Polynômes bis

Marc SAGE

18 décembre 2005

Table des matières

1 Sur la nullité des polynômes à n indéterminées 2

2 Une fonction localement polynomiale est un polynôme 2

3 Continuité des racines 3

4 Une fonction polynomiale en ses variables est polynomiale 4

5 Théorème de Mason et grand théorème de Fermat pour les polynômes 5

6 Un peu de géométrie 6

7 Inégalité de Hardy 6

8 Localisation des racines dans le disque unité 7

9 Polynômes interpolateurs de Newton 8

10 Un exercice d'interpolation 10

1 Sur la nullité des polynômes à n indéterminées

Soit $P \in K[X_1, ..., X_n]$ un polynôme à n indéterminées sur un corps K infini. On suppose qu'il existe n parties E_n infinies de K telles que P s'annule sur le produit $E_1 \times ... \times E_n$.

Montrer que P est le polynôme nul.

Solution proposée.

Raisonnons par récurrence.

Pour $n = 1$, P est un polynôme à une indéterminée qui s'annule en une infinité de points sur un corps infini, donc est le polynôme nul.

Dans le cas général, on peut toujours écrire

$$P = \sum_{i_1, ..., i_n \geq 0} \lambda_{i_1, ..., i_n} X_1^{i_1} ... X_n^{i_n} = \sum_{i \geq 0} \underbrace{\left(\sum_{i_1, ..., i_{n-1} \geq 0} \lambda_{i_1, ..., i_{n-1}, i} X_1^{i_1} ... X_{n-1}^{i_{n-1}} \right)}_{:= P_i(X_1, ..., X_{n-1})} X_n^i = \sum_{i \geq 0} P_i (X_1, ..., X_{n-1}) X_n^i$$

Tuons la dernière variable en évaluant en $X_n = a$ pour un a non nul dans E_n (possible car E_n est infini). Par hypothèse, le polynôme à $n - 1$ indéterminées $\sum_{i \geq 0} P_i (X_1, ..., X_{n-1}) a^i$ s'annule sur $E_1 \times ... \times E_{n-1}$, donc est nul par récurrence, ce qui s'écrit

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{i_1, ..., i_{n-1}} \lambda_{i_1, ..., i_{n-1}, i} X_1^{i_1} ... X_{n-1}^{i_{n-1}} a^i = 0,$$

ou encore $\lambda_{i_1, ..., i_{n-1}, i} a^i = 0$ pour tout $(i_1, ..., i_{n-1}, i)$, d'où $\lambda_{i_1, ..., i_n} = 0$ pour tout $(i_1, ..., i_n)$, *i.e.* $P = 0$.

Remarque. Il ne suffit *pas* que P s'annule sur une partie infinie de K^n, comme le montre le contre-exemple $P = X^2 - Y^2$ et la partie diagonale $\{(x, x) \; ; \; x \in K\}$.

2 Une fonction localement polynomiale est un polynôme

$\mathbb{B}$ et $\mathbb{S}$ désigneront respectivement la boule ouverte unité et la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ localement polynomiale, i.e. *telle que*

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \; \exists r > 0, \; \exists P \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n], \; f = P \text{ sur } a + r\mathbb{B}$$

(remarquer que la définition ne dépend pas de la norme choisie). Montrer que f est encore un polynôme.

Solution proposée.

On raisonne comme dans la première feuille, en s'inpirant du cas $n = 1$. f vaut un certain P sur une boule $r\mathbb{B}$, d'où l'existence de

$$\rho := \sup \{r > 0 \; ; \; f = P \text{ sur } r\mathbb{B}\}.$$

Si ρ est infini, on a gagné.

Montrons sinon que ce sup est en fait un max. Fixons un a sur la sphère $\rho\mathbb{S}$. f vaut un polynôme Q sur une boule $a + \varepsilon\mathbb{B}$, donc $P = Q$ sur $(a + \varepsilon\mathbb{B}) \cap \left(\rho - \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathbb{B}$. Cette intersection est un ouvert non vide, donc contient une boule pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (par équivalence des normes), *i.e.* un produit de n parties infinies de $\mathbb{R}$. $P - Q$ est ainsi nul sur ce produit, donc nul partout par l'exercie précédent. Par conséquent, $f = P$ sur $a + \varepsilon\mathbb{B}$, en particulier en a, et ce pour tout $a \in \rho\mathbb{S}$.

Montrons maintenant que l'on peut pousser ρ un peu plus loin. Pour $a \in \rho\mathbb{S}$, soit

$$\varepsilon_a = \sup \{\varepsilon > 0 \; ; \; f = P \text{ sur } a + \varepsilon\mathbb{B}\}$$

(qui existe par ce qui précède). On peut supposer tous les ε_a finis, sinon le problème est réglé. On sait également que $f = P$ sur $a + \varepsilon_a\mathbb{B}$ par ce qui précède, et donc on aimerait pousser ρ plus loin en considérant

$$\rho' = \rho + \inf_{a \in \rho\mathbb{S}} \varepsilon_a.$$

On aura gagné si $\inf \varepsilon_a > 0$, car alors f vaudra P sur $\rho'\mathbb{B}$ avec $\rho' > \rho$, ce qui contredira la maximalité de ρ.

Supposons par l'absurde que $\inf \varepsilon_a = 0$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ un $a_n \in \rho\mathbb{S}$ tel que $\varepsilon_{a_n} < \frac{1}{n}$. Quitte à extraire (par compacité de la sphère $\rho\mathbb{S}$), on peut supposer (a_n) convergente , mettons $a_n \longrightarrow a$ avec $\varepsilon_{a_n} < \frac{1}{n}$. À partir d'un certain rang N, on aura $\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon_a}{2}$, donc $a_n + \frac{\varepsilon_a}{2}\mathbb{B} \subset a + \varepsilon_a\mathbb{B}$, d'où $f = P$ sur $a_n + \frac{\varepsilon_a}{2}\mathbb{B}$ et $\varepsilon_{a_n} \geq \frac{\varepsilon_a}{2}$ par maximalité de ε_{a_n}, *absurde* puisque $\varepsilon_{a_n} \longrightarrow 0$.

Remarque. Un argument de Borel-Lebesgue-compactité permet de grandement clarifier la dernière étape. Le compact $\rho\mathbb{S}$ étant recouvert par hypothèse par des ouverts $a + \varepsilon_a\mathbb{B}$ (pas besoin de considérer un sup), on peut en extraire un recouvrement *fini*, et alors f vaut P sur la boule $(\rho + \min \varepsilon_a)\,\mathbb{B}$, ce qui contredit la maximalité de ρ.

3 Continuité des racines

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définit une norme sur $\mathbb{K}[X]$ par $\left\|\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right\| = \max_{n\geq 0} |a_n|$. On dit qu'une suite (P_k) de polynômes *converge* vers un polynôme P (pour la norme $\|\cdot\|$) si $\|P_k - P\| \longrightarrow 0$; on note alors $P_k \longrightarrow P$.

Soit (P_k) une suite de polynômes de degré borné. Montrer que $P_k \longrightarrow P$ ssi les coefficients de P_k convergent chacun vers ceux de P. Que dire si la suite n'est plus supposé bornée en degré ?

Soit (P_k) une suite de polynômes unitaires de degré n fixé convergeant vers un polynôme P. Montrer que les racines de P_k convergent vers celles de P, au sens où l'on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{c} P_k = \prod_{i=1}^n \left(X - \lambda_i^{(k)}\right) \\ P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \end{array} \right. \quad \textit{avec } \forall i,\ \lambda_i^{(k)} \overset{k\infty}{\longrightarrow} \lambda_i.$$

Solution proposée.

On raisonne par équivalences, en notant d un majorant de $\deg P_k$ et $\deg P$:

$$\sum_{n=0}^{d} a_n^{(k)} X^n \overset{k\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{d} a_n X^n \iff \left\| \sum_{n=0}^{d} a_n^{(k)} X^n - \sum_{n=0}^{d} a_n X^n \right\| \overset{k\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\iff \max_{n=0,\dots,d} \left| a_n^{(k)} - a_n \right| \overset{k\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \forall n = 0, ..., d,\ \left| a_n^{(k)} - a_n \right| \overset{k\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela ne marche plus si les degrés ne sont pas bornés : considérer par exemple $P_k = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k} 2^n X^n$, qui converge simplement (*i.e.* coefficient par coefficient) vers 0, mais qui diverge grossièrement puisque $\|P_k\| = \frac{2^k}{k} \longrightarrow \infty$.

Pour la continuité des racines, on procède par récurrence. Montrons déjà que pour une racine λ de P, il y a pour tout k une racine λ_k de P_k telle que $\lambda_k \longrightarrow \lambda$. À k fixé, on n'a guère le choix : puisqu'on veut $|\lambda_k - \lambda| \longrightarrow 0$, on prend pour λ_k une racine de P_k minimisant la distance $|\lambda_k - \lambda|$; on remarque alors que

$$|P_k(\lambda)| = \prod_{\xi \text{ racine de } P_k} |\xi - \lambda| \geq \prod_{\xi \text{ racine de } P_k} |\lambda_k - \lambda| = |\lambda_k - \lambda|^n,$$

d'où

$$|\lambda_k - \lambda| \leq \sqrt[n]{|P_k(\lambda)|} \longrightarrow \sqrt[n]{|P(\lambda)|} = 0.$$

On peut donc écrire $\left\{ \begin{array}{c} P_k = (X - \lambda_k) Q_k \\ P = (X - \lambda) Q \end{array} \right.$ avec $\lambda_k \longrightarrow \lambda$, ce qui amorce la récurrence. Il suffit donc de montrer que $Q_k \longrightarrow Q$ sous les hypothèses $\left\{ \begin{array}{c} P_k \longrightarrow P \\ \lambda_k \longrightarrow \lambda \end{array} \right.$. On détaille les coefficients :

$$\begin{aligned} P &= (X - \lambda) Q = (X - \lambda) \sum_{i=0}^{n-1} q_i X^i = \sum_{i=0}^{n-1} q_i X^{i+1} - \lambda \sum_{i=0}^{n-1} q_i X^i \\ &= q_{n-1} X^n + (q_{n-2} - \lambda q_{n-1}) X^{n-1} + ... + (q_0 - \lambda q_1) X - \lambda q_0 \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} P_k &= (X-\lambda_k)\,Q_k = (X-\lambda_k)\sum_{i=0}^{n-1} q_i^{(k)} X^i \\ &= q_{n-1}^{(k)} X^n + \left(q_{n-2}^{(k)} - \lambda_k q_{n-1}^{(k)}\right) X^{n-1} + \ldots + \left(q_0^{(k)} - \lambda_k q_1^{(k)}\right) X - \lambda_k q_0^{(k)}. \end{aligned}$$

On lit d'abord que $q_{n-1}^{(k)} \longrightarrow q_{n-1}$, puis

$$\begin{aligned} q_{n-2}^{(k)} &= \left(q_{n-2}^{(k)} - \lambda_k q_{n-1}^{(k)}\right) + \lambda_k q_{n-1}^{(k)} \\ &\longrightarrow (q_{n-2} - \lambda q_{n-1}) + \lambda q_{n-1} = q_{n-2}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour tous les q_i, d'où $Q_k \longrightarrow Q$ comme souhaité.

Remarque. Ce résultat dit en substance que les racines de P_n "tendent" vers celles de P lorsque P_n tend vers P : c'est bien de la continuité.

Pour être plus précis, on peut mettre une distance sur l'ensemble $\mathcal{K}$ des compacts de $\mathbb{K}$, appelée *distance de Hausdorff* (cf. feuille sur les Banach pour en savoir un peu plus). L'ensemble $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ des racines d'un poynôme de degré n étant fini, c'est un compact de $\mathbb{K}$, et la distance de Hausdorff s'exprime sur ces ensembles de racines par

$$\Delta\left(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}\right) = \inf_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \max_{i=1,\ldots,n} \left|\lambda_i - \mu_{\sigma(i)}\right|$$

(ne pas hésiter à prendre un papier et un crayon pour visualiser cette définition).

L'énoncé exprime alors la continuité de l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathcal{K} \\ P & \longmapsto & \{\text{racines de } P\} \end{array} \right. .$$

4 Une fonction polynomiale en ses variables est polynomiale

Soit K un corps indénombrable et $f : K^2 \longrightarrow K$ telle que $f(x,\cdot)$ et $f(\cdot,y)$ soient polynomiales pour tout x et y dans K. Montrer que f est polynomiale.

Que se passe-t-il si K est fini ? Dénombrable ?

Solution proposée.

Soient x et y dans K. On peut écrire $f(x,y)$ comme un polynôme en y, mettons

$$f(x,y) = a_0(x) + a_1(x)\,y + \ldots + a_{n_x}(x)\,y^{n_x}.$$

On va déjà essayer de raisonner à degré en y borné, *i.e.* à n_x borné. On introduit pour cela les ensembles

$$X_n = \{x \in K \;; \forall i > n,\ a_i(x) = 0\}.$$

Par hypothèse, les X_n recouvrent tout le corps de base, donc l'un deux est indénombrable, disons X_ν. Ainsi,

$$\forall x \in X_\nu,\ \forall y \in K,\ f(x,y) = a_0(x) + a_1(x)\,y + \ldots + a_\nu(x)\,y^\nu.$$

On a utilisé dans ce qui précède le caractère polynomial de $f(x,\cdot)$. On va utiliser maintenant celui des $f(\cdot,y_i) = P_i$ où $y_0, y_1, \ldots, y_\nu$ seront des scalaires fixés deux à deux distincts (possible car K est infini). L'égalité ci-dessus évaluée en les y_i donne

$$\begin{pmatrix} 1 & y_0 & \cdots & y_0^\nu \\ 1 & y_1 & \cdots & y_1^\nu \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_\nu & \cdots & y_\nu^\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(x) \\ a_1(x) \\ \vdots \\ a_\nu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_\nu(x) \end{pmatrix}.$$

La matrice de gauche est inversible (on reconnait un Vandermonde), d'où

$$\begin{pmatrix} a_0(x) \\ \vdots \\ a_\nu(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P_0(x) \\ \vdots \\ P_\nu(x) \end{pmatrix}$$

où A est une matrice fixée (on ne touche plus aux y_i), ce qui montre que les $a_i(x)$ sont des polynômes en x pour tout x dans X_ν.

Mais alors le polynôme $f(\cdot, y)$ coïncide avec le polynôme $a_0(\cdot) + ya_1(\cdot) + ... + y^\nu a_\nu(\cdot)$ sur X_ν qui est infini, d'où l'égalité pour tout x dans K, et ce pour tout y, *CQFD.*

Si K est fini, mettons $K = \{a_1, ..., a_q\}$, on interpole $P_i = \prod_{j\neq i} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$ et $Q_i := f(a_i, \cdot)$ pour tout i, puis on observe que $f(x,y) = \sum_{i=1}^q P_i(x) Q_i(y)$. La conclusion est inchangée.

Si K est dénombrable, le résultat tombe en défaut. Notons $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ les éléments de K. On va construire f progressivement sur les ensembles $(\{a_n\} \times K) \cup (K \times \{a_n\})$, l'idée étant d'obtenir un polynôme de degré n sur ces parties, et ce pour tout n. Si f était polynomial, mettons de degré d en la première variable, alors $f(\cdot, a_{d+1})$ serait un polynôme de degré d, mais ce serait par construction un polynôme de degré $d+1$, d'où *absurdité* vu que les deux doivent coïncider sur le corps infini K.

Pour construire f de la sorte, on commence par poser $f(a_0, \cdot) = f(\cdot, a_0) = 0$, puis supposant construits $f(a_i, \cdot)$ et $f(\cdot, a_i)$ pour $i < n$, on interpole : soit P_n de degré $\leq n$ tel que $P(a_i) = f(a_i, a_n)$ pour tout $0 \leq i < n$. On peut toujours supposer P de degré exactement n, quitte à rajouter $\prod_{0\leq i<n}(X - a_i)$. On pose enfin $f(a_n, \cdot) = f(\cdot, a_n) = P_n$.

5 Théorème de Mason et grand théorème de Fermat pour les polynômes

Nous savons tous que le nombre de racines d'un polynôme est borné par son degré, la réciproque étant évidemment complètement fausse (considérer les monômes X^n).

Le théorème de Mason propose des conditions agréables pour permettre à une réciproque pas si ridicule que ça de s'exprimer.

• *Soit A, B, C trois polynômes tels que $A + B = C$. Si l'on suppose A premier avec B, montrer que les degrés de A, B, C sont bornés par le nombre de racines du produit ABC moins un.*

• *En déduire le grand théorème de Fermat pour les polynômes : pour $n \geq 3$, il n'y a pas de polynômes A, B, C premiers entre eux tels que*

$$A^n + B^n = C^n.$$

Solution proposée.

• Cassons nos polynômes dans une extension adéquate :

$$\begin{cases} A = \lambda \prod_{i=1}^a (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \\ B = \mu \prod_{i=1}^b (X - \mu_i)^{\beta_i} \\ C = \nu \prod_{i=1}^c (X - \nu_i)^{\gamma_i} \end{cases}.$$

Normalisons la condition $A + B = C$ en introduisant les fractions rationnelles $(F, G) = \left(\frac{A}{C}, \frac{B}{C}\right)$, de sorte que $F + G = 1$ et donc $F' + G' = 0$. On pourra donc écrire

$$\frac{A}{B} = \frac{F}{G} = -\frac{\frac{G'}{G}}{\frac{F'}{F}} = -\frac{\sum_{i=1}^b \frac{\beta_i}{X-\mu_i} - \sum_{i=1}^c \frac{\gamma_i}{X-\nu_i}}{\sum_{i=1}^a \frac{\alpha_i}{X-\lambda_i} - \sum_{i=1}^c \frac{\gamma_i}{X-\nu_i}} = -\frac{M\frac{G'}{G}}{M\frac{F'}{F}}$$

où $M = \prod_{i=1}^a (X - \lambda_i) \prod_{i=1}^b (X - \mu_i) \prod_{i=1}^c (X - \nu_i)$ est un dénominateur commun. Les degrés des termes de la fraction de droite sont $< \deg M$, et la condition $A \wedge B = 1$ permet de conclure.

• Supposons à présent l'existence de trois polynômes A, B, C tels que $A^n + B^n = C^n$ avec $A \wedge B = 1$. L'intêret de Mason est que le nombre de racines est invariant par élévation à une puissance quelconque, tandis que le degré lui ne l'est pas du tout ! En notant N le nombre de racines de ABC, on doit donc avoir

$$\left.\begin{array}{l} n \deg A \leq N-1 \\ n \deg B \leq N-1 \\ n \deg C \leq N-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow n \deg (ABC) \leq 3(N-1) \leq 3 \deg ABC - 3,$$

ce qui impose $n \leq 2$.

Les trois exercices qui suivent illustrent l'importance des représentations intégrales des coefficients d'un polynôme par la formule de *Cauchy* :

$$a_n = \int_0^{2\pi} P\left(e^{i\theta}\right) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Notons également la formule de *Parseval* :

$$\sum |a_n|^2 = \int_0^{2\pi} \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

6 Un peu de géométrie

Soit $A_1, ...A_n$ des points du plan complexes. Montrer qu'il y a un point M sur le cercle unité tel que

$$A_1M...A_nM \geq 1.$$

Solution proposée.
Soient λ_k les affixes des points A_k. En introduisant le polynôme $P = \prod (X - \lambda_k)$, on veut trouver un z sur le cercle unité tel que $|P(z)| \geq 1$. Or, on peut minorer le sup de P sur le cercle unité par n'importe lequel de ses coefficients a_k grâce à la formule de Cauchy :

$$|a_k| = \left|\int_0^{2\pi} P\left(e^{i\theta}\right) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}\right| \leq \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right| \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|.$$

P étant unitaire, on a le résultat en considérant le coefficient dominant.

7 Inégalité de Hardy

Soit (u_n) une suite réelle de carré sommable, i.e. *telle que $\sum_{n\geq 0} u_n^2 < \infty$. Montrer que*

$$\sum_{p,q\geq 0} \frac{u_p u_q}{p+q+1} \leq \pi \sum_{n\geq 0} u_n^2.$$

On pourra utiliser une paramétrisation polaire pour l'intégrale d'une fonction sur $[-1, 1]$.

Solution proposée.
Afin de donner un sens à la somme $\sum_{p,q\geq 0} \frac{u_p u_q}{p+q+1}$, on commence par borner les indices p et q, mettons $\sum_{p,q=0}^{n} \frac{u_p u_q}{p+q+1}$. Ensuite, pour faire apparaître un polynôme, on remarque que

$$\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n dx$$

(idée à retenir !), d'où

$$\sum_{p,q=0}^{n} \frac{u_p u_q}{p+q+1} = \sum_{p,q=0}^{n} u_p u_q \int_0^1 x^{p+q} dx = \int_0^1 \sum_{p,q=0}^{n} (u_p x^p)(u_q x^q)\, dx = \int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{n} u_p x^p \right)^2 dx = \int_0^1 P^2$$

où P désigne le polynôme à coefficients réels $\sum_{i=0}^{n} u_i X^i$. On va essayer de passer en polaires comme suggéré :

$$\int_0^\pi f\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{i} \int_0^\pi f\left(e^{i\theta}\right) d\left(e^{i\theta}\right) = -i \int_1^{-1} f = i \int_{-1}^{1} f.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P^2 &\leq \int_{-1}^1 P^2 = \left| \int_{-1}^1 P^2 \right| = \left| \frac{1}{i} \int_0^\pi P^2\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \left| P\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta \\
&= \int_0^\pi P\left(e^{i\theta}\right) \overline{P\left(e^{i\theta}\right)} d\theta = \int_0^\pi P\left(e^{i\theta}\right) P\left(\overline{e^{i\theta}}\right) d\theta \text{ car } P \text{ est à coefficients réels} \\
&= \int_0^\pi P\left(e^{i\theta}\right) P\left(e^{-i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} P\left(e^{i\theta}\right) P\left(e^{-i\theta}\right) d\theta = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \left| P\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \pi \sum_{p=0}^{n} u_p^2 \text{ par Parseval,}
\end{aligned}$$

d'où le résultat en faisant tendre n vers ∞.

Remarquer que les mêmes calculs en remplaçant u_n par $|u_n|$ donnent la sommabilité de la famille $\left(\frac{u_p u_q}{p+q+1}\right)_{p,q \geq 0}$, ce qui permet de regrouper comme on le souhaite et justifie *a posteriori* le passage à la limite.

8 Localisation des racines dans le disque unité

Soit P un polynôme complexe de degré $n \geq 1$, mettons $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. On définit respectivement la *mesure* et la *norme* de P par

$$\begin{cases} m(P) = |a_n| \prod_{i=1}^{n} \max(1, |\lambda_i|) \\ \|P\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2} \end{cases}.$$

Observer que si P est unitaire (*i.e.* $a_n = 1$), alors la mesure de P est le produit des modules de ses racines hors du disque unité (comptées avec leur multiplicité).

Montrer que pour tout complexe z, on a

$$\|(X+z) P\| = \|(\overline{z} X + 1) P\|$$

(on pourra utiliser Parseval), en déduire que

$$m(P) \leq \|P\|,$$

puis que, si 0 n'est pas racine de P, alors le nombre de racines de P de module inférieur à r^2 (où $0 < r < 1$) est borné par

$$\frac{1}{\ln \frac{1}{r}} \ln \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 r^{2i}}}{|a_0|}.$$

Solution proposée.

Suivons l'indication en évaluant les deux quantités proposées par Parseval. On a d'une part

$$\|(zX+1) P\|^2 = \int_0^{2\pi} \left| \left(z e^{i\theta} + 1\right) P\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| 1 + z e^{i\theta} \right|^2 \left| P\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi},$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\|(X+z)P\|^2 &= \int_0^{2\pi}\left|\left(e^{i\theta}+z\right)P\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\frac{d\theta}{2\pi}=\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{i\theta}+z\right|^2\left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\frac{d\theta}{2\pi}\\ &\overset{\theta\mapsto-\theta}{=}\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{-i\theta}+z\right|^2\left|P\left(e^{-i\theta}\right)\right|^2\frac{d\theta}{2\pi}=\int_{-\pi}^{\pi}\left|1+ze^{i\theta}\right|^2\left|P\left(e^{-i\theta}\right)\right|^2\frac{d\theta}{2\pi},\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer l'égalité $\left|P\left(e^{-i\theta}\right)\right|^2=\left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|^2$. Si $P=\sum_{i=0}^n a_iX^i$ était à coefficients réels, ce serait quasi immédait, mais là il faut faire attention. En développant, on trouve

$$\left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|^2=P\left(e^{i\theta}\right)\overline{P\left(e^{i\theta}\right)}=\sum_{p,q=0}^{n}a_p\overline{a_q}e^{i(p-q)\theta}=\sum_{r=-n}^{r}\left(\sum_{p+q=r}a_p\overline{a_q}\right)e^{ir\theta},$$

qui est bien symétrique en θ, *CQFD*.

Le lecteur trouvant le recours à Parseval tombé du ciel pourra développer les quantités $\|(X+z)P\|$ et $\|(zX+1)P\|$ à la main, retirer les quantités égales par hypothèse de récurrence, puis vérifier que ce qui reste est bien égal. Les calculs, bien que faisables, sont vraiment pénibles, mais l'on est bien content d'y penser lors d'un écrit d'Agrégation et lorsque Parseval nous a abandonné.

Pour en déduire $m(P)\leq\|P\|$, il s'agit de voir que l'égalité ci-dessus permet d'envoyer les racines de module >1 sur celle de module <1. On peut toujours prendre P unitaire par homogénéité de l'inégalité $m(P)\leq\|P\|$. Ainsi, en écrivant $P=\prod_{i=1}^n(X+\lambda_i)$, on note que la norme de P est inchangée en remplaçant $X+\lambda_i$ par $\overline{\lambda_i}X+1$ (on vient de le montrer), *i.e.* en remplaçant la racine λ_i par $\frac{1}{\overline{\lambda_i}}$. On fait alors cette tranformation pour toutes les racines λ_i de module <1, ce qui a pour effet d'augmenter la mesure de P (on rajoute des racines de module >1), laquelle vaut après ces modifications le produit de *tous* les $|\lambda_i|$, *i.e.* $|a_0|$, qui est clairement plus petit que $\sqrt{|a_0|^2+\sum_{i=1}^n|a_i|^2}=\|P\|$, *CFQD*.

On suppose à présent que $a_0\neq0$. Notons N le nombre de racines de P de module $\leq r^2$. On veut

$$N\overset{?}{\leq}\frac{1}{\ln\frac{1}{r}}\ln\frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n|a_i|^2r^{2i}}}{|a_0|}\iff\left(\frac{1}{r}\right)^N\overset{?}{\leq}\frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n|a_i|^2r^{2i}}}{|a_0|}\iff\frac{|a_0|}{r^N}\overset{?}{\leq}\sqrt{\sum_{i=0}^n|a_i|^2r^{2i}}.$$

Le dernier terme de droite vaut la norme de $P(rX)$, donc il serait judicieux de montrer que le dernier terme de gauche est majoré par la mesure de $P(rX)=\prod_{i=1}^n(rX-\lambda_i)=r^n\prod_{i=1}^n\left(X-\frac{\lambda_i}{r}\right)$. Or, en notant N' le nombre de racines de P de module $\leq r$, cette mesure vaut

$$\begin{aligned}m(P(rX)) &= r^n\prod_{|\lambda_i|>r}\left|\frac{\lambda_i}{r}\right|=r^n\frac{1}{r^{n-N'}}\prod_{|\lambda_i|>r}|\lambda_i|=r^{N'}\frac{|a_0|}{\prod_{|\lambda_i|\leq r}|\lambda_i|}\overset{?}{\geq}\frac{|a_0|}{r^N}\\ &\iff\prod_{|\lambda_i|\leq r}|\lambda_i|\overset{?}{\leq}r^{N+N'}.\end{aligned}$$

Or, en séparant les racines selon la position de leur module de part et d'autre de r et r^2, on a directement

$$\prod_{|\lambda_i|\leq r}|\lambda_i|=\prod_{|\lambda_i|<r^2}|\lambda_i|\prod_{r^2\leq|\lambda_i|\leq r}|\lambda_i|\leq r^{2N}r^{N'-N}=r^{N+N'},\ \textit{CQFD}.$$

9 Polynômes interpolateurs de Newton

Soient $a_0,...,a_n$ des réels deux à deux distincts et $b_0,...,b_n$ des réels quelconques. On cherche un polynôme de degré n valant b_i en a_i. On connaît déjà une solution par Lagrange : $P=\sum_{i=0}^n b_j\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}$.

Une autre approche consiste à construire P de proche en proche en incorporant successivement les données $P(a_i)=b_i$; on cherche pour cela P sous la forme

$$P=c_0+c_1(X-a_1)+c_2(X-a_1)(X-a_0)+...+c_n(X-a_{n-1})...(X-a_0)$$

où les c_i sont des constantes à déterminer de proche en proche : $c_0 = b_0$, $c_1 = \frac{b_1 - c_0}{a_0 - a_1}$, $c_2 = \frac{b_2 - c_0 - c_1(a_2 - a_1)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_0)}$...

Un cas très fréquent est celui où les points a_i que l'on cherche à interpoler sont espacés de 1 : $a_i = a_0 + i$. On peut alors expliciter les constantes c_i. On introduit pour cela les différences successives $\Delta^i b_j$ définies par les formules de récurrence $\begin{cases} \Delta^0 b_j = b_j \\ \Delta^i b_j = \Delta^{i-1} b_{j+1} - \Delta^{i-1} b_j \end{cases}$, que l'on peut représenter sous forme d'un "triangle de Pascal" :

$$\begin{array}{ccccccccc} b_0 & & b_1 & & b_2 & & \cdots & & b_n \\ & \Delta^1 b_0 & & \Delta^1 b_1 & & \cdots & & \Delta^1 b_{n-1} & \\ & & \Delta^2 b_0 & & \cdots & & \Delta^2 b_{n-2} & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \Delta^n b_0 & & & & \end{array}.$$

A l'aide du lemme calculatoire $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i b_0 = b_k$, *montrer que dans le cas* $a_i = a_0 + i$, *les constantes* c_i *du polynôme interpolateur de Newton sont données par la formule* $c_i = \frac{\Delta^i b_0}{i!}$ *(diagonale gauche du triangle ci-dessus) et que la solution cherchée prend la forme*

$$P = \sum_{i=0}^{n} \binom{X - a_0}{i} \Delta^i b_0.$$

Solution proposée.

Montrons le lemme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i b_0 &= \Delta^0 b_0 + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1} \right) \Delta^i b_0 = \Delta^0 b_0 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i} \Delta^i b_0 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} \Delta^i b_0 \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \Delta^i b_0 + 0 + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \Delta^{i+1} b_0 = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left(\Delta^i b_0 + \Delta^{i+1} b_0 \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \Delta^i b_1 \\ &= \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \Delta^i b_2 = ... = \sum_{i=0}^{k-k} \binom{k-k}{i} \Delta^i b_k = b_k. \end{aligned}$$

Exprimons maintenant les constantes c_k en fonction des précédentes :

$$b_k = c_0 + c_1 (a_k - a_0) + c_2 (a_k - a_1)(a_k - a_0) + ... + c_k (a_k - a_{k-1}) ... (a_k - a_0) = c_0 + c_1 k + c_2 (k-1) k + ... + c_k 1\, 2 ... k,$$

d'où la relation de récurrence

$$\frac{c_0}{k!} + \frac{c_1}{(k-1)!} + ... + \frac{c_{k-1}}{1!} + \frac{c_k}{0!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{c_i}{(k-i)!} = \frac{b_k}{k!}.$$

Il reste à vérifier que la solution $c'_i = \frac{\Delta^i b_0}{i!}$ proposée par l'énoncé vérifie la même relation :

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{c'_i}{(k-i)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\Delta^i b_0}{(k-i)! i!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i b_0 \overset{\text{lemme}}{=} \frac{b_k}{k!},$$

avec la condition initiale $c'_0 = b_0 = c_0$ comme il faut.

Finalement, le polynôme cherché prend la forme

$$P = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j<i} (X - a_j) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^i b_0}{i!} \prod_{0 \leq j < i} (X - a_0 - j) = \sum_{i=0}^{n} \binom{X - a_0}{i} \Delta^i a_0.$$

10 Un exercice d'interpolation

On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$.

Soit P un polynôme de degré ≤ 998 tel que $P(i)$ vale le i-ième nombre de Fibonacci $F(i)$ pour $1000 \leq i \leq 1998$. Montrer que $P(1999) = F_{1999} - 1$.

Solution proposée.

Le polynôme interpolateur de Newton (voir exercice précédent) va nous être très utile, vu que les différences $\Delta^j b_0$ se calculent très aisément :

$$\begin{array}{ccccccccc}
F_{1000} & & F_{1001} & & F_{1002} & & \cdots & & F_{1998} \\
& F_{999} & & F_{1000} & & \cdots & & F_{1996} & \\
& & F_{998} & & \cdots & & F_{1994} & & \\
& & & \ddots & & & & & \\
& & & & F_2 & & & &
\end{array}.$$

On en déduit $P = \sum_{i=0}^{998} \binom{X-1000}{i} F_{1000-i}$. De la même manière, si l'on introduit le polynôme Q de degré ≤ 999 tel que $Q(i) = F_i$ pour $1000 \leq i \leq 1999$, on obtiendrait

$$Q = \sum_{i=0}^{999} \binom{X-1000}{i} F_{1000-i} = P + \binom{X-1000}{999},$$
$$Q(1999) = P(1999) + 1,$$
$$P(1999) = F_{1999} - 1.$$

Remarque. Le lecteur pourra essayer de résoudre cet exercice à l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange – mais pas trop longtemps...