Idéaux

Marc SAGE

1er juillet 2008
(version chantier)

Table des matières

Le cadre est celui des anneaux commutatifs (unitaires).

1 Généralités sur les idéaux

On rappelle qu'un ***idéal*** d'un anneau A est une partie de A contenant 0 et stable par combinaisons linéaires à coefficients dans A. C'est une notion qui se transporte par isomorphisme, au sens où, étant donné un isomorphisme d'anneaux $A \overset{f}{\simeq} B$, une partie de A est un idéal de A ssi son image par f est un idéal de B.

Un idéal est en particulier un pseudo-anneau pour les loi induites.

On note $(a) := Aa$ l'idéal engendré par un élément $a \in A$. Un tel idéal idéal est dit ***principal*** – on peut le penser comme une « droite » dirigée par a.

De même, on note $(a_1, ..., a_n) := Aa_1 + \cdots + Aa_n$ l'idéal engendré par n éléments $a_1, ..., a_n \in A$ (un tel idéal est dit ***de type fini***) et plus généralement $(a_i) := \sum Aa_i$ l'idéal engendré par une famille (a_i) d'éléments de A et $(X) := \sum_{x \in X} Ax$ l'idéal engendré par une partie $X \subset A$.

On pourra noter abusivement 0 l'***idéal nul*** $(0) = \{0\}$.

1.1 Premières propriétés

1. *Montrer que, pour tout idéal I, on a l'égalité*
$$I = \sum_{i \in I} Ai.$$
2. *Montrer l'égalité* $(1) = A$ (on parle de l'***idéal total*** ou ***idéal plein***) *et plus généralement qu'un idéal vaut tout l'anneau ssi il contient un inversible.*
3. **(idéaux-anneaux)** *Montrer qu'un idéal est un anneau pour les lois induites ssi il est principal et engendré par un idempotent.*
4. *Montrer qu'un anneau est un corps ssi il a exactement deux idéaux.*
5. **(idéaux d'un produit fini)** *Montrer que les idéaux de $A \times B$ sont exactement les produits d'un idéal de A par un idéal de B.*
6. **(principalité de Z)** *Montrer que* $\mathbf{Z}$ *est un anneau* ***principal****, au sens où tous ses idéaux sont principaux.*

Solution proposée.

1. L'inclusion $\subset$ vient de ce que tout $i_0 \in I$ s'écrit $1 \times i_0 + \sum_{i \neq i_0} 0i$, celle $\supset$ que I est stable par combinaisons linéaires.
2. Tout élément de A est multiple de 1 (par lui-même) donc appartient à l'idéal (1), l'inclusion réciproque $(1) \subset A$ étant triviale. De même, si u désigne une unité, alors tout élément $a \in A$ s'écrit $u \times \frac{a}{u}$ et donc appartient à (u). Réciproquement, il est clair que l'idéal total contient une unité (il les contient toutes).
3. Soit i un idempotent. L'idéal (i) est un sous-groupe additif (c'est immédiat) stable par produit (grâce à l'idempotence de i) et possède i pour neutre (pour la même raison). Attention à dire que ce n'est pas un sous-anneau de l'anneau de départ car ils n'ont pas la même unité[1].

   Soit réciproquement I un idéal qui soit un anneau. Notons i son unité et montrons (comme suggéré par ce qui précède) que $I = (i)$. D'une part l'idéal $(i) = iA$ est inclus dans I (car I est stable par $i\cdot$), d'autre part tout élément de I vaut son produit par l'unité i, d'où l'inclusion réciproque $I \subset iA$.
4. Un idéal non nul dans un corps contient un élément non nul, donc contient un inversible et vaut l'idéal total. Soit réciproquement A un anneau ayant exactement deux idéaux. A n'est pas nul (sinon il n'aurait qu'un seul idéal), donc les idéaux (0) et (1) sont distincts, donc sont les deux idéaux de A. Un élément $a \in A$ non nul engendrant un idéal non nul, ce dernier (a) est l'idéal total, donc contient 1, *i. e.* $1 \in Aa$, d'où a inversible.

[1] à moins bien sûr que $i = 1$

5. Il est clair que de tels produits sont des idéaux. Réciproquement, notons I_A et I_B les projections d'un idéal I de $A \times B$ sur A et B respectivement (ce sont des idéaux en vertu de la surjectivité de ces projections). Alors l'injection canonique $I \hookrightarrow I_A \times I_B$ (produit de ces projections) est surjective : pour $(a, b) \in I_A \times I_B$, il y a un $(\alpha, \beta) \in A \times B$ tel que (a, β) et (α, b) sont dans I, donc leur produit par $(0, 1)$ et $(1, 0)$ sont aussi dans I, à savoir $(a, 0)$ et $(0, b)$, donc leur somme (a, b) également, *c. q. f. d.*[2].
6. Soit I un idéal non nul de $\mathbf{Z}$ (l'idéal nul est trivialement principal). S'il devait être principal, alors un générateur serait donné par son plus petit élément ≥ 1. Vérifions cela. Posons $a = \min (I \cap \mathbf{N}^*)$ et montrons $I = (a)$.

   L'inclusion $\supset$ est claire puisque $a \in I$ et que I est stable par homothétie. Soit mainteant $i \in I$. En posant la division euclidienne de i par a, mettons $i = \underbrace{qa}_{\in (a) \subset I} + r$, le reste $r = i - qa$ est une différence d'éléments de I, donc reste dans I puique ce dernier est stable par soustraction ; mais étant par ailleurs dans $\mathbb{N}$ et strictement plus petit que le plus petit élément a de $I \cap \mathbf{N}^*$, il doit être nul. Il s'ensuit $i = qa \in (a)$, *c. q. f. d.*.

EXO : on suppose relation de divisitilibté total. *mq* $\subset$ *total sur idéaux*

supp $I \not\subset J$, soit $i \in I \backslash J$, pour tout $j \in J$ on n'a pas $i \in (j)$, ie $i$ne divisepas$j$, ie $j$divse i, d'où $j \in (i) \subset I$ et $J \subset I$.

1.2 Quotients

L'intérêt des idéaux est d'étudier les quotients de A munis d'une structure d'anneau venant naturellement de celle de A, *i. e.* définie par $\overline{a}\overline{b} + \overline{c} := \overline{ab + c}$ où la barre désigne la classe. Cela revient à dire que la projection canonique est un morphisme d'anneaux.

1. **(idéaux et lois quotients)** *Montrer que ces **lois quotients** sont bien définies ssi la relation par laquelle on quotiente est de la forme $a \equiv b \iff b - a \in I$ pour un certain idéal I.*
   Le quotient $^{A}\!/_{I}$ est alors un anneau pour ces lois, appelé ***anneau quotient***.
2. **(quotients et cardinaux)** *Montrer que toutes les classes sont équipotentes à I. En déduire, lorsque A est fini, l'égalité $\left| ^{A}\!/_{I} \right| = \frac{|A|}{|I|}$.*
3. **(quotients et morphismes)** *Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Soient I un idéal de A et J un idéal de B tels que $f(I) \subset J$. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} ^{A}\!/_{I} & \longrightarrow & ^{B}\!/_{J} \\ \overline{a} & \longmapsto & \widetilde{f(a)} \end{array} \right.$ est bien définie et est un morphisme d'anneaux.*
4. **(quotients et noyaux)** *Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} ^{A}\!/_{\operatorname{Ker} f} & \widetilde{\longrightarrow} & \operatorname{Im} f \\ \overline{a} & \longmapsto & f(a) \end{array} \right.$ est bien définie et est un isomorphisme d'anneaux.*
5. **(quotient d'un produit)**. *Montrer que le quotient d'un produit est le produit des quotients, au sens où l'on a un isomorphisme naturel $\left\{ \begin{array}{ccc} ^{A \times B}\!/_{I \times J} & \widetilde{\longrightarrow} & ^{A}\!/_{I} \times {}^{B}\!/_{J} \\ \widetilde{(a, b)} & \longmapsto & \left(\overline{a}, \widehat{b}\right) \end{array} \right.$.* (penser aux fractions usuelles $\frac{ab}{ij} = \frac{a}{i}\frac{b}{j}$)
6. **(idéaux d'un quotient)** *Soit I un idéal de A. Montrer que les idéaux de l'anneau quotient $^{A}\!/_{I}$ sont les $^{J}\!/_{I}$ où J parcourt les idéaux de A contenant I.*
7. **(quotients de quotients)** *Montrer que l'on a un isomorphisme naturel $\left\{ \begin{array}{ccc} ^{\left(^{A}\!/_{I}\right)}\!/_{\left(^{J}\!/_{I}\right)} & \widetilde{\longrightarrow} & ^{A}\!/_{J} \\ \widetilde{\overline{a}} & \longmapsto & \widehat{a} \end{array} \right.$.*
   (penser aux fractions usuelles $\frac{\frac{a}{i}}{\frac{j}{i}} = \frac{a}{i}\frac{i}{j} = \frac{a}{j}$)
8. **(lemme chinois).** Deux idéaux sont dits ***étrangers***[3] lorsque leur somme fait tout l'anneau. *Étant donnés des idéaux en nombre fini deux à deux étrangers, montrer que la flèche produit des surjections canononiques est surjective de noyau l'intersection de ces idéaux. Réciproque ?*

[2] On prendra garde que le résultat n'est pas vrai pour un produit infini. Ce qui précède montre qu'un tel idéal est compris entre la somme directe de ses projections et leur produit, mais les deux inclusions peuvent être strictes. Considérer par exemple, dans un anneau $\prod_{i \in I} A_i$, des idéaux I_i de chaque A_i et, pour toute partie $J \subset I$ infinie, l'idéal $\bigoplus_{j \in J} I_j \times \prod_{i \notin J} I_i$.

[3] Deux entiers a et b sont ***étrangers*** (ou ***premiers entre eux***) lorsque leur p. g. c. d. vaut 1, autrement dit lorsque la somme des idéaux $(a) + (b)$ vaut l'idéal engendré par 1, à savoir l'anneau tout entier.

Solution proposée.

1. Soit a quelconque dans A, i quelconque dans I. Puisque $\left\{\begin{array}{c} \overline{a+i}=\overline{a} \\ \overline{0}=\overline{i} \end{array}\right.$, on devrait avoir $\overline{(a+i)\times 0}=\overline{a\times i}$, *i.e.* $\overline{ai}=\overline{0}=I$, ou encore $ai\in I$, et de même $ia\in I$. Ceci tenant pour tout i dans I, on doit donc avoir

$$\forall a\in A,\ \left\{\begin{array}{c} aI\subset I \\ Ia\subset I \end{array}\right.\text{, que l'on écrira de manière plus concise }\left\{\begin{array}{c} AI\subset I \\ IA\subset I \end{array}\right..$$

Vérifions maintenant que la condition I idéal bilatère de A suffit à définir une loi multiplicative $\times$ sur ${}^{A}\!/_{I}$ vérifiant $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{a\times b}$. Pour $\left\{\begin{array}{c} a\equiv a' \\ b\equiv b' \end{array}\right.$, *i.e.* $\left\{\begin{array}{c} a'-a=i_a\in I \\ b'-b=i_b\in I \end{array}\right.$, on a

$$\overline{a'b'}=a'b'+I=(a+i_a)(b+i_b)+I=ab+\underbrace{ai_b}_{\in I}+\underbrace{i_ab}_{\in I}+\underbrace{i_ai_b}_{\in I}+I=ab+I=\overline{ab},\ c.\ q.\ f.\ d..$$

Il reste enfin à montrer la distributivité de $\times$ sur $+$ dans le quotient, mais ceci est immédiat en passant tout sous la barre et en utilisant les propriétés de $\times$ de l'anneau de départ :

$$\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\times\left(\overline{b+c}\right)=\overline{a\times(b+c)}=\overline{a\times b+a\times c}=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}.$$

2. Toutes les classes sont des translatées de I ; or les translations d'un groupe (ici $(A,+)$) sont bijectives, ce qui conclut. Puisque A est la réunion de $\left|{}^{A}\!/_{I}\right|$ classes $a+I$ chacune de cardinal I, on a les égalités suivantes lorsque A est fini :

$$|A|=\sum_{C\in\ {}^{A}\!/_{I}}|C|=\sum_{C\in\ {}^{A}\!/_{I}}|I|=|I|\sum_{C\in\ {}^{A}\!/_{I}}1=|I|\left|{}^{A}\!/_{I}\right|,\ c.\ q.\ f.\ d..$$

3. Notons $\overline{f}$ l'application considérée. Pour montrer que $\overline{f}$ est bien définie, il s'agit de montrer que deux éléments de A différant d'un élément de I ont des images différant d'un élément de J. Soit donc $(a,\alpha,i)\in A^2\times I$ tel que $a-\alpha=i$. Alors $f(a)-f(\alpha)=f(a-\alpha)=f(i)\in f(I)\subset J$, *c. q. f. d.*.Il est alors immédiat que $\overline{f}$ est un morphisme d'anneaux en écrivant (pour tous $a,b,c\in A$)

$$\overline{f}\left(\overline{1}+\overline{a}+\overline{b}\overline{c}\right)=\overline{f}\left(\overline{1+a+bc}\right)=\widetilde{f(1+a+bc)}=\widetilde{f(1)+f(a)+f(b)f(c)}=\widetilde{f(1)}+\widetilde{f(a)}+\widetilde{f(b)}\widetilde{f(c)}=\widetilde{1}+\overline{f}(\overline{a})+\overline{f}\left(\overline{b}\right)\overline{f}\left(\overline{c}\right.$$

4. On appliquer le point 3 à l'anneau $B:=\operatorname{Im}f$ et aux idéaux $I:=\operatorname{Ker}f$ et $J:=\{0\}$. Les hypothèses ci-dessus étant vérifiées, la surjection $\left\{\begin{array}{ccc} A & \twoheadrightarrow & \operatorname{Im}f \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array}\right.$ induit une morphisme surjectif $\left\{\begin{array}{ccc} {}^{A}\!/_{\operatorname{Ker}f} & \twoheadrightarrow & {}^{\operatorname{Im}f}\!/_{\{0\}} \\ \overline{a} & \longmapsto & \widetilde{f(a)} \end{array}\right.$.

Composé avec l'isomorphisme évident $\left\{\begin{array}{ccc} {}^{\operatorname{Im}f}\!/_{\{0\}} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Im}f \\ \widetilde{b}=\{b\} & \longmapsto & b \end{array}\right.$, on obtient un morphisme surjectif φ : $\left\{\begin{array}{ccc} {}^{A}\!/_{\operatorname{Ker}f} & \twoheadrightarrow & \operatorname{Im}f \\ \overline{a} & \longmapsto & f(a) \end{array}\right.$ dont l'injectivité découle des implications (à $a\in A$ fixé) $\varphi(\overline{a})=0\Longrightarrow f(a)=0\Longrightarrow a\in\operatorname{Ker}f\Longrightarrow\overline{a}=\overline{0}$.

5. Pour $I\times J$ idéal de $A\times B$, le produit des réductions modulo I et J est une surjection $A\times B\twoheadrightarrow{}^{A}\!/_{I}\times{}^{B}\!/_{J}$ de noyau $I\times J$.

6. Soit J un idéal de A contenant I. D'une part, ${}^{J}\!/_{I}$ contient le neutre additif ${}^{I}\!/_{I}$ de ${}^{A}\!/_{I}$, d'autre part, pour $j,k\in J$ et $a\in A$, on a

$$\overline{j}+a\overline{k}=\overline{j+ak}\in{}^{J}\!/_{I}\text{ car }J\text{ idéal,}$$

d'où l'idéalité de ${}^{J}\!/_{I}$.

Réciproquement, on rappelle que toute partie $\mathcal{P}\subset{}^{A}\!/_{I}$ s'écrit $\mathcal{P}={}^{\cup\mathcal{P}}\!/_{I}$. Ainsi, pour $\mathcal{J}$ idéal de ${}^{A}\!/_{I}$, il suffit de montrer que $J:=\cup\mathcal{J}$ est un idéal de A. D'une part, $\mathcal{J}$ contient l'idéal nul, donc J contient 0. D'autre part, pour $j,k\in J$ et $a\in A$, il y a des $\overline{u},\overline{v}\in J$ tels que $\left\{\begin{array}{c} j\in\overline{u} \\ k\in\overline{v} \end{array}\right.$, d'où $j+ak\in\overline{u}+a\overline{v}\in\mathcal{J}$ par idéalité de ce dernier, d'où $j+ak\in J$, ce qui conclut.

7. Puisque $I\subset J$, la projection modulo J passe au quotient par I, d'où une surjection $\left\{\begin{array}{ccc} {}^{A}\!/_{I} & \twoheadrightarrow & {}^{A}\!/_{J} \\ \overline{a} & \longmapsto & \widehat{a} \end{array}\right.$ de noyau ${}^{J}\!/_{I}$ vu les équivalences $\widehat{a}=0\Longleftrightarrow a\in J\Longleftrightarrow\overline{a}\in\overline{J}={}^{J}\!/_{I}$.

8. Remarquer que le lemme chinois devient tautologique pour *un seul* idéal.

Regardons le cas de deux idéaux I et J étrangers. Soit $(i,j) \in I \times J$ tel que $1 = i + j$. On observe que, par la flèche $A \longrightarrow {}^{A}\!/_{I} \times {}^{A}\!/_{J}$, l'élément i est envoyé sur $\left(\overline{i}, \widehat{1-j}\right) = \left(\overline{0}, \widehat{1}\right)$ et que j est envoyé sur $\left(\overline{1-i}, \widehat{j}\right) = \left(\overline{1}, \widehat{0}\right)$, ce qui montre qu'un élément $\left(\overline{a}, \widehat{b}\right)$ est l'image de $aj + bi$.

Concluons par récurrence. Soit $n \geq 2$ un entier vérifiant le résultat pour n idéaux quelconques. Soient $I_0, I_1, ..., I_n$ des idéaux deux à deux étrangers. L'hypothèse de récurrence appliquée à $I_1, ..., I_n$ nous donne un isomorphisme ${}^{A}\!/_{I_1 \cap \cdots \cap I_n} \cong {}^{A}\!/_{I_1} \times \cdots \times {}^{A}\!/_{I_n}$. Par ailleurs, si l'on montrait l'extranéité des idéaux I_0 et $I_1 \cap \cdots \cap I_n$, on aurait un isomorphisme

$$ {}^{A}\!/_{I_0 \cap I(_1 \cap \cdots \cap I_n)} \cong {}^{A}\!/_{I_0} \times {}^{A}\!/_{I_1 \cap \cdots \cap I_n} \underset{\text{précédent}}{\overset{\text{isomorphisme}}{\cong}} {}^{A}\!/_{I_0} \times \left({}^{A}\!/_{I_1} \times \cdots \times {}^{A}\!/_{I_n}\right), \text{ ce qui conclurait} $$

(bien vérifier que la composée ci-dessus agit comme le produit des $A \twoheadrightarrow {}^{A}\!/_{I_k}$). Soit $(a_k, i_k) \in I \times I_k$ tel que $a_k + i_k = 1$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Développer le produit $\prod (a_k + i_k)$ donne un terme $i_1 \cdots i_n \in I_1 \cap \cdots \cap I_n$ plus une somme de termes restant chacun dans I (puisque contenant un facteur $a_k \in I$), ce qui montre l'appartenance $1 = \prod (a_k + i_k) \in I + I_1 \cap \cdots \cap I_n$ et conclut la récurrence.

Montrons la réciproque par récurrence. (Le cas d'un seul idéal est tautologique.) Soient $I_1, ..., I_n$ des idéaux tels que la flèche $A \twoheadrightarrow \prod_{k=1}^{n} {}^{A}\!/_{I_k}$ soit surjective. On en déduit (en oubliant $n-2$ coordonnées) la surjectivité de n'importe quel flèche $A \twoheadrightarrow {}^{A}\!/_{I_k} \times {}^{A}\!/_{I_\ell}$, ce qui nous ramène au cas de deux idéaux. Soient donc I et J deux idéaux tels que la flèche $A \twoheadrightarrow {}^{A}\!/_{I} \times {}^{A}\!/_{J}$ soit surjective. Soit i un antécédent de $\left(\overline{0}, \widehat{1}\right)$ et posons $j := 1 - i$. L'abscisse montre que i est nul modulo I et l'ordonnée que j est nul modulo J, d'où l'appartenance $1 = i + j \in I + J$ et l'égalité $A = I + J$.

2 Idéaux radicaux & anneaux réduits

Un élément est dit ***nilpotent*** si l'une de ses puissances ≥ 1 est nulle. Un anneau est dit ***réduit*** lorsque son seul nilpotent est zéro.

2.1 Sur les racines

Définition.
On appelle radical *ou* racine *d'une partie P d'un anneau A l'ensemble de toutes les racines n-ièmes des éléments P pour n décrivant $\mathbb{N}^*$. On le note* $\operatorname{Rad} P$ *ou*

$$ \sqrt{P} := \{a \in A \ ; \ \exists n \geq 1, \ a^n \in P\}. $$

On dira qu'une partie P est radicale *ou* radicielle *si elle est égale à sa racine, i. e. si*

$$ P = \sqrt{P}, $$

1. **(définition par le quotient).** *Mq I radical <=> quotient A/Iréduit*
2. **(radicalité de l'idéal nul).** *Mq* 0 *raical ssi A réduit*
3. **(idéaux radicaux du'un quotient)** mq idéaux radicaux de A/I sont les $\mathfrak{r}/I$
4. **(croissance de $\sqrt{\cdot}$)***mq $\sqrt{\cdot}$ croît.*
5. *mq radical = stable par passage aux racines.*
6. **(définition plus simple)** *Mq idéal radicla <=> stable par racine carré.*
7. **($\sqrt{\cdot}$ et $\cap$ commutent)** *Soit $I_1, ..., I_k$ des idéaux de A. Alors*

$$ \sqrt{I_1}\sqrt{I_2} \cdots \sqrt{I_k} \subset \sqrt{I_1 I_2 \cdots I_k} = \sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_k} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} \cap \cdots \cap \sqrt{I_k}. $$

   Donner un exemple d'inclusion stricte.
8. **(l. c. i. $\cap$ sur les radicaux)***montrer qu'uintersection* finie *d'idéaux radicaux est un idéal radical.*

9. **(tous radicaux)** *mq tout idéal est radical ssi tout élément est multiple de son carré,* (cas particulier : le cadre est un sous-anneau d'un produit de corps)
10. **(exo linéaire)** *trouver les sous-algèbres de M_n stable par racine*

Démonstration.

1. La radicalité de I s'écrit $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall a \in A,\ a^n \in I \Longrightarrow a \in I$; or l'implication se réécrit $\overline{a^n} = \overline{0} \Longrightarrow \overline{a} = \overline{0}$, ou encore $\overline{a}^n = \overline{0} \Longrightarrow \overline{a} = \overline{0}$.
2. Appliquer le point précédent lorsque $I = \{0\}$ et se souvenir que ${}^{A}\diagup_{0}$ est isomorphe à A.
3. Soit ${}^{J}\diagup_{I}$ un idéal de ${}^{A}\diagup_{I}$ (une proposition précédente nous dit qu'il est de cette forme) : on a les équivalences

$$ {}^{J}\diagup_{I} \text{ est radical} \Longleftrightarrow \text{l'anneau } {}^{\left({}^{A}\diagup_{I}\right)}\diagup_{\left({}^{J}\diagup_{I}\right)} \text{ est réduit} \Longleftrightarrow {}^{A}\diagup_{J} \text{ est réduit} \Longleftrightarrow J \text{ est radical.} $$

4. Soient P et Q deux parties telles que $P \subset Q$. Soit $a \in \sqrt{P}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $a^n \in P$. Alors $a^n \in Q$, d'où $a \in \sqrt{Q}$.
5. les éément de P sont des racines ($n = 1$) de P, donc P stable par racine $<=>$ P contient toutes ses racines $<=>$ P =ensembles des racines de P $<=>$ $P = \sqrt{P}$$<=>$$P$radical
6. Le sens $\Longrightarrow$ est trivial. Supposons réciproquement I stable par racine carrée. Soient $a \in A$ et $n \in \mathbf{N}^*$ tels que $a^n \in I$. Alors $a^{2^n} = a^n a^{2^n - n} \in I$, d'où par récurrence (sur la puissance de 2) l'appartenance $a \in I$.
7. Il suffit de le montrer pour $k = 2$. Soient donc I et J deux idéaux de A. On montre les trois inclusions

$$ \sqrt{I}\sqrt{J} \subset \sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subset \sqrt{IJ} \subset \sqrt{I \cap J}. $$

La deuxième inclusion découle de la croissance de $\sqrt{\cdot}$ et de ce que l'inersection $I \cap J$ est incluse d'une part dans I (d'où $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I}$) d'autre part dans J (d'où $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{J}$).

De même, le produit IJ reste d'une part inclus dans I (car ce dernier est un idéal) et d'autre part inclus dans J, d'où l'inclusion $IJ \subset I \cap J$. La croissance de $\sqrt{\cdot}$ fournit alors la quatrième inclusion.

Prenons un $a \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. On a deux entiers $n, m \geq 1$ tels que $\begin{cases} a^n \in I \\ a^m \in J \end{cases}$, d'où $a^{n+m} = a^n a^m \in IJ$ et la conclusion $a \in \sqrt{IJ}$.

Soit enfin un produit ab où $a \in \sqrt{I}$ et $b \in \sqrt{J}$, disons $a^p \in I$ et $b^q \in J$. Alors $(ab)^{p+q} = a^p \left(a^q b^{p+q}\right) = b^q \left(b^p a^{p+q}\right) \in I \cap J$, donc $ab \in \sqrt{I \cap J}$: sommer de tels produits montre que $\sqrt{I}\sqrt{J} \subset \sqrt{I \cap J}$, d'où la première inclusion.

Contre exemple : $A = \mathbf{Z}$ et $I = (2)$. Alors $I^2 = (4)$ et $\sqrt{I^2} = (2)$ et $\sqrt{I} = (2) = I$, d'où $\sqrt{I}\sqrt{I} = (2)(2) = (4) \neq (2) = \sqrt{II}$. (en effet, puisque 2 est premier, on a les équiavelences $\sqrt{I} = (2)\, a \in \sqrt{I} \Longleftrightarrow \exists k \geq 1, a^k \in (2) \Longleftrightarrow \exists k \geq 1, 2 \mid a^k \Longleftrightarrow 2 \mid a \Longleftrightarrow a \in I$).
8. immédait
9. Supposons tout idéal radical.Soit $a \in A$. Alors l'idéal $\left(a^2\right)$ est radical et contient a^2, donc a reste dans $\left(a^2\right)$, donc est multiple de son carré

Supposons tout élément multiple de son carré. Montrons que I est radical. Soit $a \in A$ tel que $a^2 \in I$. Soit $\lambda \in A$ tel que $a = \lambda a^2$. On a tout de suite $a \in I$.

Sont de tels anneaux les corps, les produits de corps, les sous-anneaux d'un produit de corps.
10. Vu les implications $i \neq j \implies E_{i,j}^2 = 0$ pour tous entiers $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, un idéal radical doit contenir tous les $E_{i,j}$ pour $i \neq j$, donc leur produit $E_{i,j}E_{j,i} = E_{i,i}$, donc contient une base des matrices, donc vaut tout $M_n(\mathbf{K})$

Par la suite, la lettre $\mathfrak{r}$ désignera systématiquement un idéal *radical*.

2.2 Description externe de la racine

Pour « radicaliser » un idéal, on doit lui rajouter les racines manquantes. La proposition suivante montre que cela suffit, fournissant ainsi une description *interne* de $\sqrt{I}$. L'autre expression, rétrécissant les idéaux radicaux depuis l'idéal total A, donne par ailleurs une description *externe*.

Propriété. (description externe)
Soit I un idéal de A. Montrer que $\sqrt{I}$ *est le plus petit idéal radical contenant I, i. e.*

$$I \subset \sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}} = \bigcap_{\mathfrak{r} \supset I} \mathfrak{r}.$$

Démonstration.
$\sqrt{I}$ contient les racines unièmes des éléments de I, donc contient I.

Montrons que $\sqrt{I}$ est un idéal. Déjà $\sqrt{I}$ contient $0 \in I$. Soient ensuite $x, y \in \sqrt{I}$. Soient $p, q \in \mathbf{N}^*$ tels que $x^p, y^q \in I$. On a donc

$$\begin{aligned} (x+y)^{p+q-1} &= \sum_{i+j=p+q-1} \binom{p+q-1}{i} x^i y^j \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+q-1}{i} x^i y^{p+q-1-i} + \sum_{j=0}^{q-1} \binom{p+q-1}{j} x^{p+q-1-j} y^j \\ &= \left[\sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+q-1}{i} x^i y^{p-1-i}\right] \underbrace{y^q}_{\in I} + \left[\sum_{j=0}^{q-1} \binom{p+q-1}{j} x^{q-1-j} y^j\right] \underbrace{x^p}_{\in I} \\ &\in I, \text{ d'où } x+y \in \sqrt{I}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $a \in A$ on a $(ax)^p = (a^p)\, x^p \in I$, d'où $ax \in \sqrt{I}$.

Montrons que $\sqrt{I}$ est radical. On a déjà l'inclusion $\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$ d'après ce qui précède. Soit réciproquement $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^p \in \sqrt{I}$. Soit $q \in \mathbf{N}^*$ tel que $(x^p)^q \in I$. Alors $x^{pq} \in I$, donc $x \in \sqrt{I}$, d'où l'inclusion réciproque.

Soit enfin $\mathfrak{r}$ un autre idéal radical qui contient I. Montrons $\sqrt{I} \subset \mathfrak{r}$. Soit $x \in \sqrt{I}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^n \in I$. Puisque $I \subset \mathfrak{r}$, on obtient $x \in \sqrt{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}$

3 Idéaux premiers & anneaux intègres

Un anneau est dit ***intègre*** s'il est non nul et sans diviseur de 0, cette seconde condition s'énonçant aussi « un produit (fini) est nul ssi l'un des facteurs est nul ». En d'autre termes, un anneau est intègre ssi les simplifiables sont exactement les non nuls. Par exemple, un corps est intègre[4] et un anneau intègre est réduit.

3.1 Premières propriétés

On rappelle qu'un entier naturel $p \geq 1$ est premier ssi

$$p \neq 1 \text{ et } [p \mid ab \iff (p \mid a \text{ ou } p \mid b)],$$

ce qui se récrit en termes d'idéaux

$$(p) \neq \mathbb{Z} \text{ et } [ab \in (p) \iff (a \in (p) \text{ ou } b \in (p))].$$

[4] L'intégrité est donc une condition nécessaire pour être réalisé comme sous-anneau (non nul) d'un corps. Réciproquement, tout anneau intègre A se plonge dans son ***corps des fractions*** $\operatorname{Frac} A$ défini par le quotient de $A \times A \backslash \{0\}$ par la relation $(a,b) \equiv (a',b') \iff ab' = a'b$ (on représente une fraction $\frac{a}{b}$ par un couple (a,b) modulo l'égalité de deux fractions $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$). Les éléments de $\operatorname{Frac} A$ sont notés $\frac{a}{b}$ au lieu de $\overline{(a,b)}$ avec les lois usuelles des fractions.

Par analogie avec cette situation, on appellera ***idéal premier*** d'un anneau A tout idéal $\mathfrak{p}$ *strict* de A tel que

$$\forall a, b \in A,\ (ab \in \mathfrak{p} \iff a \in \mathfrak{p} \text{ ou } b \in \mathfrak{p}).$$

C'est une notion qui passe à l'isomorphisme.

1. **(définition par le quotient)** *Montrer qu'un idéal* $\mathfrak{p}$ *est premier ssi le quotient* ${}^{A}\!/_{\mathfrak{p}}$ *est intègre*
2. **(primalité de l'idéal nul)** *Montrer l'idéal nul est premier ssi l'anneau est intègre.*
3. **(idéaux premiers d'un quotient)** *Soit* I *un idéal de* A. *Montrer que les idéaux premiers de* ${}^{A}\!/_{I}$ *sont les quotients* ${}^{\mathfrak{p}}\!/_{I}$ *où* $\mathfrak{p}$ *parcourt les idéaux premiers de* A *contenant* I.
4. **(premier = radical + ?)** *Montrer qu'un idéal premier est radical.*
5. **(primalité version idéaux)** *Montrer qu'un idéal* $\mathfrak{p}$ *est premier ssi, lorsqu'il contient un produit fini d'idéaux, il contient l'un d'entre eux.*[5]
6. **(pas premier)** *Montrer qu'un idéal n'est* pas *premier ssi il est strictement inclus dans deux idéaux dont il contient le produit.*
7. **(intégrité d'un produit)**. *Montrer qu'un produit d'anneaux* $A \times B$ *est intègre ssi l'un est intègre et l'autre nul.*
8. **(tous premiers)** *Montre qu'un anneau est corps ssi tous ses idéaux (stricts) sont premiers.*
9. **(premiers de Z)** *Montrer que les idéaux premiers de* $\mathbf{Z}$ *sont : d'une part l'idéal nul, d'autre part les idéaux principaux engendrés par les (nombres) premiers*[6].

Solution proposée.

1. D'une part l'inclusion stricte $\mathfrak{p} \subsetneq A$ équivaut à la non-nullité du quotient, d'autre part la seconde condition se traduit en termes d'égalité modulo $\mathfrak{p}$ en $\left(\overline{a}\overline{b} = 0 \iff \overline{a} = 0 \text{ ou } \overline{b} = 0\right)$.
2. Appliquer à l'anneau $A \cong {}^{A}\!/_{(0)}$.
3. Soit ${}^{J}\!/_{I}$ un idéal de ${}^{A}\!/_{I}$ (une proposition précédente nous dit qu'il est de cette forme). On a alors les équivalences

$$ {}^{J}\!/_{I} \text{ premier} \iff {}^{\left({}^{A}\!/_{I}\right)}\!/_{\left({}^{J}\!/_{I}\right)} \text{ intègre} \iff {}^{A}\!/_{J} \text{ intègre} \iff J \text{ premier.}$$

4. Un anneau intègre étant réduit, le résultat est immédiat :

$$\mathfrak{p} \text{ premier} \iff {}^{A}\!/_{\mathfrak{p}} \text{ intègre} \implies {}^{A}\!/_{\mathfrak{p}} \text{ réduit} \iff \mathfrak{p} \text{ radical.}$$

5. Supposons $\mathfrak{p}$ premier contenant un produit fini d'idéaux. Quitte à récurrer sur le nombre d'idéaux, on peut prendre ce nombre égal à 2, mettons $IJ \subset \mathfrak{p}$. Supposons alors $I \not\subset \mathfrak{p}$ et montrons $J \subset \mathfrak{p}$. Il y a un élement $i \in I \backslash \mathfrak{p}$: alors, pour tout $j \in J$, le produit ij est dans $IJ \subset \mathfrak{p}$, d'où par primalité $i \in \mathfrak{p}$ (exclu) ou $j \in \mathfrak{p}$; ceci tenant pour tout $j \in J$, on a terminé.

   Soit $\mathfrak{p}$ comme dans l'énoncé. Considérons un produit $ab \in \mathfrak{p}$. Alors le produit d'idéaux principaux $(a)(b) = (ab)$ est inclus dans $\mathfrak{p}$ (car $\mathfrak{p}$ idéal), donc par évitement $\mathfrak{p}$ contient (a) (donc a) ou (b) (donc b), ce qui montre sa primalité.
6. Soit I idéal non premier : il y a donc deux éléments a et b hors de I dont le produit est dans I. Pour créer un idéal strictement plus grand que I, on peut ajouter à ce dernier un autre idéal $\not\subset I$, par exemple un idéal principal engendré par un élément $\notin I$. Dans notre cas, on doit essayer $I + (a)$ et $I + (b)$. Leur produit a tous ses éléments de la forme

$$(i + \lambda a)(i' + \mu b) = \underbrace{i(i' + \lambda a)}_{\in I \text{ car } i \in I} + \underbrace{\lambda a i'}_{\in I \text{ car } i' \in I} + \underbrace{\lambda \mu ab}_{\in I \text{ car } ab \in I} \in I + I + I = I, \text{ ce qui conclut.}$$

7. Si le produit est intègre, vu la nullité du produit $(1,0)(0,1)$, l'un des deux facteurs doit être nul. Alors le facteur restant, disons A, est isomorphe au produit $A \times 0 \cong A \times B$ qui est intègre. La réciproque est claire : l'intégrité de A équivaut à (donc implique) celle de $A \times 0$.

[5] c'est remplacer dans la définition les nombres a et b par les nombres idéaux (a) et (b) et plus généralement par d'autres idéaux

[6] On montrerait plus généralement que les idéaux premiers d'un anneau ***factoriel*** (comme $\mathbf{Z}$ ou $k[X]$) sont d'une part l'idéal nul d'autre part les idéaux principaux engendrés par les irréductibles.

8. Un corps a un seul idéal strict, (0), qui est premier car tout corps est intègre. Soit réciproquement A un anneau comme dans l'énoncé. Déjà, A est intègre car (0) est premier. Ensuite, pour a non nul, le produit $a \times a$ est dans l'idéal $\left(a^2\right)$, d'où (par primalité) $a \in \left(a^2\right)$, d'où (par intégrité) $1 \in (a)$, ce qui traduit l'inversibilité de a.

9. L'idéal nul est bien premier puisque $\mathbf{Z}$ est intègre.

   Soit p un nombre premier. Alors l'idéal (p) n'est pas total car p est différent de ± 1. Ensuite, la seconde condition se réécrit en termes de divisibilité $[p \mid ab \iff (p \mid a \text{ ou } p \mid a)]$, ce qui est juste.

   Soit réciproquement $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul. Puisque $\mathbf{Z}$ est principal, on peut écrire $\mathfrak{p} = (a)$ pour un certain entier $a > 0$. Puisque $\mathfrak{p}$ est un idéal strict, l'entier a n'est pas 1. Si a n'était pas premier, il pourrait s'écrire $a = bc$ pour certains entiers $1 < b, c < a$; mais alors le produit bc appartiendrait à l'idéal $\mathfrak{p}$, donc b ou c y serait par primalité de $\mathfrak{p}$, disons $b \in \mathfrak{p} = (a)$, d'où un entier n tel que $b = na$, divisibilité qui contredirait l'encadrement $1 < b < a$.

Par la suite, la lettre gothique $\mathfrak{p}$ (accompagnée parfois de la lettre $\mathfrak{q}$) désignera systématiquement un idéal *premier*.

3.2 premiers & radicaux, nilpotents

On peut raffiner la description de la racine d'un idéal $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{r} \supset I} \mathfrak{r}$.

(description externe de $\sqrt{I}$) *Montrer que la racine $\sqrt{I}$ d'un idéal I* est *l'infimum de tous les idéaux* premiers *contenant I :*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I} \mathfrak{p}.$$

Solution proposée.

On a déjà $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{r} \supset I} \mathfrak{r} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I} \mathfrak{p}$ car tout idéal premier est radical.

D'autre part, soit $x \notin \sqrt{I}$. On va exhiber un idéal premier $\mathfrak{p}$ contenant I et pas x.

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des idéaux contenant I et ne contenant aucune puissance $x^{n \geq 1}$, ordonné par l'inclusion. $\mathcal{I}$ est non vide car il contient I et est faiblement inductif car toute chaîne $(I_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de $\mathcal{I}$ admet un supremum $\bigcup_\Omega I_\omega$ dans $\mathcal{I}$. Ce dernier admet donc un élément maximal $\mathfrak{p}$. Montrons que $\mathfrak{p}$ est premier.

Si ce n'est pas le cas, on peut trouver $a, b \notin \mathfrak{p}$ tels que $ab \in \mathfrak{p}$. Alors l'idéal $\mathfrak{p} + (a)$ contenant I est strictement plus grand que $\mathfrak{p}$, donc n'est pas dans $\mathcal{I}$, *i. e.* contient une puissance x^n, d'où un $j \in \mathfrak{p}$ et un $\lambda \in A$ tels que $x^n = j + \lambda a$. De même, on aurait une puissance $x^m = i + \mu b$ pour un $i \in \mathfrak{p}$ et $\mu \in A$. On en déduirait

$$x^{n+m} = \underbrace{ij + i\lambda a + j\mu b}_{\in \mathfrak{p}} + \underbrace{ab}_{\in \mathfrak{p}} \lambda\mu \in \mathfrak{p}, \textit{ absurde.}$$

On a donc montré que si $x \in A$, on a

$$x \notin \sqrt{I} \implies \exists \mathfrak{p} \supset I, \ x \notin \mathfrak{p},$$

i. e. (par contraposée)

$$\forall \mathfrak{p} \supset I, \ \left(x \in \mathfrak{p} \implies x \in \sqrt{I}\right),$$

ou encore

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \supset I} \mathfrak{p} \subset \sqrt{I}.$$

Définition. *On appelle* nilradical *d'un anneau A la racine de l'idéal nul,* i. e. *l'ensemble de ses éléments nilpotents. On le note*

$$\operatorname{Nilrad} A := \operatorname{Rad} 0 = \sqrt{0} = \{a \in A \ ; \ \exists n \in \mathbf{N}^*, \ a^n = 0\}.$$

Propriétés.

1. *Pour tuer les nilpotents, on quotiente par $\sqrt{0}$:*

$$\operatorname{Nilrad}\left({}^{A}\!\diagup_{\sqrt{0}}\right) = 0.$$

2. **(description externe)** *Le nilradical d'un anneau est l'infimum de ses idéaux premiers, i. e.*

$$\operatorname{Nilrad} A = \bigcap \mathfrak{p}.$$

3. **(application aux polynômes)** *Les inversibles de l'anneau de polynômes* $A[X]$ *sont les polynômes de terme constant inversible et dont les autres coefficients sont nilpotents :*

$$A[X]^{\times} = A^{\times} + X\sqrt{0}\,[X]$$

Solution proposée.

1. Soit $\overline{a}$ nilpotent du quotient ${}^{A}\!/_{\sqrt{0}}$. Il y a donc un entier $n \geq 1$ tel que $\overline{a}^n = 0$ modulo $\sqrt{0}$, ce qui s'écrit $a^n \in \sqrt{0}$, d'où un (autre) entier m tel que $(a^n)^m = 0$, de sorte que a est nilpotent et sa classe $\overline{a}$ nulle (modulo $\sqrt{0}$).
2. D'après les propositions précédentes, on a

$$\operatorname{Nilrad} A = \sqrt{0} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset \{0\}} \mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{p}.$$

3. Lorsque A est intègre, on retrouve le classique $A[X]^{\times} = A^{\times}$ en regardant le coefficient dominant d'une égalité $PQ = 1$. Pour se ramener à ce cas, on va quotienter par un idéal premier $\mathfrak{p}$.

   Soit donc dans le cas général une égalité $PQ = 1$ dans $A[X]$. On la réduit modulo $\mathfrak{p}$, d'où $\overline{P}$ inversible dans ${}^{A}\!/_{\mathfrak{p}}[X]$, d'où (par intégrité de ${}^{A}\!/_{\mathfrak{p}}$) $\overline{P}$ constant, *i. e.* P constant modulo $\mathfrak{p}$, donc tous les coefficients non constants de P sont dans $\mathfrak{p}$; ceci tenant pour tout $\mathfrak{p}$, ces coefficients sont dans $\bigcap \mathfrak{p}$, donc nilpotents. Par ailleurs, prendre les termes constants dans $PQ = 1$ montre que celui de P est inversible.

   Réciproquement, considérant un $P = i + \sum_{k\geq 1} n_k X^k$ avec i inversible et n_k nilpotent, on peut l'écrire $i\left(1 + \sum_{k\geq 1} \frac{n_k}{i} X^k\right)$ où la somme à l'intérieur est nilpotente car les n_k (en nombre fini) le sont (élever à une puissance plus grande que la somme des indices de nilpotence des n_k).

3.3 idéaux irréductibles, indécomposables

Définition.
Un idéal est dit ***irréductible*** *lorsqu'il n'est pas intersection de deux idéaux strictement plus grands.*

Un idéal est dit ***décomposable*** *s'il est isomorphe (comme pseudo-anneau) au produit de deux idéaux non nuls,* ***indécomposable*** *sinon.*

Proposition (irréd en terme de quotient). *I irred <=> les idéaux de ${}^{A}/_{I}$ sont indécomposables.*

=> suppos $J/I = \mathcal{K} \times \mathcal{L}$ En tirant en arrière, on réalise $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ dans J/I comme idéaux K/I et L/I non nuls (donc K et L sont stricts). Alors un élément de $K \cap L$ a pour image un truc de coordonnée nuls, donc est nul modulo I, d'im l'égalité $K \cap L = I$ et I est réductible.

<= Supposons $I = K \cap L$. Posons $J := K + L$ et mq $J/I = K/I \times L/I$. La flèche <<— est définie par la somme. C'est un morphisme pour + (clair) et pour $\times$ (car $KL \subset K \cap L = I$). Un élément $(\overline{a}, \overline{b})$ dans le noyau vérifie $a = b + i \in L + K \cap L \subset L$, donc $a \in K \cap L = I$ et $\overline{a} = 0$ (pareil pour b)

rq : premier <=> si $p \supset IJ$, alosr $p \supset I$ ou $p \supset J$. OR on a tjs $IJ \subset I \cap J$: en fait pour la primalité on peut remplacer $\cap$ par $\times$.

Proposition (premier = semi-premier + ?). *un idéal est premier ssi il est radical et irréductible.*

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier. Puisque le quotient ${}^{A}\!/_{\mathfrak{p}}$ est intègre, il est réduit, donc $\mathfrak{p}$ est radical. Soit à présent I et J deux idéaux tels que $\mathfrak{p} = I \cap J$. Puisque $I \cap J \supset IJ$, un point précédent entraine $\mathfrak{p} \supset I$ ou $\mathfrak{p} \supset J$ mais alors les inclusions $\mathfrak{p} = I \cap J \subset I$ (idem pour J) entraînent l'une des égalités.

Soit $\mathfrak{r}$ un idéal radical non premier. Montrons qu'il est décomposable. D'après un point précédent, il y a deux idéaux I et J contenant strictement $\mathfrak{r}$ tels que $IJ \subset \mathfrak{r} \subset I \cap J$. Prendre la racine donne $\sqrt{IJ} \subset \sqrt{\mathfrak{r}} \subset \sqrt{I \cap J}$, d'où l'égalité $\mathfrak{r} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$, ce qui conclut vu la stricte inclusion $\mathfrak{r} \subsetneq I \subset \sqrt{I}$ (idem pour J).

Corollaire (les obstctions à l'intégrité sont la nilpotence et la décomposabilité). *un anneau est intègre ssi il est réduit et si tous ses idéaux sont indécomposables*

=> trivial

<= Soit A réduit. Mq (0) irréd (étant réduit, il sera alors premier). Supposons $0 = I \cap J$ avec I et J non nuls. On a $I \not\subset J$ (sinon $I = I \cap J = 0$) d'où un $i \in I \setminus J$ et demême un $j \in J \setminus I$. Alors le produit ij est nul (il tombe dans $I \cap J$) donc la somme $(i) + (j)$ est directe (si $\lambda i = \mu j$, on obtient $\lambda i^2 = 0$, d'om $(\lambda i)^2 = 0$ et $\lambda i = 0$ par rédcution), ie l'idéal $(i) + (j)$ ets décomposable en $(i) \times (j)$, impossoble par hypothèse (i et j sont non nuls).

Sanity check. I premier <=> A/I intrèggr <=>A/I réduit sans idéal décomposable <=> I radical et I irred

C'EST UNE PREUVE DIRECTE!!!!! A intègre <=> (0) premier <=> (0) radical et irred <=> $A/(0)$ réduit et sans idéal décomposables

4 Idéaux maximaux et corps

Un *idéal maximal* est un idéal strict maximal pour l'inclusion.

Par la suite, la lettre $\mathfrak{m}$ désignera systématiquement un idéal *maximal*.

4.1 Premièes propriétés

1. **(définition par le quotient)** *On montre qu'un idéal $\mathfrak{m}$ est maximal ssi le quotient $A/\mathfrak{m}$ est un corps.*
2. **(maximalité de l'idéal nul)** *l'idéal nul est maximal ssi l'anneau est un corps.*
3. **(idéaux maximaux d'un quotient)** *Soit I idéal d'un anneau A. Les idéaux maximaux de A/I sont les $\mathfrak{m}/I$ où $\mathfrak{m}$ idéal maximal contenant I.*
4. **(maximal & premier)** *tout idéal maximal est premier.*
5. **(maximaux & chinois)** *montrer que deux idéaux maximaus distincts sont toujours étrangers (de somme A)*
6. **(espaces vectoriels)** mq $I/I\mathfrak{m}$ est un $A/\mathfrak{m}$espace vectoriel
7. **(théorème de Krull)** *Montrer que tout idéal strict est inclus dans un idéal maximal.*
8. *Montrer que tout anneau non nul admet un idéal maximal.*
9. **(dimension "linéaire")** Soit A un anneau non nul et p, q deux entiers positifs. Alors les anneaux produits A^p et A^q sont isomorphes ssi $p = q$.

Solution proposée.

1. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal. Soit $\overline{a} \in A/\mathfrak{m}$ non nul : puisque $a \notin \mathfrak{m}$, l'idéal $\mathfrak{m} + (a)$ contient strictement $\mathfrak{m}$, donc vaut tout A, *i. e.* contient 1, mettons $1 = m + \lambda a$, d'où (en réduisant modulo $\mathfrak{m}$) l'égalité $\overline{1} = \overline{0} + \overline{\lambda}\overline{a}$, ce qui montre que $\overline{a}$ est inversible (d'inverse $\overline{\lambda}$).

   Soit $\mathfrak{m}$ un idéal tel que $A/\mathfrak{m}$ soit un corps. Soit I un idéal contenant strictement $\mathfrak{m}$. Soit $i \in I \setminus \mathfrak{m}$. Alors i est non nul modulo $\mathfrak{m}$, donc est inversible, mettons $\overline{ij} = \overline{1}$, ou encore $ij + m = 1$, d'où l'on tire $1 = \underbrace{ij}_{\in I} - \underbrace{m}_{\in \mathfrak{m} \subset I} \in I$ et l'égalité $I = A$..
2. Appliquer le point précédent à l'idéal nul et se souvenir que $A/0$ est isomorphe à A.
3. Soit J/I un idéal de A/I On a alors les équivalences
$$J/I \text{ maximal} \iff {}^{(A/I)}\!/_{(J/I)} \text{ corps} \iff A/J \text{ corps} \iff J \text{ maximal}.$$
4. Un corps est intègre.
5. Soient $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{M}$ deux idéaux maximaux distincts. Par symétrie, on peut par exemple supposer $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{M}$. Soit $m \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{M}$. Alors l'idéal $\mathfrak{m} + \mathfrak{M}$ contient strictement $\mathfrak{M}$, donc par maximalité vaut tout A.
6. Soit $i \in I$. Le morphisme $h_i : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & I \\ a & \longmapsto & ai \end{array} \right.$ vérifiant $h_i(\mathfrak{m}) \subset I\mathfrak{m}$, il induit un morphisme d'anneaux $\left\{ \begin{array}{ccc} A/\mathfrak{m} & \longrightarrow & I/I\mathfrak{m} \\ \overline{a} & \longmapsto & \widetilde{ai} \end{array} \right.$, ce qui définit l'action du corps $A/\mathfrak{m}$ sur $\widetilde{i}$, donc sur tout le groupe additif $I/I\mathfrak{m}$. Les axiomes d'un espace vectoriels sont alors immédiat à vérifier (par exemple, l'associativité découle des égalités $\overline{a}\left(\widetilde{bi}\right) = \overline{a}\widetilde{bi} = \widetilde{a(bi)} = \widetilde{(ab)i} = \overline{ab}\widetilde{i} = \left(\overline{a}\overline{b}\right)\widetilde{i}$).

7. Soit I un idéal strict. L'ensemble $\mathcal{I}$ des idéaux stricts contenant I est non vide (I est dedans). Montrons que $\mathcal{I}$ est stable par union de chaine. Soit $(I_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{I}$. Montrons que $\bigcup_\Omega I_\omega$ (qui majore clairement cette chaîne) est un élément de $\mathcal{I}$. Chaque I_ω contenant I, leur réunion le contient ; si elle valait tout A, elle contiendrait 1, donc l'un des I_ω contiendrait 1 et vaudrait tout A, ce qui contredirait $I_\omega \in \mathcal{I}$. On peut donc appliquer le lemme de Zorn et invoquer un élément $\mathfrak{m}$ maximal dans $\mathcal{I}$. Montrons que l'idéal $\mathfrak{m}$ est maximal. Soit M un idéal strict contenant $\mathfrak{m}$. Il contient alors I, donc appartient à $\mathcal{I}$; puisque $\mathfrak{m}$ est un élément maximal de $\mathcal{I}$, l'inclusion $\mathfrak{m} \subset M$ devient une égalité, *c. q. f. d.*.
8. on applique à l'idéal nul
9. Soit M et N les matrices d'un isomorphisme $A^p \widetilde{\longrightarrow} A^q$ et de sa réciproque. Réduisant modulo un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, la relation $MN = 1$ devient $\overline{MN} = \overline{1}$ (on ne fait que des sommes et produits qui passent modulo $\mathfrak{m}$) où les matrices sont à coefficients dans un corps (à savoir $A/\mathfrak{m}$), donc leur inversibilité impose qu'elle soient carrées (sinon le rang est trop petit), *CFQD*.

EG Regardons l'anneau $k[X,Y]$. L'idéal (X) est premier mais pas maximal (le quotient s'identifie à $k[Y]$ puisqu'on a tué X). En revanche, l'idéal $(X-1, Y-2)$ lui est maximal, le quotient s'identifiant à k via l'évaluation en $(1,2)$. En fati, c'est général : nullsteelensatz !

4.2 maximaux et inversibles

Proposition. (réunion des maximaux)
Un élément est non inversible ssi il appartient à un idéal maximal :

$$A \backslash A^\times = \bigcup_{\mathfrak{m}\in \operatorname{Spm} A} \mathfrak{m}.$$

Démonstration.
On a les équivalences suivantes pour $a \in A$ fixé :

$$a \notin A^\times \iff (a) \subsetneq A \iff \exists \mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A,\ (a) \subset \mathfrak{m} \iff \exists \mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A,\ a \in \mathfrak{m}.$$

Remarque. Il est clair qu'un anneau est local ssi la réunion des idéaux maximaux est un idéal strict, *i. e.* ssi les éléments non inversibles forment un idéal strict, *i. e.* ssi $A \backslash A^\times$ (qui est stable par multiplication par n'importe élément de A) contient 0 et est stable par addition (le corps résiduel étant alors le quotient par les non inversibles).

Par exemple, les non inversibles de $K[[X]]$ sont les multiples de X, qui sont clairement stables par addition ; on retrouve le fait que $K[[X]]$ est local.

Au contraire, dans $K[X]$, les non inversibles sont les polynômes de degré ≥ 1, ensemble non stable par somme puisque $(X+1) - X$ est inversible.

4.3 Idéaux maximaux et radicaux

Définition.
Soit A un anneau. On appelle ***radical de Jacobson*** *de A l'ensemble des $x \in A$ tels que $1+ax$ soit inversible pour tout $a \in A$. On le note*

$$\operatorname{Jac} A = \left\{ x \in A \ ;\ 1 + Ax \subset A^\times \right\}.$$

Ainsi, la notation $\frac{1}{1+aj}$ a du sens pour tout $(a,j) \in A \times \operatorname{Jac} A$. On voit déjà que les nilpotents d'un anneau sont dans son radical de Jacobson en vertu de l'identité

$$\frac{1}{1+aj} = 1 + aj + (aj)^2 + \cdots + (aj)^n \ \textit{ valide pour } j^n = 0.$$

La première propriété qui suit montre qu'en un certain sens les éléments de $\operatorname{Jac} A$ sont les j pour lesquels la somme infinie $1 + j + j^2 + \cdots$ existe (et vaut $\frac{1}{1+j}$).

Propriétés.

1. *Le radical de Jacobson est radical et contient le nilradical :*
$$\sqrt{0} \subset \underbrace{\operatorname{Jac} A}_{\text{radical}}.$$
2. **(description interne de** $\operatorname{Jac} A$**)** *Le radical de Jacobson est le plus grand idéal I tel que $\forall i \in I$, $1+i$ soit inversible, i. e.*
$$\operatorname{Jac} A = \max_{1+I \subset A^\times} \{I \text{ idéal}\}.$$
3. **(description externe de** $\operatorname{Jac} A$**)** *Le radical de Jacobson est l'infimum des idéaux maximaux, i. e.*
$$\operatorname{Jac} A = \bigcap \mathfrak{m}.$$
4. **(annulation de** $\operatorname{Jac} A$**)** *Quotienter par le radical de Jacobson permet de tuer ce dernier :*
$$\operatorname{Jac}\left({}^{A}\diagup_{\operatorname{Jac} A} \right) = 0.$$

Démonstration.

1. Déjà vu plus haut. Autre démo : un idéal maximal étant premier, on a l'inclusion $\operatorname{Jac} A = \bigcap \mathfrak{m} \subset \bigcap \mathfrak{p} = \sqrt{0}$.

   Montrons que $\operatorname{Jac} A$ est stable par racine carrée. Soit $a \in A$ tel que $a^2 \in \operatorname{Jac} A$. Soit $\lambda \in A$. Alors $1 + \left(\lambda^3 a\right) a^2 = (1 + \lambda a) \left(1 - \lambda a + (\lambda a)^2\right)$ est inversible, donc $1 + \lambda a$ l'est aussi. On en déduit $a \in \operatorname{Jac} A$, CQFD.
2. Montrons que $\operatorname{Jac} A$ est un idéal de A (il vérifie clairement $1 + \operatorname{Jac} A \subset A^\times$). On a déjà $0 \in \operatorname{Jac} A$. Soient $x, y \in \operatorname{Jac} A$ et $a \in A$. Alors $1 + a\,(x + y)$ est inversible car
$$\begin{aligned} (1 + a\,(x+y)) \frac{1}{1+ax} \frac{1}{1 + \frac{a}{1+ax} y} &= ((1+ax) + ay) \frac{1}{1+ax} \frac{1}{1 + ay\frac{1}{1+ax}} \\ &= \left(1 + ay \frac{1}{1+ax}\right) \frac{1}{1 + ay\frac{1}{1+ax}} \\ &= 1. \end{aligned}$$
   Enfin, pour tout $\lambda \in A$, l'élément $1 + \lambda\,(ax) = 1 + (a\lambda)\,x$ est inversible, donc $ax \in \operatorname{Jac} A$.

   Soit maintenant I un idéal de A qui vérifie $1 + I \subset A^\times$. Soit $x \in I$ et $a \in A$. On a $ax \in I$, donc $1 + ax \in A^\times$, d'où $x \in \operatorname{Jac} A$ et l'inclusion $I \subset \operatorname{Jac} A$.
3. Soit $x \in \bigcap \mathfrak{m}$. Supposons par l'absurde que $x \notin \operatorname{Jac} A$. Il existe donc $a \in A$ tel que $y := 1 + ax$ ne soit pas inversible. L'idéal (y) est donc contenu dans un idéal maximal, mettons $\mathfrak{m}' \ni y$. Alors $x \in \mathfrak{m}'$, donc $ax \in \mathfrak{m}'$, d'où $y - ax \in \mathfrak{m}'$, *i. e.* $1 \in \mathfrak{m}'$, *absurde.* On a donc $\bigcap \mathfrak{m} \subset \operatorname{Jac} A$.

   Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Jac} A$, et soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. L'idéal $\mathfrak{m} + (x)$ est un idéal qui contient $\mathfrak{m}$, donc qui vaut $\mathfrak{m}$ ou A. Si $\mathfrak{m} + (x) = A$, on aurait $1 = m + ax$ pour un $m \in \mathfrak{m}$ et un $a \in A$; comme $x \in \operatorname{Jac} A$, $1 - ax$ est inversible, *i. e.* m inversible, *absurde.* On a donc $\mathfrak{m} + (x) = \mathfrak{m}$, donc $x = 0 + 1x \in \mathfrak{m} + (x) = \mathfrak{m}$. On en déduit $\operatorname{Jac} A \subset \mathfrak{m}$ et $\operatorname{Jac} A \subset \bigcap \mathfrak{m}$.
4. Les idéaux maximaux de ${}^{A}\diagup_{\operatorname{Jac} A}$ sont les quotients ${}^{\mathfrak{m}}\diagup_{\operatorname{Jac} A}$ où $\mathfrak{m}$ idéal maximal contenant $\operatorname{Jac} A$. D'après le point précédent, cette dernière condition est tautologique. Ainsi, pour $\overline{a}$ dans $\operatorname{Jac}\left({}^{A}\diagup_{\operatorname{Jac} A}\right)$, on a $\overline{a} \in {}^{\mathfrak{m}}\diagup_{\operatorname{Jac} A}$ pour tout $\mathfrak{m}$, d'où $a \in \mathfrak{m}$ pour tout $\mathfrak{m}$, *i. e.* $a \in \operatorname{Jac} A$, d'où $\overline{a}$ nul dans ${}^{A}\diagup_{\operatorname{Jac} A}$, *c. q. f. d.*.

(exo) *si tout idéal non inclus dans $\sqrt{0}$ contient un idempotent non nul, alors* $\operatorname{Jac} A = \sqrt{0}$.

Montrons $\operatorname{Jac} A \subset \sqrt{0}$. Soit $j \in \operatorname{Jac} A$. Si j pas nilpotent, alors (j) contient un idempotent non nul e ; alors $1 - e = 1 - e^2 = (1 - e)(1 + e)$, d'où (en simplifiant par $1 - e$) $1 = 1 + e$ et $e = 0$, *absurdre.*

EXO : on suppose relation de divisitilibté total.

Mq anneau est local (ie $\exists!$ seul idéal max) comparaons a et $a+1$. Si $a+1=\lambda a$, ie $a(\lambda-1)=1$ alors a est inversible. Si $a=\lambda(a+1)$, ie $(a+1)(1-\lambda)=1$, alors $a+1$ est inversibles.

Ainsi, on a mq que $a\in\cup\mathfrak{m}=A\backslash A^{\times}$ => $\forall x,\ ax\in A\backslash A^{\times})$ => $\forall x,\ 1+ax\in A^{\times}$ => $a\in\operatorname{Rad}A=\cap\mathfrak{m}$, donc$\cup\mathfrak{m}\subset\cap\mathfrak{m}$ et A local.

(rigolo) mq $\subset$ total sur idéaux supp $I\not\subset J$, soit $i\in I\backslash J$, pour tout $j\in J$ on n'a pas $i\in(j)$, ie $i$ne divisepas$j$, ie $j$divse i, d'où $j\in(i)\subset I$ et $J\subset I$.

EXO : supp tout éément est multiple de son carré.

1. *Mq corps ou nul si intègre. En déduire tout irréd strict est maximal*
2. *Mq anneau est réduit, puis qu'il est sous-anneau d'un produit de corps.*
3. *Réciproque ?*

1. si intègre, $a=\lambda a^2$ donne $a=0$ ou a inversible. Anis, puisque tout idéal est radical (déjà prové), tout idéal irrre est automotiquem prmeier, ie A/I est intrège, d'où A/I nul (abs car I strcit) ou corps, CQFD.
2. si $a^n=0$, alors $a^{n-1}=\lambda a^n=0$, d'où par rec $a=0$. produit des projec mod m est injective car noyau $=\cap m=\cap p=\sqrt{0}=0$. ? ? ? ? PAS SURJ car m en nombre peut-être infini ! ! ! !
3. Contre exemeple : $C^0(X,\mathbf{R})\subset\mathbf{R}^X$ mais plein de fonctions changment de signe !
   En revanche, soit A sous anenau de $\prod k$ stable par inversion ponctuell (inverse une coordonnées conserver l'appartenca à A). Un lément $a\in A$ a des composantes nulles et du'atres inversible. En multiplicant par λ_a l'inverses des composantes non nulles et n'importe quoi d'autre , on tombe sur $\lambda_a a^2=a$.

Exemple : les anneaux **de Boole** sont les sous-anneaux d'un produit de corps $\mathbb{F}_2$.

5 Sur les anneaux noethérien et artiniens

A **noethérien** si toute suite croissante d'idéaux stationnne, ie si tout idéal est de type fini
A **artinien** si toute suite *dé*croissante d'idéaux stationne

EGd'anneaur aritinen ? corps, anneua fini, $A/\mathfrak{m}^n$ où $\mathfrak{m}$ maximal dans A noethérien
mq noethéori /=/>artinien $\mathbb{Z}$ CEG, car suite coirssante de divisibilité (2^n)

On va montrer que artinien => noéthérien ! ! !

liens noeth / artinien

1. *expliquer pourquoi un ev est artinien ssi noethérien.*
2. *mq si N sous module de M, mq M est artinien si N et M/N le sont. Idem avec* noethérien..
3. **ARGUMENT CLEF** *Soit A anneau dont certains maximaux sont de produit (fini) nul. Mq que A est artinien ssi il est noethérien. Exmples ?*

Solution.

1. ev de di finie
2. Soit M_n suit décroissante de sous-modules. Alors $\pi(M_n)$ et $M_n\cap N$ décroissent, donc stationnent, mettons à partir du rang r. Montrons que $M_n=M_r\ \forall n>r$. Soit $a\in M_n$. on a $\pi(a)\in\pi(M_n)=\pi(M_r)$, disons $a-m_r\in N$, d'où $a-m_r\in N\cap M_n=N\cap M_r\subset M_r$ et $a\in m_r+M_r=M_r$.
   même démo en supprimant le dé devant croître. Ou alors directent avev le type fini[7].

[7] Soit I un sous-module de M. La projection $\pi(I)$ est un sous-module du module noethérien M/N, donc est de type fini, mettons $\overline{I}=\sum A\overline{m_i}$. Alors tout $i\in I$ est combinaison linéaire des m_i modulo N, donc est engendré par les m_i union une famille génératrice de N (que l'on peut prendre finie par noethérianité de ce dernier), de sorte que I est de type fini.

3. On récurre sur le nombre de $\mathfrak{m}$. S'il y en a un, alors il est nul et A est un corps, qui est noethérien et artinien, d'où l'équivalence. Suppo résultat ok pour $n \geq 1$ maximaux et suppos $\mathfrak{m}_0 \cdots \mathfrak{m}_n = 0$. Alors, dans l'anneau $A' := A/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$, les idéaux $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ sont maximaux et de produit nul, d'où par HR une équivalence. De plus, $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ est un ev sur $A/\mathfrak{m}_0$, d'où une autre équivalence (eq à dim finie). Enfn, le point 1 conclut (dérouler les équivalences)

Exmpele : si $\exists \mathfrak{m}$ nilpotent.

Lemme : montrer que dans un anneau noethérien tout idéal radical est intersection (finie) de premiers

Supposons par l'absurde que l'ensemble R des idéaux radicaux échappant à la conclusion soit non vide. Prenons-en un maximal et appelons-le $\mathfrak{r}$. S'il est irréductible, alors il est premier par le point précédent, ce qui contredit l'appartenance $\mathfrak{r} \in R$. On peut donc écrire $\mathfrak{r} = I \cap J$ pour deux idéaux I et J contenant strictement $\mathfrak{r}$, d'où l'on déduit $\mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{r}} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$; puisque $\sqrt{I}$ et $\sqrt{J}$ contiennent strictement $\mathfrak{r}$, la maximalité de ce dernier les empêche d'appartenir à R, donc ces idéaux radicaux se décomposent en intersection de premiers, décomposition se propogeant à $\mathfrak{r} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ et contredisant l'appartenance $\mathfrak{r} \in R$.

annecdotique : Cor : *un anneau noethérien a un nombre fini d'idéaux preimers minimaux.* On regarde le nilraidcal $\sqrt{0} = \cap_{finie}\mathfrak{p}_i$. Soit $\mathfrak{p}$ premier minimal. Il contient $\cap \mathfrak{p}_i$ donc par praimalité un $\mathfrak{p}_i$, donc par minimalité lui est égal. Ainsi, tout prmier mimal est l'un des $\mathfrak{p}_i$. Topologiquement, c'est dire que le spectre a un nombre fini de composantes irréductibles maximales.

th Akizuki : artinien = noethérien + spectre est maximal

$\boxed{\Longleftarrow}$ *Réciproque :* $\sqrt{0}$ est dtf car A noeth, donc nilpotent ; or $\sqrt{0}$ est (lemme) intersection finie de $\mathfrak{p}$, donc (hypothèse) intersetction finie de $\mathfrak{m}$, d'où $\left(\prod \mathfrak{m}\right)^n \subset \left(\cap \mathfrak{m}\right)^n = \mathfrak{n}^n = \mathfrak{o}$ ett l'argumet clef conclut

$\boxed{\Longrightarrow}$

mq artient intègre => corps et rn déduire que tout premier y est maximal Soit $a \in A$ non nul. (a^n) décroit donc stationne, d'où $a^n = xa^{n+1}$, ie $1 = xa$. A/p artinien intègre donc corps donc p max.

mq artinien => nombre fini d'idéaux prmier. Soit $(\mathfrak{p}_n)$ suite inj de prmier. Alors $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2...\mathfrak{p}_n)$ décroit en$n$, donc stationne, disons $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2...\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2...\mathfrak{p}_{n+1} \subset \mathfrak{p}_{n+1}$ d'où (par primalité) un $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{n+1}$, d'où pb par maximalité.

mq le nilradical $\mathfrak{n} := \sqrt{0}$.d*'un artinien est nimpotent* (mq $\exists a \neq 0$ dans $a\mathfrak{n}$ tel que $a\mathfrak{n}^r \neq 0$) *et conlure aritnie=>noether* Pour conclure, appliquer (comme pour $\boxed{\Longleftarrow}$) l'argument clef au produit nul $\mathfrak{n}^n$ (en effet $\mathfrak{n} = \cap \mathfrak{p} = \cap_{finie}\mathfrak{m}$) On sait que $\mathfrak{n}^n$ statione à partiri d'un rang r. On considère par l'absurde un idéal non nul minimal pour la propriété $I\mathfrak{n}^r \neq 0$ (il en existe si $\mathfrak{n}^r \neq 0$, prendre $I = A$) ie $\exists i \in I$ tq $i\mathfrak{n}^r \neq 0$; alors $i\mathfrak{n}$ est un idéal non nul (car $r \geq 1$), inclus dans I, et tq $(i\mathfrak{n})\,\mathfrak{n}^r = i\mathfrak{n}^{r+1} = i\mathfrak{n}^r \neq 0$: par minimalité, on doit avoir $i\mathfrak{n} = I$, donc $i \in I$ s'écrit ni,d'où $0 = i\,(1-n)$. Or n nilmpotent, donc $1-n$ inversible et $i = 0$, contredisant $i\mathfrak{n}^r \neq 0$. rq : cas local : on peut le faire directement[8]

anecdotique.

Mq artinien => le réduit est un porduit (fini) de corps. Deux idéaux maximaux distincts étant étrangers, le lemme chinois donne (par finitude de Sp_m) une surjection $A \twoheadrightarrow \prod {}^{A}\!\big/_{\mathfrak{m}}$ vers un produit (fini) de corps ; tout premier étant par ailleurs maximal, son noyau $\bigcap \mathfrak{m}$ vaut le nilradical $\bigcap \mathfrak{p}$, ce qui conclut.

artinien est produit fini d'indécmposable (inducction nothérienne, cf feuille anneaux)

réciproque : noéthoére et tout prmeier est max => artinien

on peut montrer avec les idéaux assocéi ? ? ? ? (et l'hyp noeth) qu'il a y une suite $0 = I_n \subset .. \subset I_0 = A$ tel que quotients sucessifs soit des quotients intèegre de A. Puisue tout premier est maximae ces quotients sont en fait des corps, donc artiniens, donc artinien sur A, donc tous les I_k sont artiniens, donc A aussi.

[8] Soit I idéal. On une suite $I \supset I\mathsf{m} \supset I\mathsf{m}^2 \supset \cdots \supset I\mathsf{m}^{r-1} \supset 0$. Pour montrer I noethérien, il suffit de montrer que tous les quotient le sont. Or les quotient $I\mathsf{m}^k/I\mathsf{m}^{k-1}$ sont artiniens sur A, ie sur A/m (l'action de A/m est definie par celle de A, donc les sous-modules sont les mêmes) où ils sont des ev, donc ils sont de dim fini sur A/m, disons $= \sum (A/\mathsf{m})\, i_k = \sum A i_k$, ie de type fini sur A, CQFD.