Formes quadratiques
(version chantier)

Marc SAGE

2 juin 2007

Table des matières

sommes de $2, 4, 8$ carrés stalbes par $\times$ (norme de $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$), mais pas au-delà ! (cf à lire dans forum qui en parle)

Comment trouver plein de vecteurs à même image ? $q\left(a - 2\frac{\widehat{q}(a,x)}{q(x)}x\right) = q\left(a\right)$.

théorie avec forme bilinéaire (pas que fq), cf perrin.

th spectral -> lien avec matrice d'inertie et coef de Young : trois directions propres
pourquoi $S_n\left(C\right)$ pas intéressant.
en complexe, tout pareil que réel en mettant $*$ à la place de $\top$ (unifier avec le terme d'adjoint). Pourtant deux chose bien différentes (formes quadratiques, hermtiennes, symplectiques –> cf Perrin)

Est-ce que $A^t A = 0 \implies A = 0$?
non : $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$ en car 2, $\begin{matrix} 1 & i \\ i & -1 \end{matrix}$ sur $\mathbb{C}$

th spectral faux sur C : $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique, de spectre $\{1\}$, donc pas diag sinon $= 1$

comparaison jolie :
lemme : si A complexe, la matrice $\begin{pmatrix} |A| & A^* \\ A & |A^*| \end{pmatrix}$ est positive.
dem on décomosit $A = UH$, d'où

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H & H \\ H & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & U^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & HU^* \\ UH & UHU^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & A^* \\ A & |A^*| \end{pmatrix}.$$

Or $H \geq 0$, d'où $\begin{pmatrix} H & H \\ H & H \end{pmatrix} \geq 0$.

Cor. $A + A^* \leq |A| + |A^*|$
DEm. on applique avec A et A^*,d'où $\begin{pmatrix} |A| + |A^*| & A + A^* \\ A + A^* & |A| + |A^*| \end{pmatrix}$.Ainsi,

$$0 \leq \left\langle \begin{pmatrix} |A| + |A^*| & A + A^* \\ A + A^* & |A| + |A^*| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \left(|A| + |A^*| - (A + A^*)\right)x \\ -\left(|A| + |A^*| - (A + A^*)\right)x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \right\rangle = 2\left\langle x, (|A| + |A^*| - (\right.$$

Cor. $|1 - A| + |1 + A| + |1 - A^*| + |1 + A^*| \geq 4$
Dem. remplacer A par $1 \pm A$.

> D'ailleurs, ca me penser à une autre question de terminologie : en reprenant la leçon sur les formes quadratiques, je suis tombé sur le théorème d' *inertie* de Sylvester ; je sais pas s'il y a un lien avec ma question sur l'isotropie, mais bon, it makes me wonder why such a name...

Il me semble que le mot inertie vient simplement de ce que la signature est un invariant (ne dépend pas de la base de diagonalisation). Bien sûr, si tu définis la signature comme les dimensions maximales des sous-espaces tels que je ne sais quoi, ça n'a pas trop de sens.– @/2

David, 11 3 06 1h06
Je ne suis pas sûr du tout, mais l'idée qui me vient, c'est que « isotrope » signifie, mathématiquement, « qui reste invariant par l'action du groupe orthogonal » (uniformité dans les directions : p.e., un processus isotrope c'est un processus invariant par toutes les rotations) : et les directions isotropes d'une forme quadratique restent, justement, invariantes par l'action du groupe orthogonal de cette forme quadratique. Disons que je soupçonne que le concept a dû être introduit, au début, pour la forme quadratique canonique (diagonale de +1, je veux dire) pour parler des vecteurs à coefficients complexe (genre (1,i), la direction des points cycliques du plan) qui pointent dans des directions stables par toute rotation, puis de façon plus générale pour une autre forme.

Y a-t-il une interprétation physique/géométrique comme pour le terme de *cône* (les zéros de x$^2 + y^2 - z^2 sontbienunvraicne$)?
(rémy, 11 03 2006 00 27) Bah, les vecteurs isotropes sont stables par multiplication par un scalaire.