Relations binaires

Marc SAGE

18 octobre 2007

Table des matières

Les pluriels de maximum, minimum et extremum sont respectivement maxim**a**, minim**a** et extrem**a** (pas de s). Il semble toutefois que certains dictionnaires modernes tolèrent les pluriels en s.

Dans ordre, on appelle *segment initial* toute partie de la forme $I^{\leq a} := \{o \in O \; ; \; o \leq a\}$ ou $I^{<a} = \{o < a\}$ (segment initial *strict*).

1 Amuse gueule

Dénombrer les relations binaires sur un ensemble à n éléments qui sont symétriques.
Compter de même les relations d'ordre total.

Solution proposée.

Représentons une relation binaire par son graphe, *i. e.* un tableau $n \times n$ avec un croix dans la cas (a,b) ssi $a\mathcal{R}b$. Une relation symétrique est un tableau qui est entièrement déterminé par sa partie triangulaire supérieure au sens large (*i. e.* incluant la diagonale), laquelle contient $\frac{n^2+n}{2}$ cases. Comme l'on a 2 choix pour chaque case (est-ce qu'on la coche ou pas ?), on a en tout $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ choix. Plus formellement, on pourra dire que l'ensemble des relations symétrique sur $\{1,...,n\}$ est en bijection avec l'ensemble des parties de $\left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \, ; \, 1 \leq a < b \leq n\right\}$ (envoyer le graphe de la relation sur lui-même).

Concernant les relations d'ordre total, il revient à compter les relations d'ordre strict. Pour cela, en ordonnant les éléments $a_1,...,a_n$ de notre ensemble selon $a_{\sigma(1)} < \cdots < a_{\sigma(n)}$, on se ramène à compter les permutations de $\{a_1,...,a_n\}$. Le nombre recherché est donc $n!$.

2 Réseau de connaissances

La relation de connaissance sera supposée irréflexive et symétrique.

1. *Soient $n \geq 1$ personnes qui se conaissent (ou pas). Montrer que le nombres de personnes conaissant un nombre impair de personnes différentes) est pair. Montrer qu'il y a deux personnes connaissant le même nombre de personnes*
2. *Soient trois pays comportant chacun $n \geq 1$ personnes. On suppose que chaque personne a serré la main d'au moins $n+1$ personnes autre que de celles de son pays. Montrer qu'il y a trois personnes, une dans chaque pays, qui se sont serré la matin.*

3. soit le graphe de connaissance : le nombre de couples sommet âr^ret est pair, mais en compatn à sommet fixé on trouve ce qu'il faut.

   par l'absurde : n sommet, n valences distinctes de 0 à $n-1$, donc toutes utilsiée, mais 0 et $n-1$ impossible !
4. par l'absurde Soit A un personne dans 1. Elle connaît mettons a personnes (dont B) dans 2, donc au moins $n+1-a$ personnes dans 3 ; puisque pas de cercle, B connaît au plus $n-(n+1-a) < a$ personns dans 3 –> descente

3 Combinatoire dans les quotients

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble fini E à n éléments. On rappelle que $\sim$ est définie par son graphe qui est une partie de $E \times E$. Montrer que

$$|E|^2 \leq \left|{}^{E}\!/\!_{\sim}\right| \times |\sim|$$

et étudier le cas d'égalité.

Solution proposée.

Soit $E_1, ..., E_p$ les classes selon $\sim$, avec $p = \left|E/\sim\right|$ le nombre de classes. Explicitons chacun des termes en fonctions de ces données de base (rappelons que $\sim$ est entièrement déterminée par les E_i).

En dénombrant le graphe de $\sim$ selon la première coordonnée, on obtient

$$|\sim| = \#\left\{(a,b) \in E^2 \ ; \ a \sim b\right\} = \sum_{a\in E} \#\left\{b \in E \ ; \ a \sim b\right\} = \sum_{a\in E} \#\overline{a}.$$

Or les classes E_i partionnent E, donc la somme ci-dessus s'écrit aussi

$$\sum_{a\in E} \#\overline{a} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{a\in E_i} \#\overline{a} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{a\in E_i} \#E_i = \sum_{i=1}^{p} |E_i|^2 .$$

Par ailleurs, toujours car $E = E_1 \sqcup \cdots \sqcup E_p$, on a

$$|E|^2 = \left(\sum_{i=1}^{p} |E_i|\right)^2 .$$

L'inégalité à montrer se met donc sous la forme

$$\left(\sum_{i=1}^{p} |E_i|\right)^2 \leq p \sum_{i=1}^{p} |E_i|^2 .$$

Un Cauchy-Schwarz suffit alors pour démolir cet exercice.

On a égalité ssi toutes les classes d'équivalence ont même cardinal.

4 Sur la conjugaisons dans $\mathbb{R}$

On dit que deux applications f et g de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont *conjuguées*[1] s'il y a une bijection φ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

1. *Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence.*
2. *Les applications* cos *et* sin *sont-elles conjuguées ?*
3. *Donner une CNS pour que les appplication $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2 + ax + b$ soient conjuguées.*

Solution proposée.

1. La réflexivité est claire (prendre $\varphi = \mathrm{Id}$), tout comme la symétrie (tranformer les φ en φ^{-1} en les changeant de côté). En écrivant la conjugaison sous la forme

$$\exists \varphi \text{ bijective, } g = \varphi f \varphi^{-1},$$

la transitivité devient évidente :

$$\left\{\begin{array}{l} g = \varphi f \varphi^{-1} \\ h = \psi g \psi^{-1} \end{array}\right. \implies h = \psi\varphi f \varphi^{-1}\psi^{-1} = (\psi\varphi) f (\psi\varphi)^{-1} .$$

2. Supposons l'existence d'un φ bijectif tel que $\sin \circ \varphi = \varphi \circ \cos$. Testons des valeurs simples pour obtenir de l'information :

$$\sin \varphi(1) = \varphi(\cos 1) = \varphi(\cos(-1)) = \sin \varphi(-1) .$$

Par ailleurs, on peut encadrer $\varphi(\pm 1)$ dans un intervalle où sin est injective, ce qui fournit une contradiction :

$$\begin{array}{r} \varphi(1) = \varphi(\cos 0) = \sin(\varphi(0)) \\ \varphi(-1) = \varphi(\cos \pi) = \sin(\varphi(\pi)) \end{array} \in [-1, 1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

[1] Le lecteur connaisseur de la théorie des groupes reconnaîtra l'action (par conjugaison) du groupe des permutations de $\mathbb{R}$.

3. Posons $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = x^2 + ax + b \end{cases}$. Supposons dans un premier temps que f et g sont conjuguées. Il y a donc un φ tel que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi\left(x^2\right) = \varphi(x)^2 + a\varphi(x) + b.$$

Utilisant le carré, on applique à un réel x puis à son opposé $-x$, ce afin de faire la différence. On obtient

$$0 = (\varphi(x) - \varphi(-x))(\varphi(x) + \varphi(-x) + a).$$

On a envie de simplifier par $\varphi(x) - \varphi(-x)$, ce qui sera possible ssi $\varphi(x) \neq \varphi(-x)$, i.e. $x = -x$ (φ est bijectif), i.e. $x \neq 0$. On a donc pour tout $x \neq 0$

$$\varphi(x) + \varphi(-x) + a = 0 \implies 2\varphi(x) + a = \varphi(x) - \varphi(-x) \neq 0 \implies \varphi(x) \neq -\frac{a}{2},$$

ce qui force $\varphi(0) = -\frac{a}{2}$ par surjectivité de φ. Remplacer dans l'équation $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ donne

$$-\frac{a}{2} = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) + b \implies b = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} - 1\right).$$

Voici notre condition nécessaire. Si l'on suppose cette condition réalisée, cherchons une bijection φ simple conjuguant f et g. Essayons φ affine de pente 1. La condition $\varphi(x) + \varphi(-x) + a = 0$ montre que l'ordonnée à l'origine de φ vaut $-\frac{a}{2}$. Vérifions :

$$[g \circ \varphi](x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + a\left(x - \frac{a}{2}\right) + b = x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + ax - \frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} - 1\right) = x^2 - \frac{a}{2} = [\varphi \circ f](x).$$

Cela fonctionne.

Remarque. En notant $\alpha x^2 + 2\beta' x + \gamma = x^2 + ax + b$ notre trinôme, la CNS trouvée s'écrit aussi $\beta' = \beta'^2 - \alpha\gamma$, soit $\Delta' = \beta'$, ce qui équivaut à ce que l'extremum de ce trinome vale $\frac{\Delta'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha}$, soit l'opposé du point $-\frac{\beta'}{\alpha}$ où il atteint cet extremum. Géométriquement, cela revient à dire que le sommet de la parabole est sur la seconde bissectrice[2].

5 Vers les relations d'équivalences

Soit $\mathcal{R}$ relation binaire sur E.

1. *(description externe)* *Montrer qu'il existe une plus petite relation $\mathcal{R}^{ref}$, resp. $\mathcal{R}^{sym}$, resp. $\mathcal{R}^{trans}$, contenant $\mathcal{R}$ qui soit réflexive, resp. symétrique, resp. transitive.*
2. *(description interne)* *Comparer les relations $\mathcal{R}^{ref}$, $\mathcal{R}^{sym}$ et $\mathcal{R}^{trans}$ aux trois relations définies ci-dessous*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\dagger} &: = \mathcal{R} \cup \operatorname{diag} E \\ \mathcal{R}^{\natural} &: = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} \\ \mathcal{R}^{\rightarrow} &: = \bigcup_{n \geq 0} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E^2 \ ; \ \exists a = a_0 \mathcal{R} a_1 \mathcal{R} \cdots \mathcal{R} a_n = b \right\} \end{aligned}$$

3. *Montrer que les trois opérateurs $\dagger$, $\natural$ et $\rightarrow$ (vus comme applications de $\mathfrak{P}\left(E^2\right) \longrightarrow \mathfrak{P}\left(E^2\right)$) sont idempotents croissants et plus grands que l'identité. Commenter.*
4. *Montrer que $\dagger$ commute à $\natural$ et $\rightarrow$. Préciser $\mathcal{R}^{\rightarrow} \cup \mathcal{R}^{\dagger}$.*
5. *Montrer que $\natural \circ \rightarrow \circ \natural = \rightarrow \circ \natural$*
6. *En déduire une description de la plus petite re contenant $\mathcal{R}$.*
7. *Montrer que $\rightarrow \circ \natural \circ \rightarrow \supset \natural \circ \rightarrow$ avec pas égalité en général.*

Solution proposée.

[2] graphe de $-\mathrm{Id}$

1. On considère l'intersection de toutes les relations truc contenant $\mathcal{R}$ (il y a toujours la relation totale E^2). On vérifie que truc est stable par intersection !

2. On vérifie que $\mathcal{R}^?$ est truc et que réciproquement si $\mathcal{S} \supset \mathcal{R}$ est truc alors elle contient $\mathcal{R}^?$.

3. Idempotents : $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{ref}$ ssi réflexive, $= \mathcal{R}^{sym}$ ssi symétrique, $= \mathcal{R}^{trans}$ ssi transitive.

   Croissants : ref clair, sym aussi car $^{-1}$ croissant, trans aussi.

   $\supset$ Id : on rajoute des choses à la relations.

4. En remarquant que $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1}$Montrons de plus $\left(\mathcal{R}^\dagger\right)^\rightarrow = (\mathcal{R}^\rightarrow)^\dagger = \mathcal{R}^\dagger \cup \mathcal{R}^\rightarrow$.

$\subset$ Soit $\binom{a}{b} \in \left(\mathcal{R}^\dagger\right)^\rightarrow$. Il y a donc une suite finie $a = a_0 \mathcal{R}^\dagger a_1 \mathcal{R}^\dagger \cdots \mathcal{R}^\dagger a_n = b$. Si une relation n'est pas dans $\mathcal{R}$, elle tombe dans $\operatorname{diag} E$ et on peut la retirer si elle n'est pas tout seule (mais alors $\binom{a}{b} \in \operatorname{diag} E \subset \mathcal{R}^\dagger$), d'où une suite dans $\mathcal{R}$ et l'appartenance $\binom{a}{b} \in \mathcal{R}^\rightarrow$. On a donc $\left(\mathcal{R}^\dagger\right)^\rightarrow \subset \mathcal{R}^\dagger \cup \mathcal{R}^\rightarrow$.

$\subset$ On a $(\mathcal{R}^\rightarrow)^\dagger = \mathcal{R}^\rightarrow \cup \operatorname{diag} E \subset \mathcal{R}^\rightarrow \cup \mathcal{R}^\dagger$.

$\supset$ On applique d'une part la croissance de † à l'inclusion $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^\rightarrow$, d'autre part on applique Id $\subset$ $^\rightarrow$ à $\mathcal{R}^\dagger$, d'où $\mathcal{R}^\dagger \subset \left(\mathcal{R}^\dagger\right)^\rightarrow \cap (\mathcal{R}^\rightarrow)^\dagger$, de même en intervertissant $^\rightarrow$ et †.

Il s'agit de montrer que $\left(\mathcal{R}^\natural\right)^\rightarrow$ est symétrique. Soit $a \left(\mathcal{R}^\natural\right)^\rightarrow b$. Il y a une suite $a \mathcal{R}^\natural a_1 \mathcal{R}^\natural \cdots \mathcal{R}^\natural a_n = b$, d'où (par symétrie de $\mathcal{R}^\natural$) la même suite dans l'autre sens et $b \left(\mathcal{R}^\natural\right)^\rightarrow a$.

Il suffit de considérer $\mathcal{R}^{\dagger\natural\rightarrow}$. Noter que la place de † pas importante, mais question suivante montre que $\mathcal{R}^{\dagger\rightarrow\natural}$ n'aurait pas marché en général !

Inclusion claire car Id $\subset$ $^\rightarrow$.

On se demande alors si la symétrisation conserve la transitivité. C'est déjà faux pour E ayant deux éléments, eg $\{a < b\}$ (le symétrisé contient en plus juste $b < a$, donc sa transitivité impliquerait $a < a$). Ce ceg est d'ailleurs générique : si $\mathcal{R}^\natural$ est transitive, pour tout élément comparable, on a $a \mathcal{R}^\natural b$ et $b \mathcal{R}^\natural a$ d'où $a \mathcal{R}^\natural a$.

Ainsi, on doit se demander si la symétrisation conserve la transitivité réflexivité. On se donne donc $a \mathcal{R}^\natural b \mathcal{R}^\natural c$. Le cas qui pose pb est $a \mathcal{R} b$ et $c \mathcal{R} b$. D'ailleurs, pour $\mathcal{R}$ sur trois éléments avec juste ça et diagonale (c'est bien transitive), le symétrisé contient ab et bc mais pas ac.