Séries formelles
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

1 Construction

Soit A un anneau commutatif unitaire intègre.

Un *série formelle* est une suite à valeurs dans A.

On note $A[[X]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans A. Le symbole X désigne la série $(0, 1_A, 0, 0, ...)$.

On munit ce dernier d'une addition et d'une mutiplication scalaire coordonnée par coordonnée ainsi que d'un produit de convolution. L'anneau A se plonge alors dans l'algèbre $A[[X]]$ via le morphisme

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & A[[X]] \\ a & \longmapsto & (a, 0, 0, ...) \end{array} \right. ,$$

donnant au passage l'unité de $A[[X]]$:

$$1_{A[[X]]} = (1, 0, 0, ...)$$

La *valuation* d'une série est le plus petit entier correspondant à une valeur non nulle. Par convention, on pose

$$\operatorname{val}(0) = \infty.$$

Les relations suivantes sont alors valables pour toutes séries S et T :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{val}(S+T) & \geq & \min\{\operatorname{val} S, \operatorname{val} T\} \\ \operatorname{val} ST & = & \operatorname{val} S + \operatorname{val} T. \end{array}$$

La première relation est évidente, avec égalité si les valuation sont distinctes.

Pour la seconde, si S ou T est nulle, la relation s'écrit $\infty = \infty$, sinon les valuations σ et τ de S et T sont finies, et on peut écrire

$$\forall n < \sigma + \tau, \ [ST]_n = \sum_{p+q=n} s_p t_q \, ;$$

la condition $n < \sigma + \tau$ impose alors $p < \sigma$ ou $q < \tau$, donc tous les termes de la somme sont nuls. Par ailleurs, par le même arguments, on obtient

$$[ST]_{\sigma+\tau} = \sum_{p+q=\sigma+\tau} s_p t_q = s_\sigma t_\tau \neq 0 \text{ par intégrité de } A.$$

Un corollaire immédiat de cette relation est l'**intégrité de l'anneau** $A[[X]]$. En effet, si $ST = 0$, alors $\infty = \operatorname{val} ST = \operatorname{val} S + \operatorname{val} T$, ce qui impose que S ou T soit de valuation infinie, *i.e.* nulle.

On met une *distance* sur $A[[X]]$ correspondant à l'intuition "une série est proche de 0 si beaucoup de ses premiers termes s'annulent". On pose ainsi

$$d(S, T) = e^{-\operatorname{val}(S-T)}$$

où n'importe quel autre réel > 1 que e ferait l'affaire.

Il est clair que d est réflexive, que $d(S, S) = e^{-\infty} = 0$. Par ailleurs, en écrivant

$$e^{-\operatorname{val}(S+T)} \leq e^{-\min\{\operatorname{val} S, \operatorname{val} T\}} = \max\left\{e^{-\operatorname{val} S}, e^{-\operatorname{val} T}\right\}$$

et en appliquant cela à $\left\{ \begin{array}{c} S = U - V \\ T = V - W \end{array} \right.$, on tombe sur la **comparaison triangulaire ultramétrique**.

En observant que $\operatorname{val}\left(S - \sum_{i=0}^n s_i X^i\right) \leq e^{-n} \longrightarrow 0$, cette distance permet d'écrire une série S comme la série convergente[1] $\sum_{n\geq 0} s_n X^n$. On retombe sur la représentation polynomiale "de degré infini".

Noter tout de suite que $A[X]$ se plonge dans $A[[X]]$ par l'injection canonique $A^{(\mathbb{N})} \hookrightarrow A^{\mathbb{N}}$.

À quelle condition peut-on inverser une série formelle S ? On veut $ST = 1$, ce qui série en termes de coefficients $\left\{ \begin{array}{c} s_0 t_0 = 1 \\ \forall n \geq 1, s_0 t_n + \sum_{i=1}^n s_i t_{n-i} = 0 \end{array} \right.$. Il faut donc que s_0 soit inversible, et si c'est le cas, les t_n sont donnés par la formule de récurrence $\left\{ \begin{array}{c} t_0 = \frac{1}{s_0} \\ t_n = -\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{s_0} t_{n-i} \end{array} \right.$.

[1] Observer bien qu'il ne s'agit pas de la convergence d'une série entière $\sum s_n x^n$ où s_n et x seraient des scalaires complexes (donc pas dans un anneau quelconque), mais d'une convergence donnant un sens à des série aussi classiquement divergente que $\sum 2^{n!} X^n$.

Nous venons de montrer que
$$A[[X]]^{\times} = \left\{ S\ ;\ s_0 \in A^{\times} \right\}.$$

On plonge ensuite l'anneau intègre $A[[X]]$ dans son corps des fractions, que l'on note $A((X))$.

La multiplication scalaire s'y prolonge naturellement par
$$a\frac{F}{G} = \frac{aF}{G},$$
la valuation par la formule,
$$\operatorname{val}\frac{S}{T} = \operatorname{val} S - \operatorname{val} T,$$
et la distance par
$$d(F,G) = e^{-\operatorname{val}(F-G)}.$$

Observer que pour F, G, H dans $A((X))$
$$d(FG, FH) = e^{-\operatorname{val}(FG-FH)} = e^{-\operatorname{val}(F(G-H))} = e^{-\operatorname{val} F - \operatorname{val}(G-H)} = e^{-\operatorname{val} F} e^{-\operatorname{val}(G-H)} = d(F,0)\, d(G,H),$$
de sorte que le produit est 1-lipschitzien, donc commute à la limite.

Prenons une fraction $\frac{S}{T}$ sous forme irréductible. Son dénominateur s'écrit de façon unique sous la forme $X^v U$ où U est une série inversible, d'où une écriture sous la forme
$$\frac{S}{T} = \frac{SU^{-1}}{X^v} = \sum_{n \geq -v} f_n X^n \text{ où } f_n := \left[SU^{-1}\right]_{n+v}.$$

On parle alors de *série de Laurent*. On peut les construire en considérant l'ensemble
$$L := \left\{ f \in A^{\mathbf{Z}}\ ;\ \exists v \in \mathbf{Z},\ k < v \implies f(k) = 0 \right\}$$
muni d'une valuation analogue à celle de $A[[X]]$ ainsi que des même lois. On a déjà un morphisme d'algèbres naturel $\left\{ \begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & A((X)) \\ \sum f_n X^n & \longmapsto & \sum f_n X^n \end{array} \right.$, et l'on vient d'en constuire une réciproque
$$\left\{ \begin{array}{ccc} A((X)) & \longrightarrow & L \\ \frac{S}{T} \text{ irréd} & \longmapsto & (n \geq -\operatorname{val} T) \mapsto \left[S\left(\frac{T}{X^{\operatorname{val} T}}\right)^{-1} \right]_{n+\operatorname{val} T} \end{array} \right.$$
qui est automatiquement un morphismes d'algèbres (ouf !).

2 Exponentielle et logarithme

Montrons que $\exp \ln(1+x) = 1+x$. Nontons $a_n := (-1)^{n-1} c_n$ avec $c_n := (n-1)!$ le nombre de n-cycles dansS_n. Il vient
$$e^{\ln(1+t)} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{n_1 + \cdots + n_p = n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_p} a_{n_1} \cdots a_{n_p}.$$

On interprète la seconde sommande comme une somme de $(-1)^?$ sur toutes les permutations ayant le type cyclique donné : le multinomial revient à choisir les supports des cycles, puis le produit des c_{n_i} revient à déterminer l'action sur chacune de ces supports. On obtient
$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{n_1 + \cdots + n_p = n} \sum_{\sigma \text{ de type } n_1, \ldots, n_p} (-1)^{n_1 - 1} \cdots (-1)^{n_p - 1} \\ = & \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{n_1 + \cdots + n_p = n} \sum_{\sigma \text{ de type } n_1, \ldots, n_p} \varepsilon(\sigma) \\ = & \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \\ = & 1 + t. \end{aligned}$$

Ensuite, les exponentielles des deux séries t et $\ln e^t$dont on cherche à prouver l'égalité sont égales par ce qui précède, donc les deux séries diffèrent d'une constante, or aucune n'a de terme constant, donc la constante est nulle.

Plein d'interpréatations combinatoires des fonctions usuelles transcendantes, d'où plein de démo combintaoire des identités classiques (eg : tangente d'une somme)