Corps
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

Le terme « corps » a été introduit (en allemand : « Körper », d'où la lemme K ou k)) par Dedekind vers 1860 dans le contexte d'un corps de nombres (en allemand « Zahlenkörper » ; peut-être pas de degré fini sur $\mathbf{Q}$, mais peu importe).

1910 : Steinitz publie *Algebraische Theorie der Körper* (d'où son th sur les clot. aglq), ouvrage de synthèse. Il est le premier à exposer les résultats d'une enquête abstraite sur les corps (source : Léo Corry p192).

Henri Lombardi, *Épistémologie mathématique* (note dez bas de page p. 73)
*Galois utilisait la belle terminologie de « **champ de rationalité** » pour désigner un sous-corps de C.*

Jacqueline Boniface, *Hilbert et la notion d'existence en mathématique*, p. 103
Kronecker n'utilise pas le terme <<corps>> introduit par Dedekind ; il explique qu'il lui préfère celui de <<domaine de rationalité>> dont la connotation est selon moins spatiale. Il a d'ailleurs, pour cette même renoncé à l'expression <<secteur de rationalité>>, utilisée dans ses cours à l'université. [1881]

Issu du latin corpus, le mot corps est très ancien dans la langue française. Il désigne l'organisme dans sa composante matérielle. Il s'oppose ainsi à anima, âme. Dès le Moyen Âge, corps s'utilise aussi pour parler des corps célestes, certes inanimé, mais dont le mouvement n'était pas expliqué.

Au XVIIème siècle, les connaissances en biologie montrent la complexité du fonctionnement du corps. Le mot se met alors à désigner toute structure d'organisation complexe. On parle d'un corps de bâtiment, par exemple. Richard Dedekind introduit en 1877 la notion de corps. Il lui donne son nom qui s'impose face à celui de domaine orthoïde proposé par le mathématicien Gyula König. C'est le niveau de la structure qui l'amène à propos ce mot (voir Anneau). Il ajoute qu'il faut entendre le mot corps (Körper en allemand) dans le sens d'un corps d'armée

Albert Girard transforme X^3+pX+q=0} en ^{4Y^3-Y+\sin(3a)=0}, dont les solutions sont données par la trisection d'un angle. Il montre comment on peut représenter ces solutions comme trois cordes inscrites dans le cercle et enseigne à les construire géométriquement.

Vers 1633, il propose qu'une racine cubique soit notée «$\sqrt[3]{\cdot}$» et une racine cinquième «$\sqrt[5]{\cdot}$». Selon Florian Cajori, la première personne à adopter la suggestion de Girard est Michel Rolle (vers 1690) et Girard est le premier à écrire un exposant fractionnaire.

Girard introduit dans la même année, l'emploi des parenthèses et des crochets, qui est restée

Dans son livre sur L'invention nouvelle en l'algèbre, Girard est réellement le premier mathématicien à énoncer (de façon un peu floue et sans en fournir de preuves) le théorème fondamental de l'algèbre, auquel les historiens des sciences associent le plus souvent le nom de d'Alembert. Ce théorème, qui assure la factorisation de tout polynôme (réel chez Girard) dans le corps des nombres complexes sous la forme d'un produit de binômes, apparaît en 1629 sous cette forme :

« Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre. »

Le « Samielois » est néanmoins remarqué par Charles Hutton (1737-1823), qui, en 1815, fait dans *A philosophical and mathematical dictionary*l'exact catalogue de ce que la théorie des équations doit à Girard :

il est le premier à avoir compris la formation des coefficients des polynômes (Viète l'avait déjà vu dans le cas de polynômes scindés sur les réels positifs) ;

il est le premier à avoir compris la signification géométrique des racines négatives ;

il est le premier qui, incluant les racines complexes, comprend qu'il n'y a pas plus de racines que le degré de l'équation ne l'autorise ;

il est le premier à donner des règles pour sommer les puissances des solutions d'une équation.

Calcul des fractions :

Pourquoi un **numérateur** et un **dénominateur** ?

Le dénominateur dénomme, donne son nom à la fraction. Le numérateur, lui, indique le nombre de parties définies par le dénominateur.

nombre rationnels -> ratio, rapport.

Paradoxe de Simpson : $\begin{matrix} a/b < \alpha/\beta \\ c/d < \gamma/\delta \end{matrix} \not\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ (ceg graphique : $\begin{matrix} 1/3 < 2/5 \\ 4/2 < 3/1 \end{matrix}$ mais $\frac{1+4}{3+2} = 1 > \frac{5}{6} = \frac{2+3}{6}$). Interprétation contre intuitive en proba

.

corps = anneau où $A^{\times} = A - 0$ (et donc $1 \neq 0$: permet de classifier les ev sur un corps)

$(A, +, \times)$ **corps** ssi $(A, +)$ groupe et $(A^*, \times)$ groupe (et donc $1 \neq 0$ car $A^* \neq \emptyset$) (on pourrait donc dire **bi-groupe**)

un anneau integre fini est un corps

pas plus de deux racines carrés, car intégre

seuls idéaux sont triviaux, et réciproqument
morphisme de corps ets toujours injefctif
Pour K de caracctéristique nulle, on définit $\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{0 \leq i < n}(\alpha - i)}{n!}$.

K^* groupe multiplicatif : en déduire le nombre de carrés dans un corps fini.

LECON AGREG
extnesion, degré
nombres algébrique, transcendant, notation $k[a_1, ..., a_n]$
théorie de Galois

tout élément r non racine carré de -3 est somme de trois cubes :

$$\left(\frac{r^6 + 45r^4 - 81r^2 + 27}{6r\left(r^2+3\right)^2}\right)^3 + \left(\frac{-r^4 + 30r^2 - 9}{6r\left(r^2+3\right)}\right)^3 + \left(\frac{-6r^3 + 18r}{\left(r^2+3\right)^2}\right)^3 = r$$

(équivaut après $\times \left[6r\left(r^2+3\right)^2\right]^3$ à

$$\left(r^6 + 45r^4 - 81r^2 + 27\right)^3 + \left(\left(-r^4 + 30r^2 - 9\right)\left(r^2+3\right)\right)^3 + \left(6r\left(-6r^3 + 18r\right)\right)^3 = r\left(r^2+3\right)^6 (6r)^3$$

soit à (en posant $R := r^2$ et en envoyant le 2e terme à droite) ? ? ?

$$\left(R^3 + 45R^2 - 81R + 27\right)^3 + 6^6 R^3 (3 - R)^3 = 216R^2 (R+3)^6 + \left(R^2 - 30R + 9\right)^3 (R+3)^3$$

En carac $\neq 2$, si -1 est un carré, tout élément est somme de deux carrés :

$$\frac{(1+a)^2 + \sqrt{-1}^2 (1-a)^2}{4} = a.$$

un morphisme de corps est toujours inj, mais un endo peut-être surj. Idée : raiosnner avec des bases algébriques (comme en linéiares) sur le sous-corps premier. Contre eg : le tapis roulant de $\mathbb{Q}(X_0, X_1, ...)$ défini par $X_i \mapsto X_{i+1}$.

0.1 element algrbéicuqe

$\sqrt[n]{2}$ Qalg de deg n ($X^n - 2$ irrd sur Q)
$e^{\frac{2\pi i}{n}}$ est alg de deg $< n$ (en fait c'ets $\varphi(n)$)
$\cos\frac{2\pi}{7}$ de deg 3 : on a $c^3 + c^2 - 2c - 1 = 0$.
a est transcedant ssi $K[a] \simeq K[X]$.
unité de $K[a]$?
si a transcendant, les constantes (eg : $a = X$)
si algé, les $P(a)$ où $P \wedge \mu_a = 1$ (
COR : $K[a]$ corps ssi μ_a irred
(dem : $P(a)$ inv ssi $\exists Q$, $PQ(a) = 1$, ie ssi $\exists Q, \mu \mid PQ - 1$, ie ssi $\exists Q, \exists R, 1 = PQ - \mu R$)
EG : $K \hookrightarrow A =>$ μ_a irred sur K et $K[a] = K(a)$.
(autre démo si A K-alg intègre : multiplier par a est ing, donc surj !)

1 origine discrimniant

La trace d'une naissance nous est donnée par Charles-Ange Laisant (1841-1920) qui nous apprend1 —- que « à propos de l'équation $ax2 + bx + c = 0$ plusieurs auteurs ou professeurs, depuis un certain nombre d'années, ont adopté l'usage de désigner la quantité $b2 - 4ac$ sous le nom de réalisant. Il serait tout aussi raisonnable de l'appeler imaginarisant, puisque les racines sont réelles quand $b2 - 4ac > 0$ et imaginaires lorsque $b2 - 4ac < 0$. Si l'on tenait pour la brièveté du langage, à employer un mot spécial, pourquoi ne pas prendre alors celui de discriminant qu'on retrouvera plus tard dans les équations de degrés supérieurs et qui semble avoir conquis droit de cité ? C'est ce que font, du reste, beaucoup d'excellents professeurs. »