Fractions rationnelles
(version chantier)

Marc SAGE

6 février 2018

Table des matières

1 Pour se faire la main

D*écomposer dans* $\mathbf{C}(X)$ *les fractions suivantes* :
$\frac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)}$
$\frac{X^3-1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
$\frac{X^{n-1}}{X^n-1}$
$\frac{\left(X^2+4\right)^2}{(X^2+1)(X^2-2)^2}$
(puissance croissantes) $\frac{X^2+1}{(X+2)^4(X+1)^3}$

$\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$

(plusieurs techniques) $\frac{X^2-3}{X^3(X^2-1)^2(X^2-2)^2}$

qq réponse :
$\frac{4}{X-2}+\frac{4}{X+2}+2\frac{X}{X^2+1}$
$\frac{13}{X-3}-\frac{7}{X-2}+1$
NA
NA
$\frac{29}{X+1}-\frac{10}{(X+1)^2}-\frac{29}{X+2}+\frac{2}{(X+1)^3}-\frac{19}{(X+2)^2}-\frac{11}{(X+2)^3}-\frac{5}{(X+2)^4}$
NA
$\frac{1}{2(X-1)}-\frac{3}{4X^3}-\frac{2}{X}+\frac{1}{2(X+1)}-\frac{1}{2(X-1)^2}+\frac{1}{2(X+1)^2}+\frac{X}{X^2-2}-\frac{1}{4}\frac{X}{(X^2-2)^2}$ (à finir avec les $\pm\sqrt{2}$)

2 DÉS et dérivées

soit P *unitaire complexe scindé simple. DES de* $\frac{1}{P^2}$ *?*

DEM Scindons $P=\prod(X-\lambda)$. Alors $\frac{1}{P^2}$ est de la forme $\sum\frac{\frac{1}{P'(\lambda)^2}}{(X-\lambda)^2}+\sum\frac{\alpha_\lambda}{X-\lambda}$; en tranlatant $Y=X-\lambda$, on fait division selon puissance croissance de 1 par $P'(\lambda)^2+P'(\lambda)P''(\lambda)Y$ jusqu'à ordre 1, ce qui donne (à terminer...) $\alpha_\lambda=-\frac{P''(\lambda)}{P'(\lambda)^3}$

3 Engendrer les puissances *via* les soustraction et inversion

montrer que élever au carré est engendré par l'addition/soustractino et l'inversion. Généraliser à une puissance quelconque.

DEM : on part de la DES $\frac{1}{a-a^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}$ qui se réécrit $a^2=a-\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}}$.

Ensuite, on généralise en $\frac{1}{a^n(1-a)}=\frac{1}{1-a}+\frac{P_n(a)}{a^n}$ où P_n est déterminé par (équivalence) $P_n=\frac{1}{1-a}-\frac{a^n}{1-a}=\frac{1-a^n}{1-a}=1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}$, d'où $a^{n+1}=a^n-\frac{1}{\frac{1}{1-a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n}}$ et le résultat par récurrence.

4 Applications additives et inversives

Soit K *corps et* $f:K\longrightarrow K$ *additive tq* $f(a)f\left(\frac{1}{a}\right)=1$. *Mq* f *morphisme de corps.*

DEM f est injective (si $\operatorname{Ker} f$ contient un $a\neq 0$, on a une contradiction avec $f(a)f\left(\frac{1}{a}\right)=1$) et $f(1)=\pm1$. Quitte à composer par $-\operatorname{Id}$ (ce qui ne change ni hypohtès ni conclusion) OPS $f(1)=1$.

L'identité $\frac{1}{a-a^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}$ montre que $f\left(a^2\right)=f(a)^2$ si $a\neq 0,1$, cas où l'égalité est triviale. Alors $ab=\frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}$ (en carac $\neq 2$) mq f préserve produit.

En carac $\neq 3$, l'identité $a^3 = a - \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}} - \frac{1}{\frac{1}{1-a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}$ montre $f(a^3) = f(a)^3$ si $a \neq 0, 1$ (les dénom sont alors des inverses donc non nuls), cas où égalité claire, puis on écrit $ab = \frac{(a+b)^3-a^3-b^3}{3(a+b)}$, d'où $f(ab) = f(a)f(b)$ dès que $a+b \neq 0$. Si somme nulle, alors $a+(b+1) \neq 0$, donc $f(a(b+1)) = f(a)f(b+1)$ et idem.

Rq : en carac 2, on aurait égalité pu écrire $a^2b^2 = a - \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{1}{b^2}-a}}$ d'où $f(ab) = \pm f(a)f(b)$ et la carc fait sauter le $\pm$, youpi.

PLUS DIFFICILE : remplaçons hypohtèse par $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{f(a) \text{ si } \neq 0}$. ALors $f(1) = 0$ ou ± 1 (OPS 0 ou 1)

Alors $\operatorname{Ker} f$ stable :

*par somme(claire)

*inverse : si $a \in \operatorname{Ker} f$ et si $f\left(\frac{1}{a}\right) \neq 0$ écrire $0 = f(a) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{a}\right)}$ absurdre

* par carré. On utilise

$$\frac{1}{a-a^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a}.$$

Si $f(a^2) \neq 0$, alors $f(a-a^2) = -f(a^2) \neq 0$, donc $\frac{-1}{f(a^2)} = 0 + f\left(\frac{1}{1-a}\right)$; puisque terme non nul, $\frac{1}{1-a} \notin \operatorname{Ker}$, ied $1-a \notin \operatorname{Ker}$ (ie $f(1) \neq 0$) d'où $= \frac{1}{f(1)-0}$et $f(a^2) = -f(1)$. Enfin, pour n entier $\neq 0$, on a $f\left((na)^2\right) = n^2 f(a^2) \neq 0$, donc (meme raismonnemnt car $f(na) = nf(a) = 0$) $n^2 f(a^2) = -f(1)$ qui vaut aussi $-n^2 f(1)$, d'où $n^2 = 1$, absurde pour $n = 2\text{ou}3$ selon carac

* par cube en utilisant

$$\frac{1}{a^2-a^3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{1-a}.$$

Si $f(a^3) \neq 0 = f(a^2)$, l'imge vaut $\frac{1}{-f(a^3)} = 0 + 0 + f\left(\frac{1}{1-a}\right) = \frac{1}{f(1)}$ et $f(a^3) = -f(1) = n^3 f(a^3)$ et $n^3 = 1$, absurde selon carac.

* par produit

* par homthétie. On utlise

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{1}{b}-a} = \frac{1}{a-a^2b}$$

avec $f(a) = 0$. Puisuqe $\frac{1}{a} \in \operatorname{Ker}$, il usffit de montre que $a^2b \in \operatorname{Ker}$. Sinon, membre droite $= \frac{1}{-f(a^2b)}$ et gauche vaut $0 + f\left(\frac{1}{\frac{1}{b}-a}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{b}\right)} = f(b)$, puis de même $f(na) = 0$ d'où n^2 constant, asbsurde.

Ainsi $\operatorname{Ker} f$ est n idéal et donc f est inj ou nulle. si no nulle, $f(a) f\left(\frac{1}{a}\right) = 1$ $\forall a \neq 0$ et on retombe sur hypohtèse d'avant.

5 Composée de fractions

EXO *Soient F et G deux fractions rationnelles sur un corps K algébriquement clos. On supposer que $G \circ F$ est un polynôme. Mq F et G sont des polynômes ou, quitte à la translater l'indéterminée, $F = \frac{\alpha}{P}$ et $G = \frac{Q}{X^n}$ avec $n \leq \deg P$.*

OPS $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{U}{V}$ non constantes.

Lemme : a pole de G => $A - aB$ cst

DEm : soit sinon λ racine de $A - aB$. ALors λ pas pole de F (sinon λ racine de B, donc de $(A-aB)+aB = A$, donc $\frac{A}{B}$ pas irreed, abs), donc on peut évaluer $0 = \frac{A-aB}{B}(\lambda) = F(\lambda) - a$ => $F(\lambda)$ pole de G => λ pole de $G \circ F$ absrde

G **a au plus un pole**. sinon $A - aB$ et $A - a'B$ sont cst, donc la différence$(a-a')B$ aussi, donc$B$ est constant, donc $A = (A-aB) + aB$ est cst, donc F aussi abs.

SI G est un polynome mettons $G = \sum_{i=0}^{d} g_i X^i$. Alors $G \circ F = \sum g_i \left(\frac{A}{B}\right)^i$, d'où (on mutiplie par B^d et on filtre moduloe B) $0 = g_d A^d$, donc $A^d = 0 \bmod B$, donc $B \mid A^d$, ie $B \mid A$, d'où F polynôme

Si G pas polynôme $G = \frac{U}{(X-a)^n} = \sum_0^v \frac{u_i (X-a)^i}{(X-a)^n}$. Alors $A - aB$ cst b, donc $\frac{b}{B} = \frac{A}{B} - a$ ie $F = a + \frac{b}{B}$ (avec $b \neq 0$ car F non cst=). Ainsi, on a

$$G \circ F = \sum \frac{u_i}{\left(\frac{b}{B}\right)^{n-i}} = \sum_{i=0}^{v} \frac{u_i}{b^i} B^{n-i} = \frac{u_v}{b^v} B^{n-v} + \cdots + \frac{u_0}{1} B^n.$$

Si $v \leq n$, ces F et G convienent. Sinon, $B^{v-n-1} G \circ F$ est un polynôme, or il vaut $\frac{u_v}{b^v} \frac{1}{B}$+polyno, absurde car B non cst et $u_v \neq 0$.