74_38/)

J'avais fini par trouvé la biographie de Wallis sur le site de st andrews qui disait que ce signe ∞ avait été d'abord choisi pour représenter une courbe que l'on peut dessiner une infinité de fois.

Henri Lombardi, *Épistémologie mathématique* (note de bas de page p. 73) :

Le symbole ∞ que nous utilisons aujourd'hui fut utilisé pour la première fois par John Wallis dans De sectionibus conicis en 1655 et à nouveau dans Arithmetica infinitorum en 1656. Il choisit ce symbole pour représenter le fait que l'on peut traverser la courbe un nombre infini de fois.

La droite réelle est une droite ! intuition vitale.

dev décimal propre : $\{n ; a_n \neq 9\}$ infini, d'où unicité

Soit I un intervalle. LASSE

I contient deux points distincts

I est infini

I est d'intérieur non vide

I n'est ni le vide ni un singleton

Insuffisances algébriques $x^2 = 2$ et topologiques ($\sup \{r ; r^2 < 2\}$, suites de cauchy) qui sont en fait de même nature

achevé l'ordre avec les *coupures de Dedekind*, $-\infty = \emptyset$ et $\infty = \mathbb{Q}$

compléter la topologie avec Cauchy (en fait Meray ou Cantor), arbitrairement $\pm\infty = \{\text{suites} \rightarrow \pm\infty\}$.

partie entière = quotient par la division euclidienne par 1. D'où écriture $x = [x] + r$ très pratique

plus généralement : on peut "diviser" par n'importe quel réel $a > 0 : x = [\frac{x}{a}]a + r$ avec $0 \leq r < a$.

Faire Borel lesbesgue pour les segments, c'est pas bien méchant... (en déduire en EXO les idéaux maximaux de $C^0[a, b]$)

les parties entières supérieures et inférieures : $[x]$ et $\lceil x \rceil$.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: soit $x < y$: on dilate le petit segment par un entier n de sorte de tomber sur un grand segmetn $[nx, ny]$ de longueur > 1 . On peut alors piocher un entier dedans (par exemple $\lceil nx \rceil$) que l'on ramène dans le petit segment en redivisant par n .

Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: utiliser $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ENTRE deux réels, toujours un rationnel et un irrationnels.

Retirer un nombre fini de points ne change pas le caractère dense.

$a \notin \mathbb{N}^n \implies \sqrt[n]{a} \in \mathbb{Q}$.

$|\prod a_i| = \prod |a_i|$

$|\sum a_i| \leq \sum |a_i|$ avec = ssi tous les a_i sont de même signe

th segment emboîtés : ceg $\cap [n, \infty[$ et $\cap]0, \frac{1}{n}[$

homéo $R \simeq]-1, 1[: \text{th, } \frac{1}{1+| \cdot |}$

Enoncer : $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \implies a = 0$ pour préparer aux suites

Les quantif en $\varepsilon > 0$ équivalent à des quantif sur les $\frac{1}{n} \rightarrow$ suites !! (cela découle de la densité de $\mathbb{Q}$ autour de 0)

lever l'ambiguïté sur la notation $[a, b]$ lorsque $a > b$.

Les connexes de R sont les intervalles : montrer que $] \inf I, \sup I[\subset I$

COR : les convexes sont les intervalles

l'inégalité triangulaire $|a + b| \leq |a| + |b|$ est équivalente à $|n - l| \leq |n - p| + |p - l|$ (pour aller de Nantes à Lyon, on est sûr de faire moins de trajet qu'en passant par Paris) (poser $(a, b) = (n, -l)$ et $p = 0$)

1 Rant sur ordre complétude tout ça

Dans corps ordonné, borne sup $\iff$ complet $\iff$ BW $\implies$ eudoxe

BS $\implies$ BW soit (a_n) bornée dont on extrait sous-suite monotone (a'_n) qui va converger vers son sup

BW $\implies$ complet : soit a_n de Cauchy, a_n bornée, donc il y a une $\text{vda} h$; or de Cauchy + Adh non vide $\implies$ cv.

complet $\implies$ BS : dichotomie pour trouver le sup.

Eudoxe Soit $a > 0$. Si l'ensemble $\mathbb{N}a$ était majeure, il admettrait une borne supérieure B . Mais alors $B - a < \sup \mathbb{N}a$ ne majeure pas l'ensemble, ie $\exists n, B - a \not\geq na$, ie $B \not\geq (n + 1)a$, contradiction car $B \geq \mathbb{N}a$.

ON appelle *complétion* de Q tout corps muni d'une valeur absolue prolongeant celle de Q , où toute suite de C cv, et dans lequel ce dernier est dense.

PROP : une complétion de Q est unique à **unique** isométrie près.

DEM : soient C et C' deux complétions et φ un éventuel iso. Alors $\varphi(\lim q_n) = \lim \varphi(q_n) = \lim q_n$, d'où la nécessité ce qui suit. Mq $\begin{matrix} C & \cong & C' \\ \lim q_n & \longleftrightarrow & \lim q_n \end{matrix}$ bien def et homéo. Soit $c \in C$. Par densité, $c = \lim q_n$, donc q_n cv (dans C), dc de C, donc q_n de C dans C' , ie dans C' , donc par complétude (q_n) cv dans C' . Si c s'écrit comme une autre limite de rationnels, $c = \lim r_n$, alors $r_n - q_n \longrightarrow 0$ dans Q , ie $|r_n - q_n| \longrightarrow 0$, ie $r_n - q_n \longrightarrow 0$ dans C' , ie $\lim r_n = \lim q_n$. Ceci mq notre app est bien définie; sa réciproque est alors triviale à exhiber, d'où la bijectivité. Le caractère isométrique est aussi évident.

Soit K un corps totalement ordonné complet.

1 est un carré donc est ≥ 0 .

$p := \text{car } K = 0$ sinon (eudoxe) $\exists n \geq 1, np > 0$, absurde. Donc $Q \hookrightarrow K$.

Soit $a \in K : \{n \in \mathbb{Z}, n1_K \leq a\}$ majoré dans $\mathbb{Z}$ car eudoxe $\implies (\exists n_0, n_0 1 > a)$, donc admet un max $\lfloor a \rfloor$.

On retrouve alors la densité de Q dans K .

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & K \\ \lim r_n & \longmapsto & \lim r_n \end{cases}$. Sens de $\lim r_n$ dans K ? on a un ordre de corps (qui prolonge celui de Q), donc $K = K^- \amalg \{0\} \amalg K^+$, on a une valeur absolue, donc une topologie "comme dans Q "; r_n est de Cauchy, et K complet, donc la limite existe. Si $r_n \longrightarrow 0$ dans Q , idem dans K , donc f bien définie. f surj car Q dense, morphisme d'anneau, inj, croissant, CQFD.

CEG :

si ordre pas total, $\mathbb{C}$ où les positifs sont le premier quadrant.

Si pas complet, $\mathbb{Q}$. Mieux : si pas archimédien, on ordonne $\mathbb{R}(X)$ par $\frac{a_n X^n + \dots}{b_m X^m + \dots} \geq 0$ ssi $\frac{a_n}{b_m} \geq 0$ qui est total mais où $\mathbb{N}X < X^2$.

Corps partiellement ordonné s'ordonne ssi -1 n'est pas somme de carrés (th Artin-Schreier, exo). CEG : $\mathbb{C}$. $\mathbb{Q}$ est l'unique ordre total dense dans lui-même dénombrable sans min ni max (dû à Cantor)

Si on considère le langage constitué des constantes 0 et 1, des fonctions $+$ et $\times$ et des relations $<$ et $=$, alors la "propriété de la borne supérieure" est une propriété du second ordre, donc le théorème de Löwenheim-Skolem ne s'applique pas. Cela dit, il s'applique à la théorie complète de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les propriétés du premier ordre vérifiées par $\mathbb{R}$, et les modèles qu'on obtient s'appellent des corps de nombres réels non standards.

Quant à la propriété d'être archimédien, elle ne s'écrit pas dans le langage ci-dessus, et il faudrait rajouter un prédicat unaire "être un naturel".

EXO culture : les corps (totalement ordonnés) archimédiens sont les sous-corps de $\mathbb{R}$.

DEM Soit K un tel corps. Soit $a < b$ dans K . On peut considérer les entiers $n := \left\lfloor \frac{1}{b-a} \right\rfloor + 1$ et $m := \lfloor na \rfloor + 1$, de sorte que $a < \frac{m}{n} < b$ (ie $na < m < nb$, ok à gauche ; à droite on a $\frac{m}{n} = \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n} \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + \frac{1}{b-a} = b$). Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans K et tout élément de K est déterminé par une coupure dans $\mathbb{Q}$, d'où $K \hookrightarrow \mathbb{R}$ en tant qu'ordres. On vérifie que les sommes & produits se définissent aussi par coupure, ce qui montre que le plongement (d'ordres) $K \hookrightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme de corps.

2 Ordre et comparaisons

remplacer partout ~~iii/edqdl/iii~~ par *comparaison* (voire *ordination*)

on peut additionner les inégalité de même sens : $(\forall i, a_i \leq b_i) \implies \sum a_i \leq \sum b_i$ avec = ssi $(\forall i, a_i = b_i)$
exemples de cas d'égalité : résoudre $f^3 + f^2 + f = 3 \text{Id}$.

on peut multiplier les inégalités positives de même sens
 $(\forall i, 0 < a_i \leq b_i) \implies 0 < \prod a_i \leq \prod b_i$ avec = ssi $(\forall i, a_i = b_i)$
cp 1 : $0 \leq a \leq b \implies a^2 \leq b^2$ avec =ssi $a = b$.
cp 2 : $0 < a \leq b \implies 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$ avec =ssi $a = b$.

Un carré est toujours positif! En déduire $x + \frac{1}{x} \geq 2$ avec = ssi $x = 1$.

$\sqrt[n]{\prod x_i} \leq \frac{\sum x_i}{n}$: faire le cas 2 de manière géométrique!

Première preuve :

Utilise le lemme : $\forall t \geq 0, (1+t)^n \geq 1+nt$ (on écrit la formule du binôme, et on ne garde que les deux premiers termes)

Soient alors $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs. Quitte à changer l'ordre on peut supposer que x_n est le maximum.

On note : $A = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, $G = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$, $a = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$, $g = \sqrt[n-1]{x_1 \dots x_{n-1}}$ les moyennes arithmétique et géométrique des n et des $n-1$ premiers. Par hypothèse de récurrence, on a : $a \geq g$.

Ayant supposé x_n maximum, on a : $x_n \geq a$. On peut donc écrire $x_n = (1+\varepsilon)a$ avec $\varepsilon \geq 0$. Alors : $G^n = g^{n-1}x_n \leq a^{n-1}x_n = (1+\varepsilon)a^n$. Il suffit donc de montrer $A^n \geq (1+\varepsilon)a^n$.

Or : $A = \frac{n-1}{n}a + \frac{1}{n}x_n = (1 + \frac{\varepsilon}{n})a$, et le lemme conclut.

Deuxième preuve :

L'inégalité est vraie pour $n = 2$, elle se ramène à $(a-b)^2 \geq 0$.

Par récurrence elle est vraie pour $n = 2^k$: en notant a, a', g, g' les moyennes des $\frac{n}{2}$ premiers et des $\frac{n}{2}$ derniers, le cas $n = 2$ et l'hypothèse de récurrence donnent :

$$A = \frac{a+a'}{2} \geq \frac{g+g'}{2} \geq \sqrt{gg'} = G.$$

Ensuite si n est quelconque et si k est tel que $2^k > n$, en posant

$a = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, $g = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$, $x_{n+1} = \dots = x_{2^k} = a$,

$A = \frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k}$, $G = \sqrt[2^k]{x_1 \dots x_{2^k}}$, on a :

$$a = A \geq G = g^{\frac{n}{2^k}} a^{1 - \frac{n}{2^k}} \geq g$$

11 12 2007

intervalle : ambiguïté ordre/conexité $\rightarrow$ au feeling...

3 inégalités

cf poly inégalités + méthodes caclques / récurrence dans GrandesIdées

EG : $(1 - \lambda^a)^b + (1 - \mu^b)^a > 1$ si $a, b > 1$ et $\lambda + \mu = 1$ (cf solutin de Pierre Dehornoy)

un carré est positif

$$\frac{a+b}{2} \geq 2\sqrt{ab}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

IAG par deux méthodes

Bernoulli

Cauchy schwarz

$$\begin{aligned} \text{eg : } \frac{2}{1} \frac{4}{2} \frac{6}{5} \dots \frac{2n}{2n-1} &= \prod \frac{2p}{2p-1} = \prod \frac{(2p-1)+(2p+1)}{2p-1} \\ &\geq \prod \frac{\sqrt{(2p-1)(2p+1)}}{2p-1} = \prod \sqrt{\frac{2p+1}{2p-1}} = \sqrt{2n+1} \end{aligned}$$

4 Approximation rationnelles

On construit $\frac{p_n}{q_n}$ meilleure appoximation rationnel de x de dénom $< q_{n+1}$.

HR : pour $n \geq 0$, il y a des entiers $p_0, \dots, p_n$ et $1 = q_0 < q_1 < \dots < q_n$ tels que

$$0 \leq i \leq n \implies |p_i - q_i x| = \min_p |p - q_i x|$$

$$0 \leq i < n \implies |p_i - q_i x| = \min_{q < q_{i+1}}^p |p - qx|$$

LEmme : $\forall N \geq 1, \exists 1 \leq q < N$ tq $|p - qx| < \frac{1}{N}$.

DEM : on met les $N+1$ chaussstes $/kx/$ dans N tiroires de $[0, 1[$, donc deux sont dans le même, donc à distnace $< \frac{1}{N}$, disons $|(kx - \lfloor kx \rfloor) - (lx - \lfloor lx \rfloor)| < \frac{1}{N}$, d'où résltat avec $q = |k - l|$.

Pour démarrer, $H(0)$ dit que p_0 est l'entier le plus proche de x

Ensuite, puisque x irratoinnel, $|p_n - q_n x| > 0$, donc $\geq \frac{1}{N}$, lemme dit queil y a un p, q tq $|p - qx| < \frac{1}{N} \leq |p_n - q_n x|$.

Par HR, $q \geq q_n$ (sinon $|p_{n-1} - q_{n-1} x| = \min_{b < q_n}^a |a - bx| \leq |p - qx| < |p_n - q_n x|$) et même strict (sinon $|p_n - q_n x| = \min_a |a - q_n x| \leq |p - qx| < |p_n - q_n x|$). Ainis, on prend pour q_{n+1} un tel q minimal, puis un p_{n+1} associé (d'où $\min_p |p - q_{n+1} x| = |p_{n+1} - q_{n+1} x|$). Alors $q < q_{n+1} \implies |p - qx| \geq |p_n - q_n x|$ avec = possible. FINI.

Applkiquer le lemme avec $N = q_{n+1}$: il y a un $q < q_{n+1}$ tq $|p - qx| < \frac{1}{q_{n+1}}$, d'où $|p_n - q_n x| = \min_{q < q_{n+1}}^p |p - qx| < \frac{1}{q_{n+1}}$, ie

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Mieux : $\frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ (si $x \notin \mathbb{Q}$), donc $\frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{|p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n|}{q_n q_{n+1}}$ (entier non nul est ≥ 1) et $\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| < \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right|$.

Notant $r_n := \frac{p_n}{q_n}$, on a donc

$$|r_{n+1} - x| < |r_n - x| < |r_{n+1} - r_n|,$$

autremendit $x \in]r_n, r_{n+1}[$ (approximation alternée)

$$\text{EG : } e \simeq 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}$$

EG : $\pi \simeq 3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}$ (noter le saut entre 7 et 106 : pas de meilleure approximation pour des frac de dénom < 106)

EG (quinte comme fraction d'octave) $\frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2} \simeq \frac{1}{2}$ (triton horrible) $\frac{3}{5}, \frac{7}{12}$ (gamme usuelle), $\frac{24}{41}$ (divison en 41 commas, 7 comma par ton, 3 pour demiton diatonique), $\frac{31}{53}$ (divison en 53 commas, 9 comma par ton, 4 pour demiton diatonique) $\frac{179}{306}$.

Dev décimal
 Dev d'Engel
 Dev égyptien
 fraction continuées montantes/descendantes/deRosen

DEF $A := \lfloor \mathbf{N}\sqrt{2} \rfloor =: \{a_1 < a_2 < \dots\}$ et $B := \mathbf{N} \setminus A =: \{b_1 < b_2 < \dots\}$. Mq $a_n - b_n = 2n$
 (BR $\sqrt{2}$ p397)
 Généraltion ? lien avec thm équirépartition FGN ?

5 ouverts de R

ce sont les réunion dénombrables d'intervalles ouverts

6 Remarques sur mesure

Th : il existe une unique mesure, invariante par translation, qui coïncide avec la longueur sur les intervalles. (définie sur la tribu engendrée par les intervalles, ie sur la plus petite partie de $P(\mathbb{R})$ stable par complément et union au plus dénombrable)

Pb : existe-il des parties de $\mathbb{R}$ non mesurables ? Guiseppe Vitali nous dit que oui grâce à AC (prendre une transversale de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ dans $[0, 1]$) mais Solovay nous dit que AC est indispensable (et même que AC dépendant est insuffisant). Moralité : pas très concret si AC_dep insuffisant !

triangle de pensées, page 28, Alain Connes Il y a un mécanisme simple qui, à partir d'un nombre non standard, fournit de manière canonique, un sous-ensemble de $[0, 1]$ qui est non mesurable au sens de Lebesgue. La conclusion que j'en ai tirée, c'est que jamais personne ne pourra me montrer un nombre non standard. [...] Cela veut dire que dans la vieille querelle qui avait opposé Lebesgue à Hadamard, Lebesgue avait, de fait, une position très solide. Il savait intuitivement que toutes les fonctions que l'on peut nommer sont mesurables, mais ce n'est qu'avec des résultats comme celui de Solovay que cette position est devenue tenable.