

Relations d'ordre (version chantier)

Marc SAGE

24 janvier 2018

Table des matières

1	Amuse gueule	2
2	Prolonger un ordre partiel	2
3	Problème d'extréma	2
4	Théorème du point fixe de Knaster-Tarski	3
5	Sur les parties stables par segment initial	3
6	Interlude sur les inf et les sup	4
7	Sur les ordres achevés	5
8	Sur les parties stables par segment initial (suite et fin)	5
9	Coda sur les parties convexes	6
10	Achèvement d'un ordre total	7
11	Achevement & transport de lois	9
11.1	sur $\leq$ (vers $\overline{O}$ total)	9
11.2	sur $\leq +$ (vers $\overline{O}$ distrib)	11
11.3	sur $\leq + 0$ (vers $\overline{O}$ rég)	12
11.4	Chemin alternatif (plus long & technique)	12
12	Induction noethérienne et beaux ordres	13
13	Une caractérisation de l'ordre des rationnels	14
14	Sur les ensembles bien ordonnés	14
15	Limites supérieures & inférieures	15
16	L'ordre achevé des partitions ensemblistes	16
17	Fonction de Möbius, formule d'inversion de Rota	18

Les pluriels de maximum, minimum et extremum sont respectivement maxima, minima et extrema (pas de s). Il semble toutefois que certains dictionnaires modernes tolèrent les pluriels en s.

Dans ordre, on appelle **segment initial** toute partie de la forme

$$\begin{aligned} I^{\leq a} &:= \{o \in O ; o \leq a\} && \text{segment initial large} \\ I^{< a} &= \{o \in O ; o < a\} && \text{segment initial strict} \end{aligned}$$

1 Amuse gueule

*Dénombrer les relations binaires sur un ensemble à n éléments qui sont symétriques.
 Compter de même les relations d'ordre total.*

Solution proposée.

Représentons une relation binaire par son graphe, *i. e.* un tableau $n \times n$ avec un croix dans la cas (a, b) ssi $a \mathcal{R} b$. Une relation symétrique est un tableau qui est entièrement déterminé par sa partie triangulaire supérieure au sens large (*i. e.* incluant la diagonale), laquelle contient $\frac{n^2+n}{2}$ cases. Comme l'on a 2 choix pour chaque case (est-ce qu'on la coche ou pas?), on a en tout $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ choix. Plus formellement, on pourra dire que l'ensemble des relations symétrique sur $\{1, \dots, n\}$ est en bijection avec l'ensemble des parties de $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 ; 1 \leq a < b \leq n\}$ (envoyer le graphe de la relation sur lui-même).

Concernant les relations d'ordre total, il revient à compter les relations d'ordre strict. Pour cela, en ordonnant les éléments $a_1, \dots, a_n$ de notre ensemble selon $a_{\sigma(1)} < \dots < a_{\sigma(n)}$, on se ramène à compter les permutations de $\{a_1, \dots, a_n\}$. Le nombre recherché est donc $n!$.

2 Prolonger un ordre partiel

Mq que tout ordre (partiel) fini se prolonge en un ordre total.

Solution proposée.

Regardons le cas fini : on dessine les poset et on rajoute des flèches : Si a et b pas comparables, on prolonge en imposant $a^- \leq b^+$ (pas d'élément en commun, sinon $a \leq b$)

Remarque. Pour généraliser à un nombre "qcq" d'étapes, on zornifie l'ensemble des ordres sur O prolongeant celui donné ordonné par "prolonge". Si C est une chaîne, l'union est clairement un ordre. Donc il y a élément maximal. Si pas total, on applique ce qui précède.

3 Problème d'extréma

1. On se place sur le quart de disque $D := \{(a, b) \in \mathbb{R}_+^2 ; a^2 + b^2 \leq 1\}$ muni de l'ordre produit. Déterminer (sous réserve d'existence) ses maximum, supremum et éléments maximaux.
2. Montrer par un contre-exemple que l'unicité d'un élément maximal ne garantit en rien qu'il s'agisse d'un maximum.

Solution proposée.

1. Il faut évidemment faire un dessin et observer que les points plus grands qu'un point A donné sont ceux qui se trouvent dans le quart de plan infini dont l'unique coin (bas gauche) est A . On voit ainsi où se trouvent les majorants (a, b) de D : ils doivent tous majorer les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ de D , donc doivent vérifier $a, b \geq 1$. Comme $(1, 1)$ majore clairement D , on a l'existence d'un supremum

$$\sup D = (1, 1).$$

Évidemment, pas de plus grand élément, sinon $\sup D$ serait dans D . Concernant les éléments maximaux, on voit aisément qu'ils forment le quart de cercle $\{(a, b) \in \mathbb{R}_+^2 ; a^2 + b^2 = 1\}$.

2. Le cours nous dit qu'il faut chercher dans les ordres partiels, par exemple les ordres produits. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ ordonné comme tel, la partie $\mathbb{R} \cup \{i\}$ n'a pas de plus grand élément, mais i est maximal et est le seul, tout réel $(x, 0)$ étant majoré par $(x + 1, 0)$.

4 Théorème du point fixe de Knaster-Tarski

Soit O ordre **achevé** (çed où toute partie admet un infimum (et un sup))

1. Soit $f \in O^O$ croissante. Mq f a un plus petit/grand point fixe (décrire pour $[0, 1]$ le plus petit tel point fixe).
2. Soit $f \in O^O$ croissante. Montrer toute partie de $Fix f$ a un inf et un sup.
3. Soit $F \subset O^O$ formé d'applications croissantes qui commutent. Mq qu'elles ont un point fixe en commun, puis que toute partie de $Fix F$ admet un inf / un sup. Nécessité de l'hyp de com ?

Solution proposée.

1. sur $[0, 1]$. On voit que le plus petit point fixe est l'inf de $X := \{x; f(x) \leq x\}$. Essayons
Soit $i := \inf X$. Pour $x \in X$, on a $i \leq x$, donc (par croissance) $f(i) \leq f(x) \leq x$, donc $f(i) \leq X$, d'où $f(i) \leq i$. Toujours par croissance, $f(f(i)) \leq f(i)$, donc $f(i) \in X$, donc $f(i) \geq \inf X = i$ et i est fixe. Si $o < i$ est fixe, alors $f(o) = o \leq o$, donc $o \in X$ et $o \geq \inf X = i$, abs.
2. Soit $F \subset Fix f$. Notons $i := \inf F$. On se place sur $I^{\leq i}$. Alors la croissance de f mq $o \in F \implies o \geq i \implies o = f(o) \geq f(i) \implies i \geq f(i)$, donc $I^{\leq i}$ est stable par f ($x \leq i \implies f(x) \leq f(i) \leq i$). mq $I^{\leq i}$ complet (soit $A \subset I^{\leq i}$. Alors $A^- \leq A \leq i$, donc $\inf A \leq i$). Alors f a un plus grand point fixe o : c'est le plus grand point fixe $\leq F$ (si m autre pt fixe, $m \leq F$ donc $m \leq i$, donc m fixe par f sur $I^{\leq i}$, donc $m \leq o$), ie $o = \inf F$ dans $Fix f$. On en dire $i = o$ fixe, CQFD. Idem pour sup en reversant.
3. Même démo. Si existe, il est dans l'inter des $\{x; f(x) \leq x\}$ pour f parcourt F . Posons i l'inf de cet ensemble X . Fixons $f \in F$. Alors $i \leq X$, donc $f(i) \leq f(X) \leq X$, donc $f(i) \leq \inf X = i$, d'où (croiss) $fg(i) = gf(i) \leq g(i)$ por tout $f \in F$, ie $f(i) \in X$, d'où $f(i) \geq \inf X = i$, CQFD.
Même démo : soit $A \subset Fix F$. Les $f \in F$ rstrictes à $I^{\leq \inf A}$ ont un plus grand pont fixe, qui est donc le plus grand minorant de A dans $Fix F$, ie l'infimum de A , d'où $\inf A \in Fix F$.
Dans paire totalement ordonnée $\{0 < 1\}$, les deux applications constantes croissent (ne commutent pas) et n'ont pas de pt fixe commun.

RQ : dans le cas de $[0, 1]$ et de deux fonctions, on peut remplacer "croissante" par "continues" (cf FGN analyse 1 p 217-218). Le CEG des app constantes mq l'hyp de comm est nécessaire.

Cf article orginail : A LATTICE-THEORETICAL FIXPOINT THEOREM AND ITS APPLICATIONS by ALFRED TARSKI

CF deux exos 7&10 pour plus de détails sur les ordres achévés et leur achèvemetrn.

5 Sur les parties stables par segment initial

Une partie A est dite $\leq$ stable si $a \in A \implies I^{\leq a} \subset A$.

1. Eg ? Mq notion passe à la réunion
2. Décrire $\leq A$ la plus petite partie $\leq$ stablee contenant A .
3. Mq A admet un sup ssi $\leq A$ en admet un.
4. Mq que les parties $\leq$ stables sont les réunion de segments initiaux.
5. Donner une CNS pour que le vide (resp. l'ordre entier) soit un segment initial.
6. Mq, si toute partie $\leq$ stable est un segment initial ou tout l'ordre, alors toute partie propre admet un sup.

7. On suppose l'ordre total et que toute partie a un sup. Mq toute partie $\leq$ stable est un segment initial.

Solution proposée.

1. Eg : tout l'ordre, le vide, segments initiaux (larges ou strict). Si $o \leq a \in \bigcup S_i$, alors $o \leq a \in S_i$ donc $o \in S_i \subset \bigcup S_j$.
2. Une telle partie doit contenir tous les a , donc tous les $I^{\leq a}$, donc $\bigcup I^{\leq a}$, que l'on vient de voir $\leq$ stable.
3. Il suffit de montrer que les majorants sont les mêmes. $A \subset \leq A$, donc un maj de $\leq A$ est un maj de A . Soit maintenant $m \geq A$. Soit $o \in \leq A$: écrivons $o \leq a \in A$, donc $o \leq a \leq m$, d'où $o \leq m$; finalement $\leq A \leq m$, CQFD.
4. $\Leftarrow$ clair ; pour $\Rightarrow$, dire qu'une partie est $\leq$ stable ssi elle vaut son $\leq$ stabilisé
5. $\text{supp } \emptyset$ segment initial : ce dernier doit être strict (car $I^{\leq a}$ jamais vide), disons $\emptyset = I^{< a}$. Alors personne n'est $< a$, donc a est minimal, ce qui fonctionne réciproquement. De même, si O segment, il ne peut être strict (car tout $o \in O \stackrel{?}{=} I^{< o}$), d'où un max, qui fonctionne.
6. on veut toute partie $\leq$ stable propre admet un sup, ce qui est vrai qd toute partie $\leq$ stable propre est un $I^?$ (ce qui est le cas)
7. Soit A propre stable par segment initial. Alors $A = \bigcup_{a \in A} I^{\leq a}$ a un sup s . Mq $I^{< s} \subset A \subset I^{\leq s}$. Déjà, $A \leq s$ d'où $A \subset I^{\leq s}$. Ensuite, soit $o < s = \min A^+$: o n'est pas un majorant, donc il y a un $a \in A$ tq $o \not\leq a$, ie $o < a$, d'où $o \in \bigcup_{a \in A} I^{\leq a}$.

Remarque. Dans 6 & 7, on peut montrer (cf exo 6) que "toute partie propre a un sup" $\Leftrightarrow$ "toute partie minorée a un inf", condition vérifiée pour les bons ordres, on le reverra pour comparer les bo (cf feuille ordiaux).

La dernière question peut faire penser aux convexes de réels qui sont des intervalles : on peut de fait tout reprendre avec les convexes, cf exo 9

On peut par ailleurs affaiblir l'hypothèse ordre total et montrer une équivalence (cf exo 8).

6 Interlude sur les inf et les sup

1. mq toute partie **non vide** admet un inf $\Leftrightarrow$ toute partie **majorée** admet un sup. Peut-on se passer de la l'hypothèse de majoration/non vacuité ? Mq on peut remplacer **non vide** par **propre**
2. mq toute partie **non vide minorée** admet un inf $\Leftrightarrow$ toute partie **non vide majorée** admet un sup. Mq on peut remplacer **non vide** par **propre** dans l'un ou l'autre des énoncés.
3. Mq toute partie (qcq, resp non vide, resp minorée) a un inf $\Leftrightarrow$ toute partie $\leq$ **stable** (qcq, resp non vide, resp minorée) a un inf $\Leftrightarrow$ toute partie **convexe** (qcq, resp non vide, resp minorée) a un inf

Solution proposée.

1. $\Rightarrow A^+$ est non vide ssi A majorée, et alors $\inf A^+$ est toujours un min
 $\Leftarrow A^-$ est majorée ssi $A \neq \emptyset$ (par n'importe quel elt de A), et alors $\sup A^-$ est toujours un max)
 CEG : $\mathbb{N}, \mathbb{R}^+$.
 Supp toute partie propre a un inf. Soit A mjrée (ie $A^+ \neq \emptyset$) : si $A^+ \neq O$, on peut conclure, sinon $\forall (o, a) \in O \times A$, on a $o \geq a$, donc A est un singleton, donc a un sup.
2. Meêm démo : A^+ minorée si A non vide (par n'importe quel elt de A).
 Supp toute partie propre minorée a un inf. Soit A non vide minorée. Si $A \neq O$, A a un inf ; sinon, $A = O$, or A minorée, d'où $\inf A = \min O$.
3. On a vu que $\leq A$ et A avaient même ensembmel de majorants. De plus, l'un est vide (resp. majoré) ssi l'autre est vide (resp majoré). Idem e remplaçant $\leq A$ par $\text{Conv} A := \bigcup_{a, b \in A} [a, b]$.

7 Sur les ordres achevés

Rappel : un ordre est **achevé**¹ si toute partie a un inf.

1. EG & CEG ? Rapport entre achevé et total ?
2. Mq un ordre est achevé ssi toute partie admet un supremum. En déduire que achevé $\Rightarrow$ borné.
3. Un morphisme d'ordre achevé est une application commutant avec sup. Mq morphisme pour ordre achevé $\Rightarrow$ morphisme pour ordre. Mq Fixf pour f endo achevé est achevé.
4. Mq un ordre est achevé ssi toute partie **propre** admet un inf et un sup (modulo une condition pathologique à préciser), ou encore (inutile, jsute pour le fun) ssi il y a un entier $n \geq 1$ tel que toute partie de complémentaire fini de cardinal $\geq n$ admet un inf et un sup.

Solution proposée.

1. Eg : tout ordre fini non vide (tout ordre achevé contient $\inf \emptyset$ donc est majoré $\rightarrow$ ceg $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{R}^+ \dots$), $[0, 1]$, qui se transporte en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ($\mathbb{R}$ n'est pas achevé, même s'il est complet au sens topologique), $\mathfrak{P}(E)$. Aucun rapport avec total : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont totaux mais pas achevés ; les $\mathfrak{P}(A)$ sont achevés mais pas totaux.
 2. supposons toute partie a un inf. Alors A^+ a toujours un inf, qui (cf cours) est alors un min. Pour la réciproque, idem en renversant l'ordre. Les majorats du vide sont tout le monde, donc $\inf \emptyset$ est le min cherché : idem pour $\max = \sup \emptyset$.
On aurait pu utiliser l'exo 6 précédent : $\emptyset$ a un inf, donc O a un max, donc on peut retenir "majorée" dans la conséquence "toute partie majorée a un sup".
 3. Soit f morphisme d'ordre achevé. Mq f croît. Soit $a \leq b$. Alors $f(b) = f(\sup \{a, b\}) = \sup f\{a, b\} = \sup \{f(a), f(b)\} \geq f(a)$. Si P partie de point fixe, alors $f(\sup P) = \sup f(P) = \sup P$.
 4. Si O fini non vide, l'équivalence est tautologiquement vraie $\Leftrightarrow$ vraie, donc OPS O infini.
Il nous faut montrer que $\emptyset$ a un sup et un inf, ie que notre ordre admet un max et un min, ce qui est impossible s'il est vide (bien qu'il vérifie alors les hypothèses). On casse $O = A \sqcup B$ avec A et B non vides, donc on prend $(\alpha, \beta) = (\inf A, \inf B)$ puis $i := \inf \{\alpha, \beta\}$; on a $i \in O = A \sqcup B$: si $i \in A$ alors $i \geq \inf A = \alpha \geq \inf \{\alpha, \beta\}$, donc $\alpha = i \leq \beta$ et $\alpha = \min O$ (idem pour B par sym).
- Il faut montrer que toute partie a un sup et un inf. Si A fini non vide, clair. Si A infini : on casse $A = F \sqcup B$ où F a n éléments, alors B a un inf, F un min, donc A aussi. Enfin, on casse $O = A \sqcup B$ avec A et B ayant au moins n éléments, et on peut recommencer la démonstration précédente.

8 Sur les parties stables par segment initial (suite et fin)

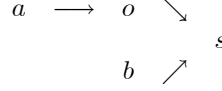
On définit un ordre **presque total** si un élément quelconque est comparable avec tous les autres sauf peut-être un, **presque achevé** si toute partie non vide a un sup.

1. soit ordre presque total et presque achevé. Montrer que les parties $\leq$ stables non vides sont des segments initiaux.
On suppose à présent que les parties non vides $\leq$ stables sont les segments initiaux.
2. Mq l'ordre est presque achevé.
3. Soient a et b incomparables. Montrer qu'il n'y a pas d'élément strictement compris entre a (oub) et $\sup \{a, b\}$.
4. En utilisant ce qui précède, conclure par l'absurde.
5. Peut-on se passer des hypothèses de non-vacuité ?

Solution proposée.

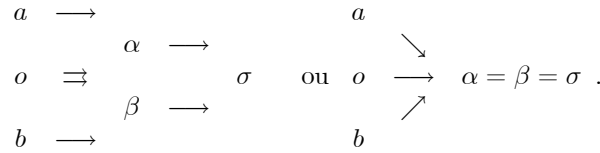
¹ On dirait aujourd'hui *complet*, avec les interactions malheureuses que l'on imagine avec la topologie.

1. On procède comme avant : une partie propre $A = \bigcup_{a \in A} I^{\leq a}$ stable par segment initial de sup s est toujours $A \subset I^{\leq s}$. Pour mq $I^{< s} \subset A$, on prend un $o < s = \min A^+$, d'où un $a \in A$ tq $o \not\geq a$. C'est là qu'il faut être plusfin. OPS $o \not\geq a$ (sinon A stable par $I^{\leq} \Rightarrow o \in A$). Donc o est comparable à tous les $a' \neq a$ de A et on a terminé si $o \leq a'$, d'où OPS $o > a'$; de même, a est comparable à tous les $a' \neq a$: or, $a' \geq a$ implique $o > a' \geq a$ contredisant la def de a ; donc $a' < a$ pour tout $a' \neq a$, ie $a = \max A$, d'où $o < s = \sup A = a$ CQFD.
2. A (non vide) et $\leq A$ ont même majorants, et $\leq A$ a un sup (car est un segment initial non vide).
3. Supp abs $a < o < s := \sup \{a, b\}$.



Alos $I^{\leq a} \cup I^{\leq b}$ ets un $I^{?x}$, avec $x \geq a, b$, d'où $x \geq s > o$, donc $o \in I^{< s} \subset I^{\leq a} \cup I^{\leq b}$, d'où $o \leq b$, mais alors $a < o \leq b$ sont comparables

4. Soient o pas comparables avec a et b ($\neq$). On note $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) := \left(\frac{\sup\{a,o\}}{\sup\{b,o\}}\right)$ et $\sigma := \sup \{\alpha, \beta\}$.



Puisque a, o incomparables, on a $\alpha > a, o$ et de mêm $\beta > b, o$. Mq α et β ne sont pas comparables. Si $\alpha > \beta$, alors $o < \beta < \alpha = \sup \{o, ?\}$, abs. Idem par sym. Si $\alpha = \beta$, $I^{\leq a} \cup I^{\leq o}$ est un $I^{?x}$, avec $x \geq a, o$, ie $x \geq \alpha = \beta > b$, d'où $b \in I^{< x} \subset I^{\leq a} \cup I^{\leq o}$, donc $b \leq a$, ie $b < a < \alpha = \sup \{b, ?\}$, abs.

Mq ensuite a et β incomparables : $a \geq \beta \Rightarrow a \geq o$, abs ; $\beta \geq a \Rightarrow \beta \geq a, o \Rightarrow \beta \geq \alpha$ abs. Alors $\gamma := \sup \{a, \beta\} \geq a, (\beta \geq o)$, donc $\gamma \geq \alpha$, or $\geq \beta$, dnoc $\gamma \geq \sigma$, mais alors $a < \alpha < \sigma \leq \gamma = \sup \{a, ?\}$, abs.

5. ON ve cmparer l'info " $\emptyset$ a un sup", ie " $\exists \min$ ", avec " $\emptyset$ est un $I^{?}$ ", ie " $\exists \text{minimal}$ ". Un sens est clair (cf 5. exo ?), mais la réciproque ne peut pas tenir, même avec les autre hypothèse : prendre un ordre total achevé, et lui rajotuer une "queue de poisson" (deux minimaux m et m') : alors toute partie $P \leq \text{stable}$ est $\emptyset = I^{< m}, \{m\} = I^{\leq m}, \{m'\} = I^{\leq m'}$, ou contient $\{m, m'\}$ (disons $P = P' \sqcup \{m, m'\}$, mais alors P' est un segment dans l'ancien ordre, donc P est le me^me segment) ; pourtant le vide n'a pas de sup car ya pas de min.

Remarque. ON peut tenter de rajouter une hypohtèse de propriété. Il est immédiat d'obtenir "si toute partie *propre* a un sup, alors les parties *propres* $\leq$ stables sont des $I^{?}$ ", la réciproque tennat pour les ordre *majorés*. CEG : $o < a, a' \in A = \{a, a'\} : A$ propre, mais $\leq A$ vaut tout et n'a pas de max (et pourtnat toute partie $\leq$ stable est un $I^{?}$)

ON peut tout refaire avec les convexes, cf exo 9.

9 Coda sur les parties convexes

REprendre exo 5 "sur les parties stables par seg minitial" avec *Convexe* si $a < o < a' \Rightarrow o \in A$ (stable par segment) et $[A]$, sans les deux dernières quetsion.

1. Eg : $\emptyset, O$, tout intervalle. Pb pour la réunion
2. Si $[A]$ stable par semgent, A contient $\bigcup_{a,b \in A} [a, b]$. Mq stable : $x < o < y$ avec $x \in [a, a']$ et $y \in [b, b']$ donne $a < o < b'$. En passant : $\leq A \cap A^{\geq} = \bigcup_{a,b} I^{\leq a} \cap I^{\leq b} = [A]$.
3. Puisque $[A] \subset A$, un maj de $[A]$ est un maj de A . De pus, si $m \geq A$, m majore tout segment, donc $\geq [A]$.
4. Une partie convexe vaut son $[]$, donc est *réunion de segments*.
5. Le vide est toujours un intervalle ouvert $]a, a[$. L'ordre entier est un intervalle ssi borné (et alrs $O = [\min O, \max O]$)

On suppose l'ordre preque-total et achevé. Mq toute partie convexe est un intervalle

Soit $A = [A]$ convexe. Soit i et s ses inf et sup. Mq $]i, s[\subset A \subset [i, s]$. A droite, clair. Soit $i < o < s$. Alors $\exists a, b, o \not\leq a$ et $o \not\leq b$. Par presue totalité, OPS $o > b$. Alors OPS $o \not\leq a$ (sinon $a < o < b$ et $o \in A$), de sorte que o et a sont incomparables, donc tout $a' \neq a$ est comparable avec o : comme avant, OPS $o \not\leq a'$, donc $o \leq a'$. De plus, $a' \leq a \implies o \leq a$ comparables, exclu, donc OPS $a' < a$, de sorte que $a = \max A$ et $b < o < s = \sup = \max = a$.

On suppose toute partie convexe est un intervalle.

A et $[A]$ ont même majorants, donc ordre est achevé. Mq presque total.

Supp abs $a < o < s := \sup \{a, b\}$. Alors $\{a, b\}$ est un segment $^i S^x$, avec $x \geq a, b$, d'où $x \geq s > o$, et $i \leq a < o$, d'où $o \in \{a, b\}$, abs

Soient o pas comparables avec a et b ($\neq$). On note $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\sup \{a, o\}}{\sup \{b, o\}}$ et $\sigma := \sup \{\alpha, \beta\}$. Puisque a, o incomparables, on a $\alpha > a, o$ et de même $\beta > b, o$. Mq α et β ne sont pas comparables. Si $\alpha > \beta$, alors $o < \beta < \alpha = \sup \{o, ?\}$, abs. Idem par sym. Si $\alpha = \beta$, on peut supposer par symétrie (vu ce qui vient) que $\inf \{a, o\} = \inf \{b, o\}$. Alors $\{a, o\}$ convexe, donc intervalle $^i I^s$, avec $s \geq a, o$, dnc $s \geq \alpha = \beta > b$, et $i \leq a, o$, donc $i \leq \inf \{a, o\} = \inf \{b, o\} < b$ de sorte que b tombe dans $^i I^s$, impossible.

Mq ensuite a et β incomparables : $a \geq \beta \implies a \geq o$, abs ; $\beta \geq a \implies \beta \geq a, o \implies \beta \geq \alpha$ abs. Alors $\gamma := \sup \{a, \beta\} \geq a, (\beta \geq o)$, donc $\gamma \geq \alpha$, or $\geq \beta$, donc $\gamma \geq \sigma$, mais alors $a < \alpha < \sigma \leq \gamma = \sup \{a, ?\}$, abs

Mq toute convexe propre est un intervalle (on un segment initial/final) ssi toute partie non vide minorée a un inf

$\implies$ soit A non vide minorée. Alors $[A]$ non vide minorée : si $= O$, alors O minorée et A a un min (celui de O), si $\neq O$, c'est un intervalle, donc minoré si intervalle ou $I^{\geq}$: si $I^{\leq a}$, alors tout $m \leq [A]^- \implies m \leq a \implies m \in I^{\leq a} \implies a \in [A]$, donc A a un min.

$\Leftarrow$ On rajoute m et M (min et max stricts). Mq $\bar{O}$ achevé : pour $P \subset \bar{O}$, si $P \setminus \{m, M\}$ non vide et minoré, alors ya un inf dans O ; si vide, alors O a un inf (m ou M) ; si non minorée, $m =$ plus grand minorant (sinon, $m' > m$ tombe dans O (pas possible en M)). Soit C convexe propre de O : c'est un convexe de $\bar{O}$, donc un intervalle i, s ; pas possible d'avoir $i = s \in \{m, M\}$ (sinon $C = \emptyset$) ni $(i, s) = (m, M)$ (sinon $C = O$) ; si $s = M$ et $i \in O$, alors $C = I^{\geq i}$, si $i = m$ et $s \in O$, alors $C = I^{\leq s}$; si $i, s \in O$, on retrouve l'intervalle dans O .

10 Achèvement d'un ordre total

Une application f entre ordres est dite **achevée** si chq égalité $f(\vee S) = \vee f(S)$ tient dès qu'elle fait sens. (CP : entre ordres achevés, être achevée $\iff$ préserver $\vee$).

Pour chaque partie $P \subset O$, on appelle $\vee$ **adhérence** de P l'ensemble $\bar{P}$ des éventuels *suprema* des parties de P et on dit que P est $\vee$ **dense** si $\bar{P} = O$ (çàd si chaque point de O est le *supremum* d'une partie de P).

Intuitivement, achever O est

1. rajouter à O des trucs pour obtenir un achevé (à commencer par les *suprema* qui ne seraient pas déjà dans O) (formellement, se donner un plgt d'ordres $i : O \hookrightarrow \tilde{O}$ de but $\tilde{O}$ achevé)
2. rien d'autre : chaque élément de l'achevé doit être le sup d'une partie de O (formlt, l'image $i(O)$ est dense)
3. sans toucher aux sup déjà en place² (formelmeent, dès que cela fait sens $i(\sup P) = \sup i(P)$ pour chaque $P \subset O$; çed i achevé)

Un **achèvement** de O sera donc défini par un morphisme achevé $i : O \hookrightarrow \tilde{O}$ à but achevé d'image dense.

On va montrer que chaque ordre total admet un achèvement unique à (unique) isomorphisme près (faisant commuter digramme évident)

1. Mq les trois propriétés définissant un achèvement sont indépendantes³.
2. Soit O ordre, soit $S \subset O$ un sousordre.

(a) Mq O achevé ssi $\forall S' \subset O, \bar{S}'$ est achevé.

(b) Mq S est dense dans O ssi $\forall o \in O, o = \sup_{s \in S}^s o$.

²évitte le cas de $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{\infty\} \hookrightarrow \mathbf{N} \cup \{\omega < \infty\}$ (inclusion canonique à but achevé) où l'on a au but $\omega = \sup \mathbf{N}$ $\infty = \sup \mathbf{N}$ (l'image est donc dense), décalant ainsi le $\sup \mathbf{N}$ source ∞ (morphisme non achevé!)

³çàd aucune n'est impliqué par les autres

- (c) Soit E tel que $O = \mathfrak{P}(E)$. Montrer alors que S admet un plus petit sur-ordre achevé.
3. En déduire que chaque ordre total se plonge dans un plus petit ordre achevé au sens de la relation $\hookrightarrow$ ($\exists$ morphisme achevé)
4. mq toute flèche entre ordres totaux se "prolonge" en une flèche entre les achevés (de façon unique si commute diagramme évident). En déduire que l'achèvement est fonctoriel, puis unique à unique iso près faisant commuter diagramme évident.

Solution proposée.

1.

- (a) $\text{Id}_{\overline{\mathbf{N}}}$ vérifie 2 3 pas 1. RQ : on n'a pas rajouté $\sup \mathbf{N}$
- (b) l'inclusion canonique $\{a\} \hookrightarrow \{a < b < c\}$ vérifie 1 3 pas 2 (c n'est pas un sup). Plus généralement $O \xrightarrow{o} \mathfrak{P}(O) \xrightarrow{I^{<o}} \{\infty\}$ qd O total⁴. RQ : on a rajouté trop de choses
- (c) l'inclusion canonique $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{\infty\} \hookrightarrow \mathbf{N} \cup \{\omega < \infty\}$ vérifie 1 2 pas 3 (on a au but $\omega = \sup \mathbf{N}$ $\infty = \sup \overline{\mathbf{N}}$). Rq ; on décalé le $\sup \mathbf{N}$ source ∞ .

2.

- (a) $\Rightarrow$ Soit $A \subset \overline{S}$, soit (A_i) famille de $A(S)$ tq $A = \{\sup A_i\}$, alors

$$\sup A = \sup_{i \in I} \sup A_i \stackrel{\text{associativité du supremum}}{=} \sup_{i \in I} \overbrace{\bigcup_{A_i \subset S}^{A_i}}^{A_i} \in \overline{S}.$$

$\leq$ Mq $\sup S$ fait sens (micro analyse : il doit valoir $\max \overline{S}$). $\overline{S}$ achevé, donc majoré, alors $\max \overline{S} \in \overline{S}$ et soit $A \subset S$ tq $\max \overline{S} = \sup A$. Alors $A \subset S \subset \overline{S} \leq \max \overline{S}$, donc $\max \overline{S}$ majore S et en est le plus petit maj ($m \geq S \Rightarrow m \geq A \Rightarrow m \geq \sup A \Rightarrow m \geq \max \overline{S}$), ce qui conclut.

- (b) $\leq$ trivial. $\Rightarrow$ Supposons S dense, soit $o \in O$, soit $A \subset S$ telle que $o = \sup A$. Pour chq $a \in A$, on a $a \leq \sup A = o$, d'où $A \subset \{s\}_{s \leq o}^{s \in S} \leq a$, donc a est le plus petit majorant de $\{s\}_{s \leq a}^{s \in S}$ (+pt car $m \geq \{s\}_{s \leq a}^{s \in S} \Rightarrow m \geq A$), ce qui conclut $a = \sup \{s\}_{s \leq a}^{s \in S}$.
- (c) Si l'on établit le caractère achevé de $\mathfrak{P}(E)$ (légitimant au passage l'invocation de E), l'adhérence $\overline{S}$ sera alors achevée (cf. 2a) et vérifiera la densité voulue (def de vadh). Or $\mathfrak{P}(E)$ est stable par $\cup$ qui est sup.

3. on plonge ordre O dans $\mathfrak{P}(O)$ via $o \mapsto I^{<o} =: \mathbf{o}$ (inj car : total et $a < b \Rightarrow a \in I^{<b} \setminus I^{<a} \Rightarrow I^{<a} \subsetneq I^{<b}$) où l'on considère l'adhérence de $\mathbf{O}$ (cf. 2c) notée $\overline{\mathbf{O}}$.

Soit $i : O \hookrightarrow A$ où A achevé, alors chq morphisme achevé $\overline{O} \rightarrow A$ faisant tout commuter doit envoyer $\alpha = \sup_{\mathbf{o} \leq \alpha} \mathbf{o}$ sur $\sup_{\mathbf{o} \leq \alpha} i(\mathbf{o}) \in A$, lequel morphisme (appelons-le $\tilde{i}$) est bien achevé : pour $S \subset \overline{\mathbf{O}}$, on a⁵

$$\tilde{i}(\sup S) \stackrel{\text{def. de } \tilde{i}}{=} \sup_{\mathbf{o} \leq \sup S} i(\mathbf{o}) \stackrel{O \text{ total}}{=} \sup_{\exists \sigma \in S, \mathbf{o} \leq \sigma} i(\mathbf{o}) \stackrel{\text{associativité du supremum}}{=} \sup_{\sigma \in S} \sup_{\mathbf{o} \leq \sigma} i(\mathbf{o}) \stackrel{\text{def. de } \tilde{i}}{=} \sup_{\sigma \in S} \tilde{i}(\sigma) = \sup \tilde{i}(S).$$

RQ catégorielle : on a mq chq morphisme $O \hookrightarrow A$ à but achevé se factorise par l'achèvement $o \mapsto \mathbf{o}$ d'une unique façon faisant commuter tel diagramme.

4. Si $f : O \rightarrow P$, on doit poser $\tilde{f} := \alpha = \sup_{\mathbf{o} \leq \alpha} \mathbf{o} \mapsto \sup_{\mathbf{o} \leq \alpha} f(\mathbf{o})$ (d'où unicité). On mq $\tilde{f}$ morphisme achevé comme à question 3.

$$\begin{array}{ccccc} O & \xrightarrow{f} & P & \xrightarrow{g} & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{O} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{P} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{Q} \end{array} \quad (\tilde{g} \circ \tilde{f} \text{ achève } g \circ f \text{ et commute comme il faut, donc vaut } \widetilde{g \circ f})$$

d'où l'unicité de $\tilde{O}$ à unique iso près (imposer $O = P = Q$ et $\tilde{O} = \tilde{Q}$ et $f = g = \text{Id}$ donne $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \text{Id}_{\tilde{O}}$ $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \text{Id}_{\tilde{P}}$).

⁴prendre $O = \{a < b\}$ et $\infty = c$ redonne exemple précédent

⁵En fait, on a toujours $\sup i(S) \leq i(\sup S)$ sous la seule condition " i croît" : $s \in S \Rightarrow s \leq \sup S \Rightarrow i(s) \leq i(\sup S)$.

Commentaire. Idée parallèle complétion où $E \hookrightarrow \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ dont on prend la fermeture (fermé dans complet).

Autre idée : coupure de Dedekind où un ordre se plonge dans ses parties $\leq$ stables (ie ses unions de $I^?$) via $a \mapsto I^{\leq a}$. Mais en explicitat le plongement de $O \hookrightarrow P(O)$, on retrouve la même description.

Autre idée : Cauchy Leray. On remplace les suites de Cauchy par des suites croissantes, et on quotiente par "avoir mêmes majorants". On peut alors remplacer suites croissantes par partie. Alors on a un représentant minimal dans chaque classe, le $\leq$ stabilisé., ce qui redonne les coupures.

Remarque catégorielle. Achever un ordre total est un pb universel.

11 Achevement & transport de lois

Soit O un ensemble ordonné. Pour chaque $o \in O$, on notera $C_o := \{e \in O ; e < o\}$ la *coupure initiale*⁶ associée et on abrège $c := \begin{cases} O & \longrightarrow \mathfrak{P}(O) \\ o & \longmapsto \mathfrak{o} := C_o \end{cases}$.

Une application f est dite *achevée* si chq égalité $f(\vee S) = \vee f(S)$ tient dès qu'elle fait sens. (CP : entre ordres achevés, être achevée $\iff$ préserver $\vee$).

Nommons des propriétés qui interviendront comme hypothèses, toutes vérifiées par $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_+$, $\mathbf{Q} \cup \{\pm\infty\}$ (cas visés d'application).

Lorsqu'une loi apparaît, elle régit implicitement l'ensemble O

(ordre) $\boxed{\text{tot}}$: l'ordre O est total $\boxed{2\vee}$: O finiment⁷ achevé
(c et ordre) $\boxed{c\vee}$: l'application c est achevée $\boxed{c\hookrightarrow}$: l'application c est injective
(c et lois) $\boxed{c*}$: l'application c préserve loi $*$ $\boxed{* \leq}$: loi & ordre compatibles
(lois & 0) $\boxed{\text{arch}}$: le monoïde ordonné $O \setminus \{\max\}$ est archimédien $\boxed{\text{rég}}$: chaque élément de $O \setminus \{\frac{\max}{\min}\}$ est régulier
 $\boxed{\exists \neq}$: il y a des différences dans $O \setminus \{\min\}$ au sens où $\forall \frac{o}{\text{min}} < p, \exists \frac{q}{\text{min}}, p = \frac{o+d}{e+d}$

Les restrictions sur les extrema sont là pour éviter que les extrema ne "polluent" les hypo : une fois retiré les extrema, $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ devient archimédien, $\mathbf{Q} \cup \{\pm\infty\}$ régulier et $\mathbf{N} \cup \{-\infty\}$ admet des différences.

RQ : c est à but achevé, son image $c(O)$ est $\vee$ dense dans $\overline{i(O)}$ ($\vee$ adhérence dans achevé), d'où l'équivalence

$$c \text{ est un achèvement de } O \iff \boxed{c\vee} \boxed{c\hookrightarrow}$$

11.1 sur $\leq$ (vers $\overline{O}$ total)

1. Mq $\boxed{\text{tot}} \iff \boxed{c\hookrightarrow} \boxed{c\vee} \boxed{2\vee}$.
CEG
Ainsi, si $\boxed{\text{tot}}$ alors c achèvera O , avec $\leq$ sous la faible condition $\boxed{2\vee}$ (comprise dans prémisses $\boxed{\text{tot}}$)
2. (**explicitation des parties de O denses dans $\overline{O}$**) Mq $\forall \alpha \in \overline{O}, \alpha = \sup_{\mathfrak{o} \leq \alpha} \mathfrak{o}$. PEut-on (sous le sup) remplacer $\leq$ par $<$?
3. (**lemmes densité très utile**) $\boxed{\text{tot}}$ Mq $\forall \alpha < \beta \in \overline{O}, \text{Card}[\alpha, \beta] \cap \mathbf{O} \geq 2$
 $\forall \alpha \in \overline{O} \text{ quelq}, \exists \mathfrak{o} \in O, \alpha < \mathfrak{o}$ (et dual dans l'autre sens)
CEG $\leq$
La traduction de l'hypothèse $\boxed{c\vee}$ véritablement la plus utile pour nous !
4. (**achever et total**) $\boxed{\text{tot}}$ Mq $\overline{O}$ total
CEG $\leq$
5. (**bonus**) $\boxed{\text{tot}}$ Mq $\mathfrak{o} \mapsto S_{\leq \mathfrak{o}}$ achevé ssi aucune suite de $O^{\mathbf{N}}$ strictement croissante ne cv. Commenter

⁶La lettre C réfère aux coupures de DEDEKIND. Observer l'identification de chaque élément de O à sa coupure initiale associée (identification ne gardant que la moitié d'une coupure-au-sens-originel-de-DEDEKIND).

⁷ie chq partie finie admet un sup, ie chq paire a un sup

6. (**bonus fastidieux**) On suppose O minoré. Notons $0 := \min O$ et appelons ι l'application $\text{Id}_{\overline{O}}$ dont on a modifié l'action sur $\mathbf{0} \mapsto \{0\}$ (au lieu de $\emptyset$) Mq $\overline{\iota c(O)}$ est un achèvement de O ssi $\overline{c} \hookrightarrow \overline{c\vee}$ et $\forall a > 0,]0, a[\neq \emptyset$. Commenter le cas $O = \mathbf{Q}_+$.

SOL

1. $\Rightarrow$ $a < b \implies a \in I^{<b} \setminus I^{<a} \implies I^{<a} \subsetneq I^{<b}$, d'où $\overline{c\vee}$. Soit $S \subset O$ admettent un sup, def $s := \vee S$, on a à $o \in O$ fixé les équivalences

$$o \in \vee S \iff o \in \bigcup_{s \in S} s \iff \exists s \in S, o \in s \iff \exists s \in S, o < s \xleftrightarrow{O \text{ total}} o < \vee S \iff o \in c(\vee S),$$

d'où égalité $\vee c(S) = c(\vee S)$ et $\overline{c\vee}$. Enfin, chaque a un max, d'où $\overline{2\vee}$.

$\Leftarrow$ Mq $a \not\leq b \implies \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ (alors deux $a \not\leq b$ incomparables vérifieront $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ çàd $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, çàd $a = b$, d'où $\overline{\text{tot}}$). Par contraposée. Soit $o \in \mathbf{a} \setminus \mathbf{b}$: alors $\begin{cases} o \notin \mathbf{a} \\ o \notin \mathbf{b} \end{cases}$, dc $o \notin \mathbf{a} \vee \mathbf{b} = c(o \vee b)$, d'où $o \not\leq o \vee b$; or $o \leq o \vee b$, d'où $b \leq o \vee b = b < a$.

CEG sans $\overline{\text{tot}}$ $\frac{a}{a'} < 1$ $A = \{\frac{a}{a'}\}$, alors $\frac{c(\vee A)}{\vee \mathbf{A}} = \frac{\mathbf{1}}{\vee \emptyset} = \frac{A}{\emptyset}$ (pas $\overline{c\vee}$) et c cst sur A (pas $\overline{c\vee}$) (on a qd même $\overline{c\vee}$)

pas de $\Leftarrow$ sans $\overline{2\vee}$: $\neg \mathbf{N}$ vérifie $\overline{c\vee} \hookrightarrow \overline{c\vee}$

2. cf exo 10 QQ 2b : $\mathbf{O}$ $\vee$ dense dans $\overline{O}$.

CEG avec compariasion *stricte* : dans $O = \{a < b\}$, $\sup_{\mathbf{O} < \mathbf{b}} \mathbf{a} = \vee \{a\} = a \neq b$ (plus généralement, si on $a <$, alors α est une limite strictement croissante, ce qui peut être bloqué par un "trou" à gauche de α , comme CEG où $\alpha = b$)

3. Soient $\alpha < \beta \in \overline{O}$, soit $b \in O$ tq $\alpha < b \leq \beta$ (cf. QQ 2 et $\overline{\text{tot}}$) et supp abs $\text{Card}[\alpha, \beta] \cap \mathbf{O} \leq 1$. Mq $b = \vee_{\mathbf{a} \leq \alpha} a$ DESSIN d'où $(\overline{c\vee})$ $\mathbf{b} = \vee_{\mathbf{a} \leq \alpha} \mathbf{a} = \alpha$ abs. Découle des équivalences à $m \in O$ fixé

$$m \geq \{a\}_{\mathbf{a} \leq \alpha} \xleftrightarrow{\overline{\text{tot}}} \underbrace{\vee_{\mathbf{a} \leq \mathbf{b}} \mathbf{a}}_{\mathbf{b}} \leq \alpha, \mathbf{m} \geq \mathbf{a} \iff \mathbf{m} \geq \{a\}_{\mathbf{a} \leq \mathbf{b}} \iff \mathbf{m} \geq \underbrace{\vee_{\mathbf{a} \leq \mathbf{b}} \mathbf{a}}_{=\mathbf{b}} \xleftrightarrow{\overline{\text{tot}}} m \geq b$$

CP : $\beta = \max \overline{O}$, alors $] \alpha, \max \overline{O}]$ rencontre $\mathbf{O}$

CEG sans $\overline{\text{tot}}$: $\lambda \neq \mu$ maximaux dans O , alors $\max \overline{O} \notin \mathbf{O}$ et $] \lambda, \max \overline{O}[$ évite $\mathbf{O}$.

$\Leftarrow$ fausse (tjs ???) : si O est $\frac{a}{a'} < b$ alors $\mathbf{O}$ est $\emptyset < \{\frac{a}{a'}\}$ achevé, soit $\alpha < \beta \in \overline{O}$, alors $\frac{\alpha = \mathbf{a}}{\beta = \mathbf{b}}$ et $\text{Card}[\alpha, \beta] \cap \mathbf{O} = 0$

RQ le lemme de densité *équivalent* en fait à $\overline{c\vee}$ (soit $A \subset O$ admettant $\vee A =:$ s, on a tjs $\vee \mathbf{A} \leq \mathbf{s}$, supp abs $<$, soit $\mathbf{o}$ entre, alors $\mathbf{o} \not\leq s$, çàd $\mathbf{o} < s$, d'où un $a \in A$ tq $\mathbf{o} < a$, çàd $\mathbf{o} < \mathbf{a}$, d'où $\mathbf{o} \leq \vee \mathbf{A}$, abs), bien que cette équivalence soit dissoute par l'hypothèse $\overline{\text{tot}}$ qui implique chacun des deux équivalents. Peut-on se passer de tot ???

4. Soient $\alpha, \beta \in \overline{O}$, soient $\frac{A}{B} \subset O$ tq $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\vee \mathbf{A}}{\vee \mathbf{B}}$, supp $\alpha \not\leq \beta$, soit $b \in B$ tq $\alpha \not\leq \mathbf{b}$. Si $b \geq A$, alors $\mathbf{b} \geq \mathbf{A}$, çàd $\mathbf{b} \geq \vee \mathbf{A} = \alpha$, d'où $\beta \geq \mathbf{b} \geq \alpha$. Soit sinon $a \in A$ tq $b \not\geq a$, çàd $\overline{\text{tot}}$ $b < a$, d'où $\overline{\text{tot}}$ $\mathbf{b} < \mathbf{a} \leq \alpha$ abs

CEG sans $\overline{\text{tot}}$: $\frac{a < b}{a' < b'} < c'$ alors $\frac{\mathbf{b} = \{a\}}{\mathbf{b}' = \{a'\}}$ sont incomparables.

$\Leftarrow$ fausse (tjs ???) si O est $\frac{a}{a'} < b$ alors $\mathbf{O}$ est $\emptyset < \{\frac{a}{a'}\}$ achevé donc $\overline{O} = \mathbf{O}$ total

5. Reprendre démo 1 mq $s(\vee A) = \vee s(A) \cup \{\vee A\}$, avec $\subsetneq$ ssi $\vee A \notin A$.

$\Rightarrow$ soit a suite strictement croissante cv, def l sa limite. Alors l'ensemble de ses termes admet un sup qui n'est pas dedans

$\Leftarrow$ Soit A donnant sens à $\vee A$. Si $\vee A \notin A$, on construit alors une suite $a \in A^{\mathbf{N}}$ stt croissante qui tend vers $\vee A$, abs

Typiquement quand $A = \mathbf{N}$ dans $\overline{\mathbf{N}}$.

RQ : me^me si $\mathbf{o} \mapsto S^{\leq \mathbf{o}}$ est tjs injectif sans hyp ($S_a \leq S_b \iff a \leq b$), vu que *chq* suite stt croissante appelle un sup, la flèche s est vraiment un mauvais candidat pour achever O ! (d'où préférence pour c , même si $\overline{\text{tot}}$ quasi-incontournable)

6. Notons $\tilde{O} := \overline{O} \setminus \{\mathbf{0}\} \amalg \{\{0\}\}$, de sorte que l'image modifiée $\{0\}$ reste minimale. Alors $\iota \circ c$ achève ssi inj, but achevé, image dense, morphisme achevé.

(a) Le but $\mathfrak{P}(O)$ reste achevé

- (b) L'image $\text{Im}(\iota \circ c) = \iota(\text{Im } c) = \iota(\mathbf{O})$ sera dense dans ssi chaque $\alpha \in \tilde{O}$ vaut $\vee_{\iota(\mathbf{o}) \leq \alpha} \iota(\mathbf{o})$. Tjs vrai si $\alpha \min$, sinon on a

$$\bigvee_{\iota(\mathbf{o}) \leq \alpha} \iota(\mathbf{o}) = \min \tilde{O} \vee \underbrace{\bigvee_{\min \tilde{O} < \iota(\mathbf{o}) \leq \alpha} \iota(\mathbf{o})}_{\substack{\Longleftrightarrow \min O < o \\ \text{alors } \iota(\mathbf{o}) = \mathbf{o}}} = \bigvee_{\substack{\mathbf{o} \leq \alpha \\ o > 0}} \mathbf{o} \stackrel{\alpha \geq \mathbf{0}}{=} \alpha.$$

- (c) *Mq ι est achevée.* Soit $A \subset \overline{O}$: l'égalité $\iota(\vee A) = \vee \iota(A)$ triviale si A vide ou singleton, sinon $A \not\subset \{\mathbf{0}\}$ d'où (en abrégiant $A^* := A \setminus \{\mathbf{0}\}$) $\vee A = \vee A^* > \mathbf{0}$ puis

$$\iota(\vee A) = \vee A = \vee A^* = \vee \iota(A^*) \stackrel{\iota \text{ croît}}{=} \vee \iota(A).$$

Démo identique pour la réciproque de ι (en notant $\tilde{O} := \overline{O} \setminus \{\mathbf{0}\} \amalg \{\{0\}\}$, alors et on se ramène aux $A \not\subset \{\min \tilde{O}\}$)

Csqce : en composant par $\iota^{\pm 1}$ achevé, on a équiva $\iota \circ c$ achevé $\Longleftrightarrow \boxed{\mathbb{C}\nabla}$

- (d) *Mq $\iota|_{\mathbf{O}}$ non inj ssi $\exists a > 0,]0, a[= \emptyset$.* $\Leftarrow$ Soit un tel a ; alors $\iota(\mathbf{a}) = \mathbf{a} = \{0\} = \iota(\mathbf{0})$
 $\Rightarrow$ Puisque $\iota = \text{Id}$ inj en dehors de $\emptyset$, soit $a > 0$ tq $\iota(\mathbf{a}) = \iota(\mathbf{0})$, çàd $\mathbf{a} = \{0\}$, çed $]0, a[= \emptyset$.

$$\text{Csqce } \iota \circ c \text{ inj} \Longleftrightarrow \left\{ \iota|_{\text{Im } c}^{\text{inj}} \right\}_{\text{c inj}} \Longleftrightarrow \left\{ \forall a > 0,]0, a[\neq \emptyset \right\}_{\boxed{\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}}}$$

Intérêt : quand $\mathbf{O} = \mathbf{Q}_+$ (on a $\boxed{\text{tot}}$ donc $\boxed{\mathbb{C}\nabla \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}}$, ainsi que densité autour de 0), le $\min \mathbf{0}$ n'est plus absorbant pour $+$ mais neutre. Ces pénibles vérifications pour livrer plus élégamment une construction de $\mathbf{R}_+$.

11.2 sur $\leq +$ (vers $\overline{O}$ distrib)

On régit désormais O par une loi $*$.

1. **(RQ simplif hyp)** $\text{Mq } \boxed{\text{tot}} \LongRightarrow \boxed{* \leq}$
2. $\boxed{\mathbb{C}} \text{ Mq } \min \overline{O}$ absorbant.
3. **(densité)** $\stackrel{\text{irrég} = > \max}{\boxed{* \leq \mathbb{C}}} \text{ Mq } O$ dense (dans lui-même)
CEG
4. *Mq $*$ induite sur $\overline{O}$ est compatible avec son ordre*
5. *Mq dans $\overline{O}$ commutent loi parites $*$ et sup $\vee$*
Dorénavant, nous n'aurons plus besoin d'explicitier l'achèvement c : seules les PTs ci-dessus ??? suffisent
6. **(achev & distrib)** $\boxed{\frac{\mathbb{C}+}{\mathbb{C}\times} \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}}$ $\text{Mq } \mathbf{O} \text{ distrib} \Longleftrightarrow O \text{ distrib}$, puis *mq $\overline{O}$ distrib ssi O distrib et si*

$$\forall b, c, p, q \in O, \forall \alpha \geq \sup\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}, \exists \mathbf{a} \leq \alpha, pb + qc = a(b + c).$$

En déduire $\boxed{\frac{\mathbb{C}+}{\mathbb{C}\times} \mathbb{C} \hookrightarrow \boxed{2\nabla}}$ $\overline{O}$ distributif ssi O distrib.

??? est-ce que $\boxed{2\nabla} \LongLeftarrow \overline{O} \text{ distrib} ???$

7. $\boxed{\mathbb{Q}3\mathbb{C}+}$ $\text{Mq } s \text{ reg} \Rightarrow s \text{ reg}.$
8. **(nésT hyp reg)** $\boxed{\frac{\mathbb{C}+}{\mathbb{C}\times} \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}}$ *Mq $\boxed{\nabla \mathbb{C}}$ dans $\overline{O} \Rightarrow \boxed{\nabla \mathbb{C}}$.*

11.3 sur $\leq + 0$ (vers $\overline{O}$ rég)

On dote désormais le magma $O+$ d'une unité notée 0 .

1. (nésT hyp archi) $\overline{arch} \sqsubseteq Mq \overline{reg}$ dans $\overline{O} \implies \overline{arch}$
2. (achev & archi) $\overline{tot} \sqsubseteq Mq \overline{arch}$ dans $\overline{O} \iff \overline{arch}$.
3. (PT absorb extr) $Mq \frac{\max \overline{O} \text{ absorbe } chq \geq 0}{\min \overline{O} \text{ absorbe } chq \leq 0}, mq \frac{\max \overline{O}}{\min \overline{O}} \text{ rég ssi nul.}$
 $\overline{arch} Mq \min \overline{O} \text{ absorbe ou bien } \frac{chq}{\text{aucun}} > 0.$
4. (lemme utile) $\overline{tot} \sqsubseteq \overline{arch}$ Soient $\frac{e > 0}{\alpha \in \overline{O}}$ tq $\alpha \geq \mathbf{e} + \alpha$. $Mq \alpha$ est irrégulier, ou bien extrémal ou bien dans $\mathbf{O}$.
5. (achever et rég) $\overline{tot} \sqsubseteq \overline{arch}$ $Mq \overline{reg}$ dans $\overline{O} \iff \overline{reg}$
aucune $\leq$
CEG ???

11.4 Chemin alternatif (plus long & technique)

Dans notre dernière preuve, partant de $\alpha + \sigma = \beta + \sigma$, on se ramenait à $\alpha, \beta \in \mathbf{O}$ par densité puis à $\sigma \in \mathbf{O}$ par différences dans O et régularité de $\mathbf{O}$.

Une alternative serait de se ramener à $\sigma \in \mathbf{O}$ par différences dans $\overline{O}$ puis d'établir la régularité de $\mathbf{O}$ dans $\overline{O}$. Etablir $\overline{tot} \sqsubseteq \overline{arch}$ dans $\overline{O}$ nous a semblé plus technique, nous le présentons à la lectrice motivée pour s'exercer techniquement.

Nous supposons $\overline{tot} \sqsubseteq \overline{reg} \overline{arch} \sqsubseteq \overline{tot}$, on utilisera les lemmes de densité ainsi que dernier lemme utile.

1. (approximation) Soient $\alpha \in \overline{O}$ non extrem, soit $e > 0$. $Mq \exists a \in O$ non min tq $\mathbf{a} \leq \alpha < \mathbf{e} + \mathbf{a}$.
2. (différences dans $\overline{O}$) Soit $\alpha \in \overline{O} \setminus \mathbf{O}$ non min, soit $b \in O$ tq $\alpha < \mathbf{b}$. $Mq \exists \delta \in \overline{O}, \alpha + \delta = \mathbf{b}$.
3. Conclure

1. Si $\alpha \in \mathbf{O}$, prendre $\mathbf{a} := \alpha$ convient ($e > 0 \implies e + a > a \implies \mathbf{e} + \mathbf{a} > \mathbf{a}$). OPDI $\alpha \notin \mathbf{O}$.

montrons alors $\exists b \in O, \mathbf{b} < \alpha < \mathbf{e} + \mathbf{b}$

(pour conclure, on invoquera un $\mathbf{b} < \mathbf{a} \leq \alpha$: alors d'une part $a > b$ dc a non min, d'autre part $\mathbf{a} \leq \alpha < \mathbf{e} + \mathbf{a}$???)

Supp abs $\forall \mathbf{b} < \alpha, \alpha \geq \mathbf{e} + \mathbf{b}$, çàd $\mathbf{e} + \mathbf{b} < \alpha$ (car $\alpha \notin \mathbf{O}$). Psq $\alpha \notin \mathbf{O}$, l'inter $] \min \overline{O}, \alpha[\cap \mathbf{O} =] \min \overline{O}, \alpha[\cap \mathbf{O}$ est non vide, d'où un $\mathbf{p} < \alpha$; psq α non max, soit $\mathbf{q} > \alpha$ et def $q =: d + q$ (okcar p pas min)

Alors $M := \{\mathbf{m}\}_{\mathbf{m} + \mathbf{p} < \alpha}^{m \in \langle e \rangle}$ non vide (contient $\mathbf{0}$) d'où sens à $\sigma := \sup M$. Pour chq $\mathbf{m} \in M$, on a d'une part $\mathbf{m} + \mathbf{p} < \alpha$ donc (hypo abs) $\mathbf{e} + \mathbf{m} + \mathbf{p} < \alpha$, d'où $\mathbf{e} + \mathbf{m} \in M$, dc $\mathbf{e} + \mathbf{m} \leq \sigma$; donc $e + \sigma \leq \sigma$, d'où (lemme) σ extrem. Or $\mathbf{0} \in M$ dc $\mathbf{e} + \mathbf{0} \in M$ d'où $\sigma \geq \mathbf{e} > \mathbf{0}$ dc σ non min. "Par csq, σ maximal, doù $\sigma \geq \mathbf{d}$. Pr, on a $\forall \mathbf{m} \in M, \alpha > \mathbf{m} + \mathbf{p}$ d'où $\alpha \geq \sigma + \mathbf{p} \geq \mathbf{d} + \mathbf{p} = \mathbf{q}$, abs.

2. Def $\delta := \inf_{a+d=b}^{\exists \mathbf{a} < \alpha} \mathbf{d}$ (dessin!). Rq $\delta \geq 0$ (chq tel d est > 0 sinon $b = a + d \leq a$) Si $\alpha + \delta \in \mathbf{O}$, metton $= o$, soit $e + o = b$ (ok car $\mathbf{o} = \alpha + \delta \geq \alpha > \min \overline{O}$), alors $\mathbf{b} = \mathbf{e} + \mathbf{o} = \mathbf{e} + \alpha + \delta = (\mathbf{e} + \alpha) + \delta$, d'où une diff comme cherchée. OPDI $\alpha + \delta \notin \mathbf{O}$.

montrons alors $a + \delta \not\leq b$.

Pour chq $\mathbf{a} \leq \alpha$, soit $a+d = b$, alors $\mathbf{a}+\delta \leq \mathbf{a}+\mathbf{d} = \mathbf{b}$. Dc $b \geq \sup_{a+d=b} \{\mathbf{a}+\delta\} = \sup_{a+d=b} \mathbf{a} + \sup_{a+d=b} \delta = \mathbf{a}+\delta$.

Supp abs $\mathbf{a} + \delta < \mathbf{b}$

Comment : Pour établir $\mathbf{a} + \delta \geq \mathbf{b}$, çàd $\mathbf{a} + \inf_{a+d=b} \mathbf{d} \geq \mathbf{b}$, çàd $\inf_{a+d=b} \{\mathbf{a} + \mathbf{d}\} \geq \mathbf{b}$, il suffirait d'écrire (pour un tel a) $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{d} \leq \alpha + \mathbf{d}$. Mais pourquoi pouvons-nous faire rentrer le $\mathbf{a}+$ dans l'inf ? (à prouver ou bien CEG ???). C'est pourquoi approcher α par un élément $\mathbf{a}$ de $\mathbf{O}$.

Soit $\mathbf{b}' \in]\alpha + \delta, \mathbf{b}[$ (ok car $\alpha + \delta \notin \mathbf{O}$), soit $b = e + b'$, soit (cf 1) $\min < \mathbf{a} \leq \alpha \leq \mathbf{e} + \mathbf{a}$ (ok car α non min et $\alpha < \mathbf{b} \leq \max$), soit $a + E = b'$ (ok car $a \leq \alpha < b'$).

DESSIN

Alors $\delta = \inf_{o+d=b} \mathbf{d}$ (détailler en lemme) et, pr chaque tels o, d , on a $\begin{matrix} o + d \leq \alpha + d \leq e + a + d \\ b = e + b' = e + a + E \end{matrix}$ d'où $E \leq d$; dc $E \leq \delta$ d'où $\underbrace{a + E}_{=b'} \leq a + \delta \leq \alpha + \delta$, ABS

3. Soient α, β, σ avec σ non extrem tq $\alpha + \sigma = \beta + \sigma$, soient $\alpha \leq \mathbf{p} < \mathbf{q} \leq \beta$, ajouter livre $\mathbf{a} + \sigma = \mathbf{b} + \sigma$. Psq σ non max, soit $\mathbf{s} > \sigma$; psq σ non min soit $\mathbf{s} = \sigma + \delta$. Alors $+\delta$ donne $\mathbf{a} + \mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{s}$ et rég dans $\mathbf{O}$ conclut.

12 Induction noethérienne et beaux ordres

Un ordre est dit **noethérien** si toute partie non vide admet un élément minimal.

Mq cela équivaut à toute suite décroissante stationne (utiliser AC)

Mq pour qu'une propriété P portant sur les éléments d'un ensemble ordonné E noethérien soit toujours vraie, il suffit qu'elle vérifie pour tout $a \in E$ l'implication

$$[\forall x < a, P(x)] \implies P(a).$$

Solution proposée.

$\implies$ une suite stt décroissant n'a pas de min. $\leq$ si pas de min, on construit par récurrence une suite stt décroissante (il AC intervient pour choisir l'élément d'après).

Soit F l'ensemble des $x \in E$ pour lesquels $P(x)$ est fausse; si F était non vide, il aurait un élément minimal a ; par minimalité, $P(x)$ est vraie pour tout $x < a$, donc par hypothèse $P(a)$ serait aussi vraie, ce qui est contradictoire.

On appelle **anti-chaîne** toute partie d'éléments deux à deux incomparables.

MQ LASSE :

1. $\leq$ est noethérien et toutes ses anti-chaînes sont finies
2. pour toute suite (a_n) , il y a deux indices $i < j$ tq $a_i \leq a_j$
3. toute suite admet une sous-suite croissante

On parle alors d'un **bel ordre**.

EG?

Mq bel ordre passe au produit fini.

CEG si infini?

Mq les parties finies d'un bel ordre rdonnées par $\exists \hookrightarrow \geq Id$ forment un bel ordre.

Solution proposée.

2. $\implies$ 1. Par contraposée. Si $\leq$ pas noethérien, il y a une suite stt décroissante, donc pas de $i < j$ tq $a_i \leq a_j$. Si il y a une antichaine infinie, alors même impossibilité.

3. $\implies$ 2 on extrait ss croissant et lon prend les deux premiers termes.

1. $\implies$ 3 Soit (u_n) . Micro analyse : si ya sous-suite croissante, on peut trouver après chaque u_n un $u_{p>n} > u_n$, ce qui nous fait introduire $A := \{n ; \exists p > n, u_p \geq u_n\}$. Si $A \infty$, on extrait une ss croissante. Sinon, A bornée, donc APCR $p > n \implies u_p \not\geq u_n$; or, à n fixé, $\{p > n; u_p \not\geq u_n\}$ est fini, donc il y a $p > n$ tq $u_p < u_n$, d'où une suite stricteent décroissante, ce qui n'est pas.

EG : $\mathbf{N} \leq$, tout ensembl fini (car noeth et car ses anticaines sont finie).

Soit (u_n, v_n) suite. On extrait $u_{\varphi(n)}$ croissante, puis $v_{\varphi\psi(n)}$ croissante, d'où $\varphi\psi$ convient. (Rq : le procédé fonctionne pour faire passer au produit tout propriété du genre "toute suite a une sous-suite vérifiant Blurg".)

Si ordre infini, il y a une suite de singletons distincts, donc une antichaine infinie dans $P(O) \cong 2^O$, donc le produit infini 2^O n'est pas un bel ordre

Def d'un ordre : refl (Id , et c'est le seul), transt (composer : $g \circ f \geq f \geq Id$), antisym : si $f : A \hookrightarrow B$ et $g : B \hookrightarrow A$, alors $g \circ f$ est un $\text{inj} \geq Id$, donc vaut Id_A , d'où $a = g(f(a)) \geq f(a) \geq a$, ce qui montre $f = Id$ et $A = B$.

Soit (A_n) suites de parties finies. OPS $|A_0|$ min, mettons $A_0 = \{a_0^1, \dots, a_0^l\}$ puis $A_n = \{a_n^1, \dots, a_n^l, \dots\}$. On extrait alors $a_{\varphi_1(n)}^1$ crois, puis $a_{\varphi_1\varphi_2(n)}^2$ croiss... alors $A_0 \leq A_{\varphi_1 \dots \varphi_l(0)}$

(Sanitu check : tout segment initial est fini (à B fixé, alors $A \hookrightarrow B \geq Id \Rightarrow |A| \leq |B|$ et $A \leq \max B$), donc une suite stt décroissant donnerait un segment initial infini, abs. Donc ordre est bien noethérien).

EG : on ordonne les mots écrit avec un alphabet A fini en posant $m \leq m'$ si toutes les lettres de m se retrouvent dans le même ordre dans m' (mais pas forcément à la suite)

13 Une caractérisation de l'ordre des rationnels

Soit O un ordre total dénombrable dense⁸. Donner des exemples, puis montrer qu'ils sont tous isomorphes (aux extrema près). Peut-on se passer d'une hypothèse ?

Solution

Les rationnels sont un bon candidats. Mais également les rationnels de $]0, 1[$ ou ceux de n'importe quel intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. On pourra également remarquer que, si O et O' sont deux tels ordres, alors la réunion disjointe $O \sqcup O'$ ordonnée par $O < O'$ vérifie les même hypothèses, et de même pour une réunion dénombrable. Ainsi, les rationnels de tout ouvert de $\mathbf{R}$ sont candidats. On pensera également aux rationnels de dénominateurs une puissance d'un entier donné (les décimaux, les di-adiques, les tri-adiques...).

Idée : utiliser la densité pour engendrer tout le monde, comme une dichotomie pour récupérer tous les dyadiques de $]0, 1[$. On prend un élément a_1 , qui n'est pas min ni max, d'où $\underline{b}_1 < a_1 < \underline{b}_2$, puis par densité et non-extrémalité on a des $\underline{c}_1 < b_1 < \underline{c}_2 < a_1 < \underline{c}_3 < b_2 < \underline{c}_4$, ainsi de suite.

Pb : si on récupère bien les dyadiques, on évite tous les p -adiques ! Pour s'assurer qu'on a tout le monde, on va choisir les éléments que nous rajoutons parmi la liste ordonnée $o_1, o_2, o_3, \dots$ donnée par une bijection $O \simeq \mathbf{N}^*$. Plus précisément, on rajoute des éléments *minimaux*. Montrons alors que les n premiers éléments sont utilisés au bout de n étapes. Pour $n = 1$, on choisit o_1 . Supposons construits $2^n - 1$ nb dont $o_1, \dots, o_n$. Alors o_{n+1} est dans l'un des 2^n segments choisis, et le min des ces derniers ne peut être d'indice $\leq n$, ce qui conclut.

Si ordre pas total, on pensera à $\mathbf{Q}^2$ lexico (ou le carré lexico de n'importe quel exemple ci-dessus). Si pas dénombrable, prendre $\mathbf{R}$ ou n'importe quelle partie indénombrable entre $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q} \sqcup \mathbf{R}$. Si pas dense, prendre $\mathbf{Z}$, ou rajouter $\mathbf{N}$ à droite de $\mathbf{Q}$, ou rajouter $-\mathbf{N}$ à gauche de $\mathbf{Q}$.

14 Sur les ensembles bien ordonnés

On appelle *bon ordre*⁹ toute relation vérifiant la propriété suivante : toute partie non vide admet un plus petit élément. Par abus de langage, on appelle *bon ordre* tout ensemble bien ordonné (*i. e.* muni d'un bon ordre).

Les questions qui suivent sont assez largement indépendantes.

1. Exemples et contre-exemples de bons ordres ?
2. Montrer qu'un bon ordre est nécessairement total. Réciproque ?
3. Montrer que tout bon ordre O admet une fonction de choix, ie une fonction $f : \mathfrak{P}(O) \longrightarrow O$ telle que $f(P) \in P$ pour toute partie P (non vide).
4. Montrer qu'un ordre O est bon ssi toute fonction strictement croissante $f : S \longrightarrow O$ définie sur une partie S stable par f vérifie $\forall s \in S, f(s) \geq s$.

⁸Pour tous $a < b$ dans O , il y a un $o \in O$ tel que $a < o < b$.

⁹On évitera la confusion avec l'adjectif *noethérien* (préféré des algébristes) où l'on parle d'élément *minimal* et non de *minimum*.

5. Montrer que le nombre de bo P avec $P \subset [1, n]$ vaut $\lfloor n!e \rfloor$.
6. Montrer que l'on peut toujours définir un "successeur" dans un bon ordre (à l'exception d'un éventuel plus grand élément).
7. Montrer que les bons ordres sur $\mathbb{R}$ sont nécessairement au plus dénombrables.
8. Montrer qu'un bon ordre $(O, \leq)$ tel que $(O, \geq)$ soit aussi un bon ordre est nécessairement fini.

Solution proposée.

1. exemple typique : $\mathbb{N} \leq$ (équivalent à la récurrence). Ceg : cf 2.
2. Soit a et b deux éléments que l'on cherche à comparer. La partie $\{a, b\}$ est non vide, donc admet un plus petit élément, *CQFD*. CEG : **Z, Q, R**. Vrai si fini (prendre les min successifs)
3. Il suffit de choisir le plus petit élément : $f(P) := \min P$ (qui existe car $P \neq \emptyset$).
4. $\Rightarrow$ Supposons par l'absurde que la partie $C := \{s \in S ; f(s) < s\}$ (chimérique) est non vide et notons $c := \min C$. Puisque $c \in C$ on a $f(c) < c$, d'où par croissance stricte $f(f(c)) < f(c)$, i. e. $f(c) \in C$, d'où $f(c) \geq \min C$, i. e. $f(c) \geq c$, ce qui est contradictoire.
 $\Leftarrow$ Par contraposée : Supposons O pas bien ordonné. Il admet donc une suite strictement décroissante. Soit (s_n) une telle suite. Notons S l'ensemble de ces termes et définissons $f : \begin{cases} S & \longrightarrow O \\ s_n & \longmapsto s_{n+1} \end{cases}$. Alors f croît strictement et vérifie $\forall s \in S, f(s) < s$.
5. Pour obtenir une partie de $[1, n]$ bien ordonnée, on choisit le nombre d'élément (en $\binom{n}{k}$ choix), puis on ordonne ces éléments successivement ($k!$ choix), d'où $|\mathfrak{B}(n)| = \sum_{k=0, \dots, n} k! \binom{n}{k} = n! \sum_{k=0, \dots, n} \frac{1}{k!}$. Or, il est classique que $0 < e - \sum_{k=0, \dots, n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!}$, d'où le résultat.
6. Soit B un bon ordre. Pour définir le successeur d'un élément $a \in B$ qui n'est pas maximal¹⁰, on a envie de considérer le plus petit élément qui est $> a$. Ce dernier existe bien car la partie $\{b \in B ; b > a\}$ est non vide (a n'étant pas maximal), donc admet un plus petit élément $s(a)$.
7. Soit B un bon ordre sur $\mathbb{R}$. À tout élément $b \in B$ (autre qu'un éventuel plus grand élément) on associe son successeur $s(b) > b$. On peut alors piocher¹¹ un rationnel dans l'intervalle $]b, s(b)[$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui permet d'injecter $B \setminus \{\max B\}$ dans $\mathbb{Q}$, *CQFD*.
8. On regarde les successeurs de $m := \min O$ (qui existe puisque $\leq$ est un bon ordre), au sens ci-dessus. Si la suite $(s^{ok}(m))_{k \geq 0}$ était bien définie, elle n'admettrait pas de plus grand élément, contredisant le fait que $\geq$ est un bon ordre : ceci montre qu'elle atteint $M := \max O$ (qui existe puisque $\geq$ est un bon ordre) au bout d'un nombre fini d'étapes. Par ailleurs, un élément de O se trouve nécessairement entre m et M (par définition des extrema) et ne peut se situer dans un intervalle $]x, s(x)[$ (par définition du successeur). Il en résulte que O est formé exactement des successeurs de m , lesquels sont en nombre fini par ce qui précède.

Remarque. La question 3 admet une réciproque (**th Zermelo**), qui est grandement clarifié une fois en main les ordinaux (cf feuille sur les ordinaux).

15 Limites supérieures & inférieures

Soit O ordre où toute suite admet un inf et un sup. On définit

$$\begin{aligned} \overline{\lim} a_n &= \inf_n \sup_{k \geq n} a_k \\ \underline{\lim} a_n &= \sup_n \inf_{k \geq n} a_k \end{aligned}$$

et on dit que a converge si ces deux limites sont égales.

1. eg $\mathcal{E}$ ceg de tels ordres ?

¹⁰ Un bon ordre étant total, les notions de *maximum* et d'*élément maximal* coïncident.

¹¹ Noter que l'on n'a pas besoin de l'axiome du choix : en effet, le rationnel $\left\lfloor x \left\lceil \frac{1}{y-x} \right\rceil \right\rfloor$ est toujours compris strictement entre deux réels $x < y$ donnés.

2. Montrer que $\lim a \leq \overline{\lim} a$. Interpréter dans le cas d'un $\mathfrak{P}(A)$ et en déduire *un encadrement à cinq termes* /
3. *montrer qu'une suite monotone converge vers son supremum*
4. On suppose ordre total. Mq toute suite admet ss cv.
5. Ceg?
6. (ensbliste) Mq A_n cv ssi $\forall a_n, b_n$ stt croissante on a $\bigcap A_{a_n} \Delta A_{b_n} = \emptyset$, ou encre ssi $A_{a_n} \Delta A_{b_n}$ cv vers $\emptyset$. (criète de Cauchy)

1. $[0, 1]$, tout segment de $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ achevé; $\mathfrak{P}(A)$ pour $\subset$. Pas $\mathbf{Z}$ (pas bornée) pas $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$.
2. Observer $\inf_{k \geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k \geq n} a_k$. Pour passer à sup/inf, on va désolidiser nos indices :

$$\forall p, q, \inf_{k \geq p} a_k \leq a_{\max\{p, q\}} \leq \sup_{k \geq q} a_k.$$

Ainsi, on peut prendre le sup en p , d'où $\lim \leq \sup_{k \geq q} a_k$ pour tout q , d'où en prenant l'inf $\lim \leq \overline{\lim}$ CQFD.

Dans un $\mathfrak{P}(A)$, $\inf = \cap$ et $\sup = \cup$, appartenir à tous sauf un nombre fini, appartenir à une infinité. On retrouve infsup et supinf. Puis $\bigcap \subset \lim \subset \overline{\lim} \subset (\text{appartenir à un nombre fini} \subset \bigcup)$

3. Soit a_n croissant et s son sup. On a $\sup_{k \geq n} a_k = s$, d'où en prenant l'inf $\overline{\lim} = s$. D'autre part, $\inf_{k \geq n} a_k = a_n$, d'où en prenant le sup $\lim = s$, CQFD.
4. on mq toute suite admet une sous-suite monotone : on prend un terme, et on cherche des termes plus grands à chaque fois, pour que ça marche bien on considère l'ensemble des $\{n ; \forall p > n, u_p > u_n\}$, soit il est infini ($u_p > u_q > u_r > \dots$), soit il est fini (on considère le max et on extrait sous-suite **décroissante** (c'est là qu'on utilise l'ordre total), et c'est fini.
5. Pour un ceg, prenons un $\mathfrak{P}(A)$ que l'on sait pas total et où l'on comprend mieux les limsup.inf. Soit $\varphi(n)$ extractrice. On veut des A_n tq appartenir à une infinité de $A_{\varphi(n)}$ n'implique pas appartenir à tous sauf un nombre fini, ie (cf feuille ens&app) on ne veut pas que toute choix de $A_{\varphi(n)}$ s soit fini ou infini. En choisissant les A_n injective, les $A_{\varphi(n)}$ le sont, ce qui conclut (écrire $\lim A_{\varphi(n)} \subsetneq \bigcap A_{\varphi(2n)} \subset \overline{\lim} A_{\varphi(n)}$)
6. $\sup \overline{\lim} A_n \subset \lim A_n$. Pour $x \in \overline{\lim} A_{a_n} \Delta A_{b_n}$, x est dans une infinité $A_{a_n} \Delta A_{b_n}$, donc dans une infinité de A_{a_n} ou une infinité de A_{b_n} , donc dans une infinité de A_n , donc dans tous sauf un nb fini, donc est dans $A_{a_n} \cap A_{b_n}$ apcr, absurde.
Suppo $\overline{\lim} A_{a_n} \Delta A_{b_n} = \emptyset$. Alors, puisque $\bigcap \subset \lim$, on a $\bigcap A_{a_n} \Delta A_{b_n} = \emptyset$.
Supp enfin $\bigcap A_{a_n} \Delta A_{b_n} = \emptyset \forall a, b$ stt croist. Soit $x \in \overline{\lim} \setminus \lim : x$ est dans une infiné de A_n , mettons $x \in \bigcap A_{p_n}$, et hors d'une infinité de A_n , mettons $x \in \bigcap^c A_{q_n}$. alors $x \in \bigcap A_{p_n} \Delta A_{q_n} = \emptyset$, absurde.)

16 L'ordre achevé des partitions ensemblistes

On appelle **partition ensembliste** (*set partition*) de E toute partie de $\mathfrak{P}(E)$ dont les éléments, appelés **parts** ou **orbites** (voire **cycles**) de la partition, ont une réunion disjointe qui vaut tout E . On note $\mathfrak{P}_E$ l'ensemble des partitions ensemblistes de E .

Dorénavant et par abus de langage, on dira « *partition* » tout court pour « *partition ensembliste* » et on laissera le contexte lever l'ambiguïté des cas (rares) où il nous faudra considérer la *famille* des parts.

Par exemple, tout groupe G agissant sur E donne lieu à une **partition orbitale**

$$\text{Orb } G := \left\{ \{g \cdot e\}_{g \in G} \right\}_{e \in E} \quad (1)$$

donnée par les orbites de G .

Soient π et ϖ (lire « *pi* et *pi script* ») deux partitions dans $\mathfrak{P}_E$. On dit que π **est plus fine que** ϖ si toute part de π est incluse dans une part de ϖ ; on dira également que ϖ **est plus grossière que** π .

La relation « est plus grossière que » est un ordre partiel sur $\mathfrak{P}_E$, appelé **ordre de grossièreté**¹² (son ordre opposé est dit **de raffinement**). Il admet un *minimum* $\{\{e\}\}_{e \in E}$ et un *maximum* $\{E\}$. En particulier :

$$\min \mathfrak{P}_E = \{ \{e\} \}_{e \in E} \quad \text{et} \quad \max \mathfrak{P}_E = \{E\}.$$

¹² à défaut de trouver un terme plus convenable (le dictionnaire de synonymes CRISCO ne nous y pas aidé)

Étant donnée une famille de groupes (G_i) qui agissent sur un même ensemble E , on utilisera le lemme suivant qui décrit la relation de conjugaison sous l'action du groupe engendré $\langle G_i \rangle$.

Lemme. Deux éléments $a, b \in E$ sont dans une même orbite pour $\langle G_i \rangle$ si et seulement si il y a une suite finie $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n$ de parties de E telle que :

1. chaque Ω_i est une orbite d'un certain groupe G_j ;
2. les points a et b appartiennent respectivement à Ω_0 et Ω_n ;
3. les orbites Ω_{i-1} et Ω_i se rencontrent pour tout $i = 1, \dots, n$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ On écrit $b = g(a)$ pour un certain $g \in \langle G_i \rangle$. Il y a donc des groupes $G_{i_1}, \dots, G_{i_n}$ et des éléments $g_k \in G_{i_k}$ pour tout $k = 0, \dots, n$ tel que $g = g_n \cdots g_0$. Notons Ω_k (pour tout $k = 0, \dots, n$) l'orbite du groupe G_{i_k} qui contient l'élément $a_k := g_{k-1} \cdots g_0(a)$:

$$a = a_0 \xrightarrow{g_0} a_1 \xrightarrow{g_1} a_2 \xrightarrow{\quad} \cdots \xrightarrow{g_{n-1}} a_n \xrightarrow{g_n} b.$$

Chaque orbite Ω_k est stable par G_{i_k} , donc contient, outre a_k , son image $g_k(a_k) = a_{k+1}$. Par conséquent, la suite $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n$ convient.

$\Leftarrow$ Notons a_k un point de $\Omega_{k-1} \cap \Omega_k$ pour tout $k = 1, \dots, n$ et posons $(a_0, a_{n+1}) := (a, b)$. Puisque a_k et a_{k+1} sont dans une même orbite Ω_k , il y a un élément g_k du groupe engendré $\langle G_i \rangle$ tel que $a_{k+1} = g_k(a_k)$, ce qui montre que

$$b = a_{n+1} = g_n(a_n) = g_n g_{n-1}(a_{n-1}) = \cdots = g_n \cdots g_0(a_0) = \underbrace{g_n \cdots g_0}_{\in \langle G_i \rangle}(a), \text{ c. q. f. d..}$$

1. Montrer que l'application $G \mapsto \text{Orb } G$ est croissante :

$$G \subset H \implies \text{Orb } G \leq \text{Orb } H.$$

2. Montrer que l'ordre de raffinement est achevé, et plus précisément que

le supremum d'une famille de partitions (π^i) est l'ensemble des orbites du groupe engendré par des groupes quelconques dont les ensembles d'orbites sont les π^i .

3. En déduire que $G \mapsto \text{Orb } G$ est un morphisme d'ordres achevés :

$$\text{Orb } \sup G_i = \sup \text{Orb } G_i.$$

4. Montre que deux éléments $a, b \in E$ sont dans une même part de $\sup \pi^i$ si et seulement s'il y a une suite finie de parts de certains π^i telle que la première contienne a , la dernière contienne b et telle que deux successives se rencontrent

On se donne une bijection $E \xrightarrow{\sim} F$

5. Montrer que φ induit une bijection $\Phi : \begin{cases} \mathfrak{P}_E & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{P}_F \\ \{\pi_i\} & \longmapsto & \{\varphi(\pi_i)\} \end{cases}$.

6. Montrer que Φ est morphisme d'ordres.

7. Montrer que Φ est un morphisme d'ordres achevés :

$$\forall (\pi^i) \in (\mathfrak{P}_E)^I, \quad \Phi(\sup \pi^i) = \sup \Phi(\pi^i).$$

Démonstration.

1. Toute part $\{g \cdot e\}_{e \in E}$ de $\text{Orb } G$ est trivialement incluse dans la part $\{h \cdot e\}_{e \in E}$ de $\text{Orb } H$.

2. Pour tout i , notons G^i un groupe tel que $\text{Orb } G^i = \pi^i$ (par exemple le sous-groupe de Young $\prod_j \mathfrak{S}_{\pi_j^i}$ qui agit transitivement sur chaque part π_j^i par transpositions). Montrons que

$$\bigvee \text{Orb } G^i = \text{Orb } \langle G^i \rangle.$$

$\boxed{\leq}$ Puisque $G^{i_0} \subset \langle G^i \rangle$ pour tout i_0 , on a par croissance de Orb la majoration $\text{Orb } G^{i_0} \leq \text{Orb } \langle G^i \rangle$, d'où l'inégalité $\leq$ en prenant le *supremum* sur les i_0 .

$\boxed{\geq}$ Soit π une partition majorant tous les π^i . Il s'agit de montrer que $\text{Orb } \langle G^i \rangle \leq \pi$, *i. e.* que toute part de $\text{Orb } \langle G^i \rangle$ est incluse dans une part de π .

Soit p une part de $\text{Orb } \langle G^i \rangle$ et a un point fixé dans p . Considérons un autre point $x \in p$. Le lemme nous donne une suite finie $\Omega_0, \dots, \Omega_n$ d'orbites de certains G^i telle que $(a, x) \in \Omega_0 \times \Omega_n$ et telle que $\forall k = 1, \dots, n, \Omega_{k-1} \cap \Omega_k \neq \emptyset$. Puisque π majore tous les G^i , chaque part Ω_k est incluse dans une part π_k de π . Or la condition de jonction $\Omega_{k-1} \cap \Omega_k \neq \emptyset$ montre que les parts π_{k-1} et π_k se rencontrent, donc sont égales; ceci tenant pour tout $k = 1, \dots, n$, les parts π_k sont toutes égales.

On vient de montrer que a et x étaient dans une même part π_x de π . Mais les parts π_x (lorsque x varie) se rencontrant toutes en a , elles doivent coïncider. Ainsi, tous les points $x \in p$ sont dans une même part de π , *c. q. f. d.*

3. L'application Orb , définie sur l'ordre des sous-groupes (d'un gros groupe agissant sur E) à valeurs dans l'ordre achevé $\mathfrak{P}_E$, transforme l'engendré en *supremum*. Or l'engendré n'est autre que le *supremum* pour l'inclusion dans les sous-groupes, ce qui conclut.
4. C'est le lemme.
5. Il suffit d'exhiber la réciproque $\{\varpi_i\} \mapsto \{\varphi^{-1}(\varpi_i)\}$.
6. On fixe deux partitions $\pi, \varpi \in \mathfrak{P}_E$ et on déroule les équivalences :

$$\begin{aligned} \Phi(\pi) \leq \Phi(\varpi) &\iff \forall i, \exists j, [\Phi(\pi)]_i \subset [\Phi(\varpi)]_j \\ &\iff \forall i, \exists j, \varphi(\pi_i) \subset \varphi(\varpi_j) \\ &\iff \forall i, \exists j, \pi_i \subset \varpi_j \\ &\iff \pi \leq \varpi. \end{aligned}$$

7. On fixe deux éléments $a, b \in E$ et on déroule les équivalences :

$$\begin{aligned} &a \text{ et } b \text{ sont dans une même part de } \bigvee \Phi(\pi^i) \\ &\xLeftrightarrow[\text{définition de } \Phi]{\text{critère 4}} \text{ il y a une suite finie de parts de certains } \Phi(\pi^i), \text{ mettons } \varphi(\pi_0), \dots, \varphi(\pi_n) \\ &\text{ telle que } (a, b) \in \varphi(\pi_0) \times \varphi(\pi_n) \text{ et } \forall k = 1, \dots, n, \varphi(\pi_{k-1}) \cap \varphi(\pi_k) \neq \emptyset \\ &\xLeftrightarrow{\varphi \text{ bijective}} \text{ il y a une suite finie } \pi_0, \dots, \pi_n \text{ de parts de certains } \pi^i \text{ telle que} \\ &\text{ } (\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) \in \pi_0 \times \pi_n \text{ et } \forall k = 1, \dots, n, \pi_{k-1} \cap \pi_k \neq \emptyset \\ &\xLeftrightarrow[\text{critère 4}]{\varphi \text{ bijective}} \varphi^{-1}(a) \text{ et } \varphi^{-1}(b) \text{ sont dans une même part } p \text{ de } \bigvee \pi^i \\ &\xLeftrightarrow[\text{définition de } \Phi]{\varphi \text{ bijective}} a \text{ et } b \text{ sont dans une même part } \varphi(p) \text{ de } \Phi\left(\bigvee \pi^i\right). \end{aligned}$$

17 Fonction de Möbius, formule d'inversion de Rota

Soit O ordre fini.

Si $a \leq b$, une *chaîne* de a vers b est une suite finie $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b$ où p est appelé *longueur*

On pose $c_p(a, b)$ le nombre de telles chaînes et $\mu(a, b) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p c_p(a, b)$ (nul si $a > b$) la *fonction de Möbius*.

Si $f \in \mathbb{C}^O$, on pose $\overleftarrow{f}(a) = \sum_{x \leq a} f(x)$ et $\overrightarrow{f}(a) = \sum_{x \geq a} f(x)$.

1. $m_q c_{p+1}(a, b) = \sum_{a \leq x < b} c_p(a, x)$

2. mq $\forall a \leq b$, lessommes $\sum_{a \leq x \leq b} \mu(a, x)$ et $\sum_{a \leq x \leq b} \mu(x, b)$ valent δ_a^b .
3. mq formule d'inversin Rota $f(a) = \sum_{x \leq a} \mu(x, a) \overleftarrow{f}(x) = \sum_{x \geq a} \mu(a, x) \overrightarrow{f}(x)$.
4. Cas de $\{1, 2, \dots, n\}$: que dit la formule d'inversion ?
5. Cas de $\mathbb{N}$ ordonné par divisise : mq $\mu(a, b) = \mu\left(\frac{b}{a}\right)$ usuel
6. Cas de $P(E)$ ordéone par $\subset$: mq $\mu(A, B) = (-1)^{|B|-|A|}$ et retrouver le crible avec $A_1, \dots, A_n$ fixé et pour $I \subset [1, n]$ $f(I) = \left| \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \notin I} {}^c A_j \right|$
7. Soit $\mathcal{A}$ un ensebmel fini d'hyperplan dans $V := \mathbb{F}_q^d$. On ordonne les parties de $\mathcal{A}$ par l'inclusion, ce qui revient à ordonner les intersections d'éléments de $\mathcal{A}$ (une telle inter s'écrit $I = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$) par l'ordre inverse, ce qui forme un ordre O , de sorte que $V = \bigcap_{\emptyset} = \min O$. Mq

$$\left| \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \right| = q^d - \sum_{I \in O} \mu(I) q^{\dim I}.$$

Solution proposée.

1. pour former une chaine de longueur $p+1$, on forme une chaine de longueur p jusqu'à un $x < b$, puis on rajoute $b := \sum_{a < x \leq b} c_p(x, b)$ (idem dans autre sens).
2. on utilise ce qui précède

$$\sum_{a \leq x \leq b} \mu(a, x) = \sum_{a \leq x \leq b} \sum_{p \geq 0} (-1)^p c_p(a, x) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \sum_{a \leq x \leq b} c_p(a, x) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p (c_{p+1}(a, b) + c_p(a, b)) = c_0(a, b) = \delta_a^b.$$

3. on utilise ce qui précède

$$\begin{aligned} \sum_{x \leq a} \mu(x, a) \overleftarrow{f}(x) &= \sum_{x \leq a} \mu(x, a) \sum_{i \leq x} f(i) = \sum_{i \leq a} \left(\sum_{x \leq a} \mu(x, a) \right) f(i) = \sum_{i \leq a} \delta_i^a f(i) = f(a) \\ \sum_{x \geq a} \mu(a, x) \overrightarrow{f}(x) &= \sum_{x \geq a} \mu(x, a) \sum_{i \geq x} f(i) = \sum_{i \geq a} \left(\sum_{x \geq a} \mu(x, a) \right) f(i) = \sum_{i \geq a} \delta_i^a f(i) = f(a). \end{aligned}$$

4. on trouve $\mu(a, a) = 1$, $\mu(a, a+1) = -1$ et 0 si $b > a+1$. L'inversion dit simplement que $f(a) = \overleftarrow{f}(a) - \overleftarrow{f}(a+1)$, donc $\overleftarrow{f}$ est une "intégration"
5. Qd $a \mid b$, noter $\mu(a, b) = \mu\left(1, \frac{b}{a}\right)$ (une chaine pour l'un est une chaine pour l'autre grace à homothétie rapport $a^{\pm 1}$). Alors $\mu(1, n)$ et le μ usuel arihtmétique satisfnt la même relatin de récurrence $\sum_{x \mid n} \mu(1, x) = \delta_x^n$ (pour le μ usuel, un diviseur de $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ où $a_i \geq 1$ qui n'annule pas μ est un $\prod p_i^{\varepsilon_i}$ avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, donc $\sum_{x \mid n} \mu(x) = \sum_{\varepsilon} \prod (-1)^{\varepsilon_i} = \sum_{A \sqcup B = \{0, \dots, n\}} \prod_A 1 \prod_B -1 = \prod (1 + (-1)) = \delta_0^n$). Rota donne Mobius usuel.

On peut en déduire nb N_q polynome irred sur corps fini : sur $F_{q^k} \supset F_q$, on a $X^{q^k} - X = \prod_{P \text{ irred deg} \leq k} P$, d'où en comptant les racines (toutes simples) $q^k = \sum_{l \mid k} l N_l$ et par mobius $N_k = \frac{1}{k} \sum_{l \mid k} \mu(l) q^{\frac{k}{l}}$

6. même idée, on mq même relation de rec. Proprement, réc sur $|B| - |A|$ Ok si nul, ie si $A = B$. Ensuite, on écrit $\sum_{A \subset X \subset B} (-1)^{|X|-|A|} \overset{\text{autant de parties paires}}{\underset{\text{que impaires}}{=}} 0 = \sum_{A \subset X \subset T} \mu(A, X) \overset{\text{réc}}{=} \sum_{A \subset X \subsetneq B} (-1)^{|X|-|A|} + \mu(A, B)$, CQDF

Noter que les $\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \notin I} {}^c A_j$ sont 2 à 2 disjointes : si $I \neq J$, disons $i \in I \setminus J$, alors un x dasn

l'inter doit tomber dans A_i et dans ${}^c A_i$. On aura besoin de leur union $\bigsqcup_{M \subset I} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \notin I} {}^c A_j \right)$: l'"indice"

I est $M \sqcup I'$ où I' décrit ${}^c M$, donc on a l'union $\bigsqcup_{I' \subset {}^c M} \left(\bigcap_{m \in M} A_m \cap \bigcap_{i \in I'} A_i \cap \bigcap_{j \notin M, J'} {}^c A_j \right)$ d'où sort un

facteur $\bigcap_{m \in M} A_m$ devant un reste de la forme $\bigcup_{X \subset E} \left(\bigcap_{x \in X} A_x \cap \bigcap_{y \in E \setminus X} {}^c A_y \right) \stackrel{\text{facto}}{=} \bigcap_{x \in E} (A_x \cup {}^c A_x) = E$ qui est neutre. Ainsi, à M fixé on a

$$\vec{f}(M) = \sum_{M \subset I} f(I) = \sum_{M \subset I} \left| \bigcap_{I \in i} A_i \cap \bigcap_{j \notin I} {}^c A_j \right| = \left| \bigsqcup_{M \subset I} \left(\bigcap_{I \in i} A_i \cap \bigcap_{j \notin I} {}^c A_j \right) \right| = \left| \bigcap_{m \in M} A_m \right|.$$

donc Rota s'écrit $f(I) = \sum_{I \subset J} (-1)^{|I|-|J|} \vec{f}(J)$; prendre $I = \emptyset$ redonne crible.

7. Cela revient à $\left| \bigcap_{H \in \mathcal{A}} {}^c H \right| = \sum_{I \in \mathcal{O}} \mu(I) q^{\dim I}$. Pour cela, on montre que $I \stackrel{?}{=} \bigsqcup_{J \subset I} J'$ avec $I' := I \cap \bigcap_{I \not\subset H} {}^c H$, d'où en prenant les cardinaux (avec $f(I) := |I'|$) $\vec{f}(I) = \sum_{J \geq I} f(J) = |I|$, d'où $f(I) = \sum_{J \leq I} \mu(J, I) |J|$: faire $I = V$ donne

$$\left| \bigcap_{V \not\subset H} {}^c H \right| = \sum_{J \leq V} \mu(J, V) |F_q^{\dim J}|, \text{ CQDF}$$

Montrons $I \stackrel{?}{\subset} \bigsqcup_{J \subset I} J'$ ($\supset$ trivial) : pour $i \in I$, posons $J := \bigcap_{i \in H \in \mathcal{A}} H$; l'inter contient les hyperplan définissant I , donc $J \subset I$. Alors par def $i \in H \implies J \subset H$, donc par contraposée $J \not\subset H \implies i \notin H \implies i \in {}^c H$, ce qui montre $i \in J'$.

Montrons la réunion disjointe : si $J, K \subset I$ sont différents, les hyperplans contenant J (K) ne sont pas les mêmes, mettons H contient J et pas K . Alors par def $K' \subset {}^c H$ et $J' \subset J \subset H$, donc sont disjointe