Quotients de polynômes
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

fractions rationnelles est un pléonasme (ratio = quotient)
autre justif ? trouver quelqu'un qui donne sens à *fonction rationnelles* en géo alg ?

1 Généralités

$K(X)$ est le corps des fractions de l'anneau intègre $K[X]$.
Tout élément de $K(X)$ s'écrit $F = \frac{P}{Q}$.
$\operatorname{car} K(X) = \operatorname{car} K$
$K \hookrightarrow K[X] \hookrightarrow K(X)$.
$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$ (si sens)
$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$
$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$
$\left(\frac{A}{B}\right)^{-1} = \frac{B}{A}$

Représention irréductible.
Tout fraction non nulle de $K(X)$ peut s'écrire $\frac{A_0}{B_0}$ où $A_0 \wedge B_0 = 1$, avec unicité si B_0 est imposé unitaire.
Si $\frac{A}{B}$ est une autre représentation, alors on peut écrire $\begin{cases} A = DA_0 \\ B = DB_0 \end{cases}$.
(comme avec les entiers, l'unicité vient en imposant le signe)

On prolonge le degré.
Partie entière de $\frac{A}{B}$: quotient de A par B, noté $\left\lfloor \frac{A}{B} \right\rfloor$ (comme les rationnels : $\frac{a}{b} = \frac{bq+r}{b} = q + \frac{r}{b}$).
On a un casssage $K(X) = K[X] \oplus \{F ;\ \deg F < 0\}$, donc la partie entière est linéaire. (pourquoi ca ne marche pas avec les entiers ? parce que Z n'est pas un espace vectoriel, pas d'analogue de la base (X^n) ; si on prend une base, celle-ci est affecté par multiplication scalaire, contrairement aux X^n)

2 Evaluation des fractions rationnelles

Soit $\mathcal{A}$ une K-algèbre intègre et $\mathcal{K}$ son corps des fractions. On cherche à évaluer une fraction $\frac{P}{Q}$ en un élément $a \in \mathcal{A}$ donné.
On dit que a est un pôle d'une fraction $F = \frac{P}{Q}$ (forme irréductible) si $Q(a) = 0$.
On se place sur la sous-algèbre (lemme !) des fractions n'ayant pas a comme pôle. On peut alors définir

$$\operatorname{eval}_a : \begin{cases} K(X) \backslash \{F \text{ dont } a \text{ pôle}\} & \longrightarrow & \mathcal{K} \\ \frac{P}{Q} & \longmapsto & \frac{P(a)}{Q(a)} \end{cases}.$$

C'est un morphisme d'algèbres.
Exemples.
$\mathcal{A} = K[X]$ et $\mathcal{K} = K(X)$: alors eval_A est la composition par un polynôme. Remarquer qu'un polynôme A ne saurait être pôle d'une fraction $\frac{P}{Q}$, sinon $Q \circ A = 0$ d'où $Q = 0$.
$\mathcal{A} = \mathcal{K} = K(X)$: on retrouve la composition des fractions rationnelles (et le fait que .. soit un morphisme retraduit l'associativité).
$\mathcal{A} = \mathcal{K} = K$: on obtient alors la *fonction rationnelle*

$$\widetilde{F} : \begin{cases} K \backslash \{a \text{ pôle de } F\} & \longrightarrow & \mathcal{K} \\ \frac{P}{Q} & \longmapsto & \frac{P(a)}{Q(a)} \end{cases}.$$

$\lambda \in K$ est pôle d'ordre n d'une fraction $F = \frac{P}{Q}$ (forme irréductible) si a est racine de Q d'ordre n.

On prolonge la dérivation de $K[X]$ par $\left(\frac{A}{B}\right)' = \frac{A'B-AB'}{B^2}$. Sens ? Soit $\frac{A}{B} = \frac{P}{Q}$. On veut

$$\begin{aligned}
\frac{A'B-AB'}{B^2} &= \frac{P'Q-PQ'}{Q^2} \iff (A'B-AB')\,Q^2 = (P'Q-PQ')\,B^2 \\
&\iff \left(A'Q^2+BPQ'\right)B = \left(P'B^2+AQB'\right)Q \\
\overset{AQ=BQ}{\iff} \left(A'Q^2+AQQ'\right)B &= \left(P'B^2+PBB'\right)Q \\
&\iff A'Q+AQ' = P'B+PB' \\
&\iff (AQ)' = (BP)'\text{, vrai car } AQ = BP.
\end{aligned}$$

Attention, l'écriture $\frac{A'B-AB'}{B^2}$ n'est pas nécessairement la forme irréductible de F (déjà elle pourrait être nulle...)

Rq : si F est défini en a, so is F'. Mieux : si λ est pôle de F d'ordre n, alors λ est pôle de F' d'ordre $n+1$.

Démo

$$\left(\frac{A}{(X-\lambda)^n B}\right)' = \frac{A'B-AB'}{(X-\lambda)^n B^2} - n\frac{A}{(X-\lambda)^{n+1}B} = \frac{P}{(X-\lambda)^{n+1}B^2}$$

avec $P = (*)\,(X-\lambda) - nAB$ non nul en λ. Soit $\frac{U}{V}$ la forme irréductible. On a donc $\begin{array}{c} P = DU \\ (X-\lambda)^{n+1}B^2 = DV \end{array}$.

Puisque λ n'est pas racine de P, il n'est pas non plus racine de D, donc la valuation de λ dans V est $n+1$.

Pour la démo de Leibniz, une récurrence semble le seul moyen

3 Décomposition en éléments simples

DES : commecner dans Z (puis n'importe quel anneau factoriel)

dés : $\forall a \geq 1,\ \sum_{n\neq a} \frac{1}{a^2-n^2} = \frac{-\frac{3}{4}}{a^2}$

$[k(X):k] \geq \operatorname{Card} k$: la famille des $\frac{1}{X-a}$ est libre par unicité de la DÉS.

lemme 1 : une fraction $\frac{A}{P^n}$ de degré < 0 s'écrit

$$\frac{A}{P^n} = \frac{A_1}{P} + \frac{A_2}{P^2} + ... + \frac{A_n}{P^n}$$

avec $\deg A_i < \deg P$.

démo : div euclidiennes successives. Les $n-1$ premiers termes sont de degré <0 ; en prenant la partie entière, il reste $\lfloor F \rfloor = \left\lfloor \frac{R_n}{P} \right\rfloor$, lequel est de degré <0, *i. e.* $\deg R_n < \deg P$.

lemme 2 : une fraction de degré <0 se casse en

$$\frac{A}{P_1...P_n} = \sum \frac{A_i}{P_i}$$

où le dénominateur a été factorisé en produit de polynômes deux à deux étrangers.

Cor : on rajoute la partie entière.

def : un élément simple est de la forme $\frac{A}{P^n}$ où P irréductible et $.0 \leq \deg A < \deg P$ (et $n \geq 1$).

TH : $F = \frac{A}{P_1^{n_1}...P_r^{n_r}} = \lfloor F \rfloor + \sum_{i=1}^r \left(\frac{A_{i,1}}{P_i} + \frac{A_{i,2}}{P_i^2} + ... + \frac{A_{i,n_i}}{P_i^{n_i}}\right)$ où $\deg A_{i,j} < \deg P_i$

exemple $\frac{X^6}{(X-1)(X^2+1)^2} = E + \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta X+\gamma}{X^2+1} + \frac{\delta X+\varepsilon}{(X^2+1)^2}$.

Expliciter la partie entière par division euclidienne : on trouve $X+1$

multiplier par $X-1$ fournit $\alpha = \frac{1}{4}$ (heavyside coverup method)

multiplier par $\left(X^2+1\right)^2$ donne $\frac{-1}{i-1} = \delta i + \varepsilon$, d'où $\delta = \varepsilon = \frac{1}{2}$ (prendre des racines dans un sur-corps)

évaluer en 0 donne $1 - \frac{1}{4} + \gamma + \frac{1}{2}$, d'où $\gamma = -\frac{5}{4}$ (évaluer les fonctions rationnelles)

pour récupérer β, on multiplie par X et on prend la limite, d'où $\beta = -\frac{5}{4}$. (prendre des limites)

$$\frac{X^6}{(X-1)\left(X^2+1\right)^2} = X + 1 + \frac{1}{4}\frac{1}{X-1} - \frac{5}{4}\frac{X+1}{X^2+1} + \frac{1}{2}\frac{X+1}{\left(X^2+1\right)^2}.$$

illustrer l'invariance par conjugaison, (im)parité, conjugaison $\pm\sqrt{3}$etc... !

Cas des pôles de $\frac{A}{(X-\lambda)^n B}$. Heavyside donne le coef d'ordre n. En taylorisant le dénom Q, on trouve $B(\lambda) = \frac{B^{(n)}(\lambda)}{n!}$.

eg de tous poles simples : $\alpha_i = \frac{P(\lambda_i)}{Q'(\lambda_i)}$.

Décomsitoin selon puissances croissantes (horner à souhaits) : si $F = \frac{A}{B} = \frac{A}{X^n C}$, diviser A par C, mettons $A = CQ + X^n R$ (où $\deg Q < n$) donne $F = \frac{Q}{X^n} + \frac{R}{C}$.

eg de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

à la fin, faire joujou avec $\mathbb{Z}$.

RQ : la dérivation stabilie les fraction de même dénom irred (car elle met un puissance au denom). Ainsi, si $F = \frac{A}{B}$ (irred) a un dénom multiple de P, metton une partie $\sum_1^n \frac{A_i}{P^i}$, alors la pzrtie en P de F' est $\sum_1^n \frac{A_i' P^i - A_i i P^{i-1} P'}{P^{2i}} = \sum_1^n \frac{A_i' P - i A_i P'}{P^{i+1}}$ qui est irred car un divisuer commun vaut forcément (au denom) P donc divise (au numérateur) $A_i P'$, donc A_i ou P', ce qui est absrde. Donc le degré max de la partie en P augmente de 1.