Ordinaux (version chantier)

Marc SAGE

15 février 2011

Table des matières

1	Théorème de Cantor (comparaison des bons ordres)	2
2	Ordinaux (armatures des bons ordres)	3
3	Tout bon ordre est équipotent à son carré	6
4	Récursion ordinale – Induction transfinie	7
5	Théorème de Knaster-Tarski (point fixe et itération)	9
6	Théorème de Zermelo (AC et bons ordres)	9
7	Théorème de Koenig (majoration de cardinaux)	9
8	Théorème de Kuratowski-Zorn (AC et éléments maximaux)	10
9	Théorème de Specker (pas d'injection $\mathfrak{P}(A) \hookrightarrow A^2$)	10
10	Théorème de Kruse (sur les non-injections $\mathfrak{P}(A) \rightarrow A$)	11
11	Théorème de Tarski <i>via</i> Hartogs (pour bien ordonner)	12
12	L'hypothèse du continu généralisée implique l'axiome du choix	12
13	Cardinaux et alephs	13

Dans un ordre O , on appelle **coupure**¹ **initiale** toute partie de la forme

$$I^{\leq a} := \{o \in O ; o \leq a\} \quad (\text{coupure initiale } \mathbf{large})$$

$$\text{ou } I^{< a} = \{o \in O ; o < a\} \quad (\text{coupure initiale } \mathbf{stricte}).$$

On appelle **bon ordre**² sur un ensemble toute relation vérifiant la propriété suivante :

toute partie non vide admet un plus petit élément.

Par abus de langage, on appelle **bon ordre** tout ensemble bien ordonné (*i. e.* muni d'un bon ordre).

On rappelle qu'un bon ordre est total (vu que toute paire admet un minimum) et admet une fonction de choix, *i. e.* une application $c : \mathfrak{P}(O) \rightarrow O$ telle que $c(P) \in P$ pour toute partie P non vide (par exemple $P \mapsto \min P$). Le théorème de Zermelo (exercice 6) nous dira qu'une fonction de choix revient toujours à choisir un minimum. On observera également qu'un morphisme injectif de bons ordres croît strictement (puisque ces bons ordres sont totaux).

Cantor notait en 1895 pour un ensemble M (*menge*) son ordinal associé par $\overline{M}$ et son cardinal associé par $\overline{\overline{M}}$.

(source : de la méthode mathématique, dirigé par M. Serfait, p. 224)

1 Théorème de Cantor (comparaison des bons ordres)

Il sera commode d'englober un ordre dans l'ensemble de ses coupures initiales (ce qui est possible ssi cet ordre admet un maximum (contre-exemple : $\mathbf{N}$)). Pour ce faire, on appellera **coupure g -initiale** (g pour *générale*) d'un ordre O ou bien une coupure initiale stricte³ de O ou bien l'ordre O tout entier.

On dira qu'une partie est **$\leq$ -stable** si tout minorant d'un élément de cette partie reste dans cette dernière.

1. Montrer qu'une application strictement croissante d'un bon ordre dans lui-même est supérieure ou égale à l'application identité de ce bon ordre.
2. Montrer que, entre deux bons ordres, il n'y a qu'au plus un isomorphisme. En déduire l'automorphie d'un bon ordre.
3. Montrer que les parties $\leq$ -stables d'un bon ordre sont exactement les coupures g -initiales de ce bon ordre. Contre-exemple si l'ordre considéré n'est plus bien ordonné ?
4. Montrer que deux coupures g -initiales d'un bon ordre sont isomorphes ssi elles sont égales.
5. (**théorème de comparaison de Cantor, 1897**) Étant donnés deux bons ordres, montrer que l'un est isomorphe (avec unicité de l'isomorphisme) à l'une des coupures g -initiales de l'autre. (Hint : étudier la relation $a\mathcal{R}b \stackrel{\text{déf.}}{\iff} \exists I^{\leq a} \xrightarrow{\cong} I^{\leq b}$)
6. Que devient le théorème précédent si les ordres considérés ne sont plus bien ordonnés ?

Solution proposée. Soit O un bon ordre.

1. Soit $f : O \rightarrow O$ strictement croissante. Supposons par l'absurde que la partie $A := \{o \in O ; f(o) < o\}$ soit non vide. Elle admet alors un plus petit élément a . On a alors successivement

$$a \in A \stackrel{\text{déf. de } A}{\implies} f(a) < a = \min A \implies f(a) \notin A \stackrel{\text{déf. de } A}{\implies} f(f(a)) \geq f(a),$$
 contredisant la stricte croissance.
2. Soit Ω un bon ordre. Soient f et g deux isomorphismes de O vers Ω . Alors $g^{-1} \circ f$ est un automorphisme de O , donc croît strictement de O vers O ; la question 1 nous dit alors que $g^{-1} \circ f \geq \text{Id}_O$, d'où (par croissance de g) la comparaison $f \geq g$. Un argument symétrique nous donnerait la comparaison dans l'autre sens, d'où l'égalité $f = g$. Puisque Id_O est un automorphisme de O , elle est le seul⁴.

¹La littérature parle plutôt de *segment* initial, ce qui a l'inconvénient d'évoquer un caractère *fermé* – pourquoi pas *intervalle* initial ? Nous apprécions *coupure* car cela évoque (plus que simplement *intervalle*) l'action de *couper* l'ordre.

²On évitera la confusion avec l'adjectif *noethérien* (préféré des algébristes) où l'on parle d'élément *minimal* et non de *minimum*.

³Pourquoi se restreindre aux coupures *strictes* ? Soit un bon ordre O (l'objet de cet exercice). Soit $o \in O$. La coupure initiale large $I^{\leq o}$ est ou bien l'ordre O entier (si $o = \max O$) ou bien la coupure initiale stricte $I^{< s(o)}$ où $s(o) := \min \{x \in O ; x > o\}$ désigne le successeur de o .

⁴On pourrait en ce sens dire que les bons ordres sont une structure *rigide*.

3. Une coupure g-initiale est clairement $\leq$ -stable (par transitivité de $\leq$).

Soit S une partie $\leq$ -stable *stricte* de O . Pour trouver un a tel que $S = I^{<a}$, observons (micro-analyse) que cette dernière égalité impliquerait ${}^c S = I^{\geq a}$, d'où $a = \min I^{\geq a} = \min ({}^c S)$ (fin de l'analyse). Il est donc inévitable de définir $a := \min ({}^c S)$ (qui fait sens puisque S est stricte). On a alors les implications (à $o \in O$ fixé)

$$o < a \implies o < \min ({}^c S) \implies o \notin {}^c S \implies o \in S, \text{ d'où l'inclusion } I^{<a} \subset S.$$

Pour montrer l'inclusion réciproque $S \subset I^{<a}$, invoquons par l'absurde un élément s de $S \setminus I^{<a}$: on a alors successivement

$$s \notin I^{<a} \implies s \not\prec a \stackrel{O \text{ total}}{\implies} a \leq s \stackrel{S \leq\text{-stable}}{\implies} a \in S, \text{ ce qui n'est pas.}$$

Si l'ordre O n'est pas bien ordonné, le résultat peut encore tenir (par exemple si $O = -\mathbf{N}$ ou si $O = \mathbf{R}_-$) ou non (si $O = \mathbf{Q}$, la partie $\{q \in \mathbf{Q}; q^2 < 2\}$ est $\leq$ -stable mais n'est pas un coupure initiale).⁵

4. Montrons que O ne peut être isomorphe à l'un de ses segments initiaux stricts. Soient $o \in O$ et $f : O \rightarrow I^{<o}$ un morphisme : l'image de o tombe dans I_o , *i. e.* $f(o) < o$, empêchant (d'après la question 1) la stricte croissance de f , *a fortiori* que ce dernier soit un isomorphisme.

Montrons que deux segments initiaux distincts ne peuvent être isomorphes. Soient a et b distincts dans O . Puisque O est total, on peut supposer $a < b$ (quitte à échanger a et b). Alors $I^{<a}$ est un coupure initiale strict de $I^{<b}$ et le paragraphe ci-dessus s'applique en remplaçant O par $I^{<b}$ (bien vérifier que ce dernier est un bon ordre).

5. Soit Ω un bon ordre. Par commodité, on abrégera $I_o := I^{\leq o}$ pour tout $o \in O$.

Effectuons une brève analyse. Notons $\mathcal{R}$ comme dans l'énoncé. Soit f un isomorphisme $O \xrightarrow{\sim} \Omega$. Soit $o \in O$. Par restriction, f induit un isomorphisme $I_o \xrightarrow{\sim} I_{f(o)}$, ce qui montre $o\mathcal{R}f(o)$. Soit réciproquement $\omega \in \Omega$ tel que $o\mathcal{R}\omega$: on a alors un isomorphisme $I_\omega \xrightarrow{\sim} I_o$, d'où (puisque $I_o \xrightarrow{\sim} I_{f(o)}$) un isomorphisme $I_\omega \xrightarrow{\sim} I_{f(o)}$ et la question 4 nous donne l'égalité $\omega = f(o)$. Finalement, la relation $\mathcal{R}$ suggérée est nécessairement le graphe de l'isomorphisme cherché, ce qui nous donne une construction de ce dernier (au passage, la question 2 nous donne son unicité). Fin de l'analyse.

Appelons $\mathcal{R}$ la partie de $O \times \Omega$ formée des couples (o, ω) pour lesquels il existe un isomorphisme $I_o \xrightarrow{\sim} I_\omega$. Le point 4 montre que la relation $\mathcal{R}$ est biunivoque. Notons f la bijection associée à $\mathcal{R}$. Nous voulons montrer d'une part la stricte croissance de f , d'autre part que $\text{Dom } f$ et $\text{Im } f$ sont des coupures g-initiales dont l'une n'est pas stricte, *i. e.* (par le point 3) qu'ils sont $\leq$ -stables et non tous les deux stricts.

Montrons que $\text{Dom } f$ est $\leq$ -stable et que f croît (l'injectivité montrera alors sa *stricte* croissance). Soient $o \in \text{Dom } f$ et $o' < o$. Puisque $f(o)$ fait sens, on peut invoquer un isomorphisme $i : I_o \xrightarrow{\sim} I_{f(o)}$. Par restriction, on obtient un isomorphisme $I_{o'} \xrightarrow{\sim} I_{i(o')}$ (observer au passage la comparaison $i(o') \leq f(o)$), ce qui montre que $f(o')$ fait sens (*i. e.* $o' \in \text{Dom } f$) et vaut $i(o') \leq f(o)$, ce qui conclut la preuve de ce paragraphe. On montrerait de même que $\text{Im } f$ est $\leq$ -stable.

Montrons enfin que $\text{Dom } f$ et $\text{Im } f$ ne peuvent être tous deux des coupures initiales strictes. Soient par l'absurde $o \in O$ et $\omega \in \Omega$ tel que $\text{Dom } f = I^{<o}$ et $\text{Im } f = I^{<\omega}$. On a alors un isomorphisme $f : I^{<o} \xrightarrow{\sim} I^{<\omega}$, lequel (en rajoutant le couple (o, ω)) se prolonge en un isomorphisme $I_o \xrightarrow{\sim} I_\omega$, d'où (par définition de $\mathcal{R}$) l'appartenance $o \in \text{Dom } f = I^{<o}$, ce qui est absurde.

6. La démonstration ci-dessus repose sur le point 4 (pour établir le caractère biunivoque de $\mathcal{R}$) et sur le point 3 (pour montrer que domaine et image de $\mathcal{R}$ sont des coupures g-initiales). Ce dernier n'est cependant pas vraiment propre aux bons ordres : on pourrait essayer de comparer les ordres $-\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}_-$ (le théorème devient alors faux pour des raisons cardinales). Qu'est-ce qui ne fonctionne plus alors dans la preuve précédente? La relation $\mathcal{R}$ se trouve être vide... De fait, le point 4 (qui s'appuie sur le point 1) tombe en défaut : soustraire dans $-\mathbf{N}$ un naturel donné contredit le point 1 et montre que toutes les coupures initiales sont isomorphes! De même, les homothéties de $\mathbf{R}_-$ de rapport strictement plus grand que 1 établissent des isomorphismes entre toutes les coupures initiales strictes.

2 Ordinaux (armatures des bons ordres)

On va décrire une classe de bons ordres *classifiante*, au sens où tout bon ordre sera isomorphe à un élément de cette classe. Cela va permettre de généraliser l'induction entière.

⁵On décrit dans la feuille *Relations binaires* les ordres dont les parties $\leq$ -stables (non vides strictes) sont exactement les coupures initiales (au sens large).

On appelle **ordinal** tout ensemble bien ordonné dont tous les éléments valent leur coupure initiale stricte associée.

1. *Expliciter les premiers éléments d'un ordinal et commenter.*
2. *Montrer que, dans un ordinal, la relation d'ordre stricte est l'appartenance, la relation d'ordre (large) est l'inclusion et les éléments sont des ordinaux.*
3. *Montrer que le successeur d'un ordinal est un ordinal. En déduire que la relation $\in$ d'appartenance entre ordinaux est l'inclusion $\subsetneq$ stricte.*
4. *Montrer que la classe des ordinaux est totalement ordonnée (strictement) par l'appartenance. En déduire que la relation $\hookrightarrow$ de plongement⁶ entre ordinaux est l'inclusion $\subset$.*
5. *Montrer que la classe des ordinaux vérifie les propriétés définissant un ordinal.*
6. *La classe des ordinaux peut-elle être un ensemble ? être incluse dans un ensemble ? s'injecter dans un ensemble ? Traduire en termes de suites.*
7. **(classification des bons ordres par les ordinaux)** *Montrer que tout bon ordre est isomorphe (avec unicité de l'isomorphisme) à un unique ordinal. Interpréter en termes de suites et retrouver le cas fini.*

Solution proposée. On invoque trois ordinaux α , β et γ (que l'on désinvoquera pour la dernière question).

1. Notons $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ les premiers éléments de α . On a alors les égalités

$$\begin{aligned} a_0 &= I^{<a_0} = \emptyset, \\ a_1 &= I^{<a_1} = \{a_0\} = \{\emptyset\}, \\ a_2 &= I^{<a_2} = \{a_0, a_1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ a_3 &= I^{<a_3} = \{a_0, a_1, a_2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \dots \end{aligned}$$

On constate que les premiers éléments de α sont toujours les mêmes (ils ne dépendent pas de α) et que l'on a la chaîne d'appartenances

$$a_0 \in a_1 \in a_2 \in a_3 \in \dots$$

2. Soient a et b dans α . On a les équivalences

$$a \in b \iff a \in I^{<b} \iff a < b, \text{ d'où la première affirmation.}$$

Supposons $a \leq b$: on a alors les implications (à x fixé dans α)

$$x \in a \implies x < a \leq b \implies x < b \implies x \in b, \text{ d'où l'inclusion } a \subset b.$$

Dans l'autre sens, si $a > b$, *i. e.* si $b \in I^{<a}$, alors $b \in I^{<a} \setminus I^{<b}$, donc $I^{<a} \not\subset I^{<b}$, *i. e.* $a \not\subset b$, d'où par contraposée l'implication $a \subset b \implies a \not> b$ *i. e.* (car le bon ordre est total) $a \subset b \implies a \leq b$, ce qui finit de prouver la seconde affirmation.

Soit $o \in \alpha$. L'élément $o = I^{<o}$ est une partie du bon ordre α , donc est bien ordonné (pour $\in$). Soit de plus $a \in o$: montrons que a vaut la coupure initiale $I^{<a} = I^{<a}$ (dans o), à savoir $\{x \in o ; x \in a\} = o \cap a$. Cette égalité $o = o \cap a$ revient à l'inclusion $a \subset o$, ou encore (d'après ce qui précède) à la comparaison $a \leq o$; or l'hypothèse $a \in o$ se réécrit (toujours par ce qui précède) $a < o$, ce qui permet de conclure.

(Bonus : montrer qu'un ensemble bien ordonné par $\in$ est un ordinal ssi ses éléments en sont des parties.)

3. Montrons que $s(\alpha)$ est un ordinal. On veut (en particulier) $\alpha = I^{<\alpha}$, donc on ordonne $s(\alpha) = \alpha \amalg \{\alpha\}$ en imposant α comme maximum (on peut car l'élément α n'est pas dans la partie α du bon ordre $s(\alpha)$). Soit $P \subset s(\alpha)$ non vide : si $P \subset \{\alpha\}$, alors P admet clairement un minimum (α), sinon la partie $P \setminus \{\alpha\}$ de α est non vide, donc admet un minimum pour l'ordre de α , lequel est clairement un minimum pour l'ordre défini sur $s(\alpha)$. Enfin, la coupure initiale stricte d'un $\xi \in \alpha$ dans le bon ordre $s(\alpha)$ vaut

$$\begin{aligned} \xi \cap s(\alpha) &= \xi \cap (\alpha \amalg \{\alpha\}) = \underbrace{\xi \cap \alpha}_{=\xi \text{ (dans } \alpha)} \amalg \underbrace{\xi \cap \{\alpha\}}_{=\emptyset \text{ car } \alpha \text{ max.}} = \xi \end{aligned}$$

et celle de l'élément α vaut $\alpha \cap s(\alpha) = \alpha$.

⁶la structure ici considérée est celle d'ensemble ordonné, les plongements sont donc les applications strictement croissantes

En se plaçant dans l'ordinal $s(\beta)$, on a les équivalences $\alpha \in \beta \iff \alpha < \beta \iff \begin{cases} \alpha \leq \beta \\ \alpha \neq \beta \end{cases} \iff \alpha \subsetneq \beta$.

Remarque. Les questions 2 et 3 permettent d'engendrer une infinité d'ordinaux : les successeurs du vide (fait observé en 1)

4. L'antiréflexivité vient de $\alpha \notin \alpha$, la transitivité vient des implications $\begin{cases} \alpha \in \beta \\ \beta \in \gamma \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha \in \beta \\ \beta \subset \gamma \end{cases} \implies \alpha \in \gamma$. La question 3 montrant que $\in$ est $\subsetneq$ sur les ordinaux, la relation d'ordre large associée à $\in$ est $\subset$. Il reste à montrer que $\subset$ est totale.

Supposons $\alpha \not\subset \beta$. Notons $\mu := \min \alpha \setminus \beta$: l'élément $\mu \in \alpha$ est alors une partie $\mu \subset \alpha$ et il suffit pour conclure de montrer l'égalité $\mu = \beta$. Montrons déjà l'inclusion $\mu \subset \beta$. Soit par l'absurde $m \in \mu \setminus \beta$: puisque $\mu \subset \alpha$, on a $m \in \alpha$, donc $m \in \alpha \setminus \beta$, d'où $m \geq \min \alpha \setminus \beta = \mu$, contredisant l'appartenance $m < \mu$. Par ailleurs, μ étant par définition dans $\alpha \setminus \beta$, il n'est pas dans β , *i. e.* $\mu \notin \beta$, ce qui montre (sachant que $\in$ est $\subsetneq$) que l'inclusion $\mu \subset \beta$ ne saurait être stricte.

Soit $i : \alpha \hookrightarrow \beta$. Si $\alpha \subset \beta$, on a terminé (au passage, la réciproque est triviale vu que l'inclusion canonique croît strictement). Sinon, on a $\beta \in \alpha$: l'inclusion $\beta \subset \alpha$ permet alors de voir i comme un endomorphisme de α , lequel doit être (*cf.* exercice 1 question 1) plus grand que Id_α , d'où l'on tire $i(\beta) \geq \beta$, contredisant l'appartenance $i(\beta) \in \text{Im } i \subset \beta$.

5. La (classe) coupure initiale $I^{\in \alpha}$ vaut la classe des éléments de α , à savoir α .

Soit $\mathcal{O}$ une classe non vide d'ordinaux. La classe $\mathcal{O}$ étant ordonnée par l'inclusion, le minimum cherché doit être l'intersection de $\mathcal{O}$. Par ailleurs, pour utiliser l'existence d'un minimum, on se ramène à un ordinal en intersectant $\mathcal{O}$ avec l'un de ses éléments. Soit donc $o \in \mathcal{O}$ (il en existe puisque $\mathcal{O}$ est non vide) : si o est minimal, on a terminé, sinon $\mathcal{O}$ contient un ordinal $< o$ et l'on peut définir $\mu := \min(o \cap \mathcal{O})$. Montrons que μ minore $\mathcal{O}$. Soit $x \in \mathcal{O}$: comparons les ordinaux x et o . Si $x < o$, alors $x \in o \cap \mathcal{O}$ donc est $\geq \min(o \cap \mathcal{O}) = \mu$; sinon, on a directement $x \geq o > \mu$.

6. Notons $\tilde{\mathcal{O}}$ la classe des ordinaux.

Si $\tilde{\mathcal{O}}$ était un ensemble, elle serait (d'après la question 5) un ordinal, *i. e.* appartiendrait à la classe des ordinaux, *i. e.* s'appartiendrait à elle-même, ce qui serait absurde.

Soit E un ensemble. L'axiome de séparation nous dit que l'intersection $\tilde{\mathcal{O}} \cap E$ est un ensemble, donc (on vient de le voir) ne peut être $\tilde{\mathcal{O}}$, ce qui empêche l'inclusion $\tilde{\mathcal{O}} \subset E$.

Soit A un ensemble. "Soit"⁷ par l'absurde f une fonctionnelle injective $\tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow A$. L'injectivité de f montre que sa réciproque est une fonctionnelle $f^{-1} : A \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ (pas forcément définie sur tout A). L'axiome de remplacement nous donne alors un ensemble O tel que

$$\forall o, o \in O \iff \exists a \in A, f^{-1}(a, o).$$

Montrons que cet ensemble contient tous les ordinaux, ce que l'on vient de montrer impossible. Soit $o \in \tilde{\mathcal{O}}$ et notons a_o son image par f : on a alors $f(o, a_o)$, *i. e.* $f^{-1}(a_o, o)$, d'où $\exists a \in A, f^{-1}(a, o)$, *i. e.* $o \in O$.

En termes séquentiels, aucun ensemble ne peut contenir une "suite" strictement croissante indexée par les ordinaux.

7. Soit O un bon ordre. On veut montrer que O est isomorphe à une coupure initiale du bon ordre des ordinaux (en effet, une telle coupure est un ordinal), ce qui nous incite à utiliser le théorème de Cantor (question 5 exercice 1). Obstacle : le deuxième bon ordre (noté Ω dans la démonstration) n'est pas un ensemble mais la classe des ordinaux. Remédions-y par une pirouette technique.

Pour tout $o \in O$ et tout ordinal α , notons $f(o, \alpha)$ pour dire "la coupure initiale $I^{\leq o}$ est isomorphe à α ". L'égalité des relations ordinales $\hookrightarrow$ et $\subset$ (prouvée question 4.) montrant que deux ordinaux sont isomorphes ssi ils sont égaux, la relation f est univoque : l'axiome de remplacement⁸ nous permet alors de parler de l'image de la relation f . Cette image est un ensemble Ω d'ordinaux, donc est bien ordonnée par $\in$ (*cf.* question 4) ; il est par ailleurs aisé de montrer que Ω est $\in$ -stable (reprendre la démonstration de Cantor⁹), d'où l'on tire que Ω est un ordinal.

⁷Détail de raisonnement : cette invocation n'est pas formalisable dans le langage des ensembles. L'impossibilité de pouvoir disposer d'un tel f n'est donc que relative à la consistance de ZF (toute comme l'impossibilité de dériver AC à partir de ZF).

⁸C'est la grosse différence avec le théorème de CANTOR : il semble difficile de se passer de cet axiome, introduit indépendamment par FRAEKELE et SKOLEM à la suite des axiomes de ZERMELO (l'histoire a oublié SKOLEM et n'a retenu que le "F" dans "ZF"). Mais c'est VON NEUMANN qui a vu son intérêt pour ce théorème classifiant (et qui a laissé le "V" de la hiérarchie des V_α). Le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage *Cantorian set theory and limitations of size* de Michael HALETTE.

⁹Soient $\alpha \in \beta \in \Omega$. Soit $p \in O$ tel que $\beta = f(p)$, notons i l'isomorphisme $I^{< p} \cong \beta$ et $o := i^{-1}(\alpha)$. Restreindre i à $I^{< o}$ donne un isomorphisme de $I^{< o}$ sur $i(I^{< o}) = I^{< i(o)} = I^{< \alpha} = \alpha$, d'où l'appartenance $\alpha \in \Omega$ voulue.

Comparons les bons ordres O et Ω . S'il y avait un $o \in O$ tel que $I^{\leq o} \cong \Omega$, on aurait $f(o, \Omega)$, d'où $\Omega \in \text{Im } f = \Omega$, ce qui serait absurde; ainsi Ω n'est-il isomorphe à aucun $I^{< o}$. Il en résulte (d'après Cantor) que O est isomorphe (avec unicité de l'isomorphisme) à Ω ou à l'une de ses coupures initiales strictes : dans les deux cas, le bon ordre but est un ordinal (avec unicité d'après l'univocité de f), ce qui conclut.

(Exercice : rédiger ce qui précède sans utiliser le théorème de Cantor, en adaptant la démonstration directement au cas où le deuxième bon ordre est celui des ordinaux.)

Interprétation en termes séquentiels : un isomorphisme $\begin{cases} \alpha & \xrightarrow{\sim} & O \\ \xi & \mapsto & o_\xi \end{cases}$ fournit une indexation de O par une séquence d'ordinaux. On retrouve le fait qu'un ensemble A fini est indexable par les entiers de $[0, \text{Card } A[$.

3 Tout bon ordre est équipotent à son carré

On ordonne la classe des ordinaux au carré en triant d'abord le max, puis la première coord, puis la seconde

1. Montrer que bon ordre.
2. Montrer que $I^{<(\alpha, \beta)} \hookrightarrow \mu^4$ avec $\mu := \max\{a, b\}$.
3. Montrer que tout bon ordre infini est isomorphe à son carré
4. En déduire qu'il y a autant de bons ordres sur un bon ordre O donné que d'injections $O \hookrightarrow O$, ou encore (si O infini) que de parties de O (On rappelle l'implication $E^2 \simeq E \implies \mathfrak{S}_E \simeq \mathfrak{P}(E) \simeq E^E$ (cf feuille ens&app)).

Solution proposée.

1. Faire un dessin peut aider : dans le cas de $\mathbb{N}$, ordonner d'abord le max revient à ordonner les "équerre" $(x \leq a, a) \cup (a, y \leq a)$, puis au sein d'une même équerre d'abord les $(x < a, a)$, puis enfin les $(a, y < a)$.
Soit P classe dans Ord^2 . L'ensemble des max des coordonnées admet un min m . On se place sur l'équerre considérée (intersectée avec P). L'ensemble des abscisses a alors un min x , puis les $(x, y) \in P$ ont un plus petit y . Alors (x, y) est min.
2. Soit $\binom{x}{y} < \binom{\alpha}{\beta}$. Si les max sont $<$, alors $x, y < \mu$, donc $(x, y) \in \mu^2$.
Supp les max égaux. Si $x < \alpha$, alors $x < \alpha \leq \mu = \max\{x, y\}$, donc impossible que $x \geq y$, d'où $x < y = \mu$, ie $(x, y) \in \mu \times \{\mu\} \simeq \mu$.
Suppos $x = \alpha$. Alors $y < \beta \leq \mu$, donc $(x, y) \in \{\alpha\} \times \mu \simeq \mu$.
Les trois cas permettent d'injecter $I^{<(\alpha, \beta)} \hookrightarrow \mu^2 \sqcup \mu \sqcup \mu$; on conclut en invoquant $E \sqcup E \hookrightarrow E^2$ pour tout ensemble E .
3. La bon ordre sur les ordinaux d'induit à α . Puisque tout bon ordre est isomorphe à un unique ordinal, il suffit de mq $\alpha^2 = \alpha$. Puisque $\alpha \hookrightarrow \alpha^2$, il suffit de mq $\alpha^2 \hookrightarrow \alpha$. Si pas le cas, c'est que α est coupure initiale stricte de α^2 , mettons $\alpha \cong I^{<(a, b)} \leq \mu^4$. Quitte à choisir α minimal, $\mu < \alpha$ est équipotent à son carré, d'où $\alpha \hookrightarrow \mu^4 = \mu$, ie $\alpha \leq \mu$, absurde.
4. Soit deux bon ordre sur O . Alors l'un est iso à un segment ini du premier, d'où injection $O \simeq I_o \hookrightarrow O$. Réciproquement, si $i : O \hookrightarrow O$, alors on peut transporter l'ordre de O par i en définissant $a \leq_i b$ bssi $i(a) \leq i(b)$ (l'inj intervient pour vérifier l'antisym) : c'est un bon ordre car i est croissant.
Lorsque O est infini, il est $\simeq O^2$ par ce qui précède., donc on peut coincer les inj $O \hookrightarrow O$ entre $\mathfrak{S}_O$ et O^O , d'où leur nombre $\mathfrak{P}(O)$.

Remarque. On verra avec le th de Zermelo (cf exo 3) que AC permet de bien ordonner tout le monde, ce qui permet d'obtenir $A^2 \cong A$ pour tout ensemble A infini.

Les exercices qui suivent donnent des applications de l'induction transfinitive et donnent à apprécier la concision du langage ordinal.

4 Récursion ordinaire – Induction transfinitie

Soit α un ordinal.

1. **(induction transfinitie)** On considère un prédicat P singulier tel que, pour tout ordinal $o < \alpha$, la conjonction $\forall \xi < o, P_\xi$ implique P_o . Montrer P_α

Appelons **séquence indexée par α** , ou **α -séquence**, toute application de domaine α , notée alors $s = (s_\xi)_{\xi < \alpha}$ (lorsque $\alpha = \mathbf{N}$, on obtient une suite classique $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$).

2. **(récursion transfinitie)** Soient A un ensemble et $f : \bigcup_{\beta < \alpha} A^\beta \longrightarrow A$ une application¹⁰. On dira qu'une α -séquence s est **f -induite** si l'on a l'égalité $s_o = f(s|_o)$ pour tout ordinal $o < \alpha$.
Montrer qu'il existe une unique α -séquence f -induite.
3. **(théorème de Zermelo)** Soit A un ensemble muni d'une fonction de choix¹¹. Montrer que A est bien ordonnable.

La récursion transfinitie se décline en pratique en trois hypothèses :

1. un terme initial s_0 ;
2. une relation de récurrence classique $s_{\alpha+1} = f(s_\alpha)$ (pour tout ordinal α) ;
3. une relation de "passage la limite" $s_\lambda = f(s|_\lambda)$ pour tout ordinal λ limite.

Voyons trois applications où cette récursion apparaît vraiment naturellement.

1. **(fonction localement polynomiale)** Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ localement polynomiale. Montrer que f est un polynôme.
2. **(un théorème de point fixe)** Soit O un ordre où toute partie admet un supremum. Soit $f : O \longrightarrow O$ plus grande que l'identité. Montrer que f a un point fixe.
3. **(théorème de Cantor-Bendixon)** Une partie de $\mathbf{R}$ sera dite **gentille** si elle est fermée et sans point isolé. Montrer que tout fermé de $\mathbf{R}$ est réunion disjointe d'une partie gentille et d'une partie au plus dénombrable.

Solution proposée (induction & récursion transfinities, Zermelo).

1. Pour $\alpha = \mathbf{N}$, on retrouve l'énoncé de la récurrence forte : reprenons sa démonstration *mutatis mutandis*. Supposons par l'absurde que l'ensemble des ordinaux $< \alpha$ ne vérifiant pas P soit non vide. Notons alors μ son minimum. Par minimalité, on a P_o pour tout ordinal $o < \mu$, d'où (par hypothèse) P_μ : contradiction.
2. Pour $\alpha = \mathbf{N}$, on retrouve la définition d'une suite par récurrence¹². On va reprendre la démonstration des existences et unicités de suites prétendument "définies" par récurrence : il nous faudra cependant cette fois *distinguer deux cas*, selon que les ordinaux concernés seront *successeurs ou non*.

Commençons par prouver l'unicité. Soient s et t deux α -séquences f -induites, supposées par l'absurde distinctes, ce qui permet de donner sens au plus petit ordinal $\mu < \alpha$ tel que $s_\mu \neq t_\mu$. Par minimalité de μ , on a l'égalité $s_\xi = t_\xi$ pour tout ordinal $\xi < \mu$, d'où celle des séquences $s|_\mu = t|_\mu$ et (en appliquant f) l'égalité absurde $s_\mu = t_\mu$.

Montrons l'existence par induction transfinitie¹³. Soit donc $\mu < \alpha$ un ordinal tel que, pour tout $o < \mu$, il y a une (unique¹⁴) o -séquence f -induite¹⁵ : notons s^o une telle séquence. Définissons alors une μ -séquence

¹⁰Pour définir $\bigcup_{\beta < \alpha} A^\beta$, il suffit de séparer dans $\text{Fonc}(\alpha, A)$ les fonctions dont le domaine est un élément de α (pas besoin de remplacement).

¹¹i. e. d'un $f : \mathbf{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow A$ tel que $f(P) \in P$ pour toute partie $P \subset A$

¹²la condition initiale est cachée dans la relation $s_0 = f((s_\xi)_{\xi \in \emptyset})$

¹³L'unicité aurait également pu être rédigée sous forme d'une induction : nous laissons cela au lecteur afin qu'il/elle compare les concisions des deux raisonnements.

¹⁴l'unicité est automatique : reprendre le raisonnement sur l'unicité des α -séquences f -induites en remplaçant α par o

¹⁵en toute rigueur on aurait dû, au lieu de " f ", noter " f restreinte à $\bigcup_{\xi < o} A^\xi$ "

"diagonale¹⁶" $s : o \mapsto s_o^{o+1}$: cette définition peut poser problème si l'exposant $o + 1$ sort de l'ensemble μ , cas où l'on peut alors écrire $o < \mu \leq o + 1$, ce qui revient à l'égalité $\mu = o + 1$. Nous traiterons ce cas "μ successeur" plus tard : supposons donc que la définition de s fasse sens et montrons que cette μ -séquence est f -induite.

Une observation préambule : l'unicité montre que, pour tous ordinaux $o < O$ de μ , la restriction de s^O à o vaut s^o , d'où à $\xi < \mu$ fixé la constance de la "séquence terminale" $\begin{cases}]\xi, \mu] & \longrightarrow A \\ o & \longmapsto s_\xi^o \end{cases}$, laquelle vaudra constamment $s_\xi^{\xi+1}$. En conséquence, pour tout $o < \mu$, on pourra écrire

$$s_o = s_o^{o+1} \stackrel{s^{o+1} \text{ est } f\text{-induite}}{=} f \left(\left(s_\xi^{o+1} \right)_{\xi < o} \right) \stackrel{\text{observation préliminaire}}{=} f \left(\left(s_\xi^{\xi+1} \right)_{\xi < o} \right) = f \left((s_\xi)_{\xi < o} \right).$$

Revenons alors au cas écarté, mettons $\mu = \nu + 1$ pour un certain ordinal ν . On peut alors définir une ν -séquence diagonale $t : o \mapsto s_o^{o+1}$ que l'on prolonge en une μ -séquence s en imposant $s_\nu := f(t)$. Pour montrer que s est f -induite, le travail ci-dessus reste valide et il suffit d'observer les égalités

$$f(s|_\nu) \stackrel{s \text{ prolonge } t}{=} f(t|_\nu) = f(t) = s_\nu.$$

- Idée : on épuise les éléments de A en en choisissant un (grâce à f) dans ceux pas encore piochés. Ainsi au début : soit $a \in A$, puis soit $b \in A \setminus \{a\}$, puis soit $c \in A \setminus \{a, b\}$, puis soit $d \in A \setminus \{a, b, c\}$...

Formalisons en raisonnant par l'absurde. On utilise alors la récursion transfinie en définissant une séquence a à valeurs dans A telle que $a_\alpha = f(A \setminus \{a_{\xi < \alpha}\})$ pour tout ordinal α , la partie-argument de f ne pouvant être vide (sinon $A = \{a_{\xi < \alpha}\}$ serait bien ordonné). Cette séquence est injective (car $a_\alpha \in A \setminus \{a_{\xi < \alpha}\}$) : étant définie sur tout ordinal, on peut donc injecter la *classe* des ordinaux dans l'*ensemble* A : *contradiction*.

Comparé au pas "successeur" de l'induction entière, le passage à la limite est un "inducteur" très nouveau et tout à fait spécifique, il n'est donc pas surprenant qu'apparaisse ci-dessus la distinction entre ordinal *successeur* et ordinal *limite*, distinction toute naturelle dans la récursion transfinie dont nous donnons à présent trois exemples.

Solution proposée (applications).

- Notons P le polynôme valant f autour de 0, mettons sur $[-a, a]$. En notant Q le polynôme valant f autour de a , mettons sur $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ les polynômes P et Q vont coïncider sur un intervalle infini $\left[\max \left(\begin{matrix} a - \varepsilon \\ 0 \end{matrix}, a \right), a \right]$, donc sont égaux, ce qui montre que f vaut P non seulement sur $[0, a]$ mais aussi sur $[0, a + \varepsilon]$. On recommence : f vaut un polynôme autour de $a + \varepsilon$, ce polynôme vaut P , ce qui permet de pousser encore plus à droite le maximum d'un segment où f vaut P . On construit ainsi une suite (s_n) strictement croissante telle que s_{n+1} est un réel tel que f vaut P sur $[s_n, s_{n+1}]$. Si cette suite tend vers l'infini, f vaut P sur tout $\mathbf{R}_+$ et on a terminé ; sinon, elle admet un *supremum* s_ω et l'on recommence : f vaut P autour de s_ω , d'où un $s_{\omega+1}$ encore plus à droite de s_ω , etc.
- Reprenons proprement. Supposons que f ne soit pas polynomiale sur $\mathbf{R}_+$. On peut alors pour tout ordinal α définir une α -séquence s à valeurs réelles de terme initial $s_0 := 42$, de relation successeur $s_{\alpha+1} := \sup \{\rho > s_\alpha ; f = P \text{ sur } [0, \rho]\}$ (ce *supremum* fait sens par ce qui précède et est fini par hypothèse absurde) et de relation limite $s_\lambda := \sup_{\alpha < \lambda} s_\alpha$ (même remarque sur le *supremum*). Cette séquence croît strictement, donc est injective, ce qui permet d'injecter la *classe* des ordinaux dans l'*ensemble* $\mathbf{R}$: *contradiction*.
- Itérer est naturel pour chercher à fixer (penser au théorème du point fixe des applications contractantes). Ici, on itère transfiniment une partie donnée A_0 de A en définissant $A_{\alpha+1} := f(A_\alpha)$ (relation successeur) et $A_\lambda := \sup_{\alpha < \lambda} A_\alpha$ (relation limite). Si f n'avait pas de point fixe, cette séquence croîtrait strictement, donc serait injective, d'où une injection des ordinaux dans $\mathfrak{P}(A)$: *contradiction*.
- Notons A' l'ensemble des points d'accumulation d'une partie quelconque $A \subset \mathbf{R}$. On vérifie aisément qu'une partie A est gentille ssi $A' = A$. Soit F un fermé. Alors $F' \subset F$ puisque les limites de suites à valeurs dans F restent dans F . On montre par ailleurs aisément que F' est fermé (comme l'on montrerait que l'adhérence séquentielle est fermée). On dispose donc d'une application $A \mapsto A'$ qui stabilise les fermés, dont on cherche des points fixes et dont toutes les orbites décroissent. Le point précédent nous donne un point fixe inclus dans F . (La suite de la démonstration ne parle plus d'ordinaux et est esquissée à

¹⁶sans le +1 en exposant, l'argument-indice o n'appartiendrait pas au domaine-exposant o

simple titre culturel.) Appelons α le premier ordinal tel que $F'_\alpha = F_\alpha$. On montrerait alors l'égalité $F \setminus F_\alpha = \bigsqcup_{o < \alpha} F_o \setminus F_{o+1}$ où chaque $F_o \setminus F_{o+1}$ s'injecte dans $\mathbf{Q}^2$ (par définition de ne pas être point limite), d'où l'au-plus dénombrabilité de $F \setminus F_\alpha$ et la conclusion.

Remarque. Dans l'exercice sur la fonction localement polynomiale, on aurait pu couper court sans invoquer les ordinaux en considérant directement par l'absurde le *supremum* des ρ tels que $f = P$ sur $[0, \rho]$ (cela revient précisément à montrer une induction transfinie *via* le raisonnement par minimum, ce dernier étant par miracle disponible dans $\mathbf{R}$ grâce à la complétude de ce dernier). Notre expérience des colles montre cependant que la récurrence transfinie est ce qui vient en premier à l'esprit des élèves (bien évidemment sans ce vocabulaire), avant de trouver un argument plus taupinal à coup de *supremum*.

5 Théorème de Knaster-Tarski (point fixe et itération)

Soit O ordre où toute partie admet un sup. Soit $f \in O^O$ croissante. Montrer que f a un point fixe.

Solution proposée.

Itérer est naturel pour chercher à fixer (pense à th point fixe d'application contractante). Ici, on itère transfiniment une partie donnée A_0 en posant $A_{\alpha+1} = f(A_\alpha)$ et $A_\lambda = \sup_{\alpha < \lambda} A_\alpha$. SI pas de point fixe, suite strictement croissante, abs.

6 Théorème de Zermelo (AC et bons ordres)

Lien entre AC et bons ordre : fondamentalement, le choix est un toujours un min.

Soit A un ensemble. Montrer que A est bien ordinnable ssi A possède une fonction de choix (sur $\mathfrak{P}(A)$)
En déduire que $AC \Leftrightarrow$ tout ensemble est bon ordre

Solution proposée.

$\Rightarrow$ déjà fait : choisir grace à min

$\Leftarrow$ Idée : on épuise les éléments de A en en choisissant un (grâce à f) dans ceux pas encore piocés : soit $a \in A$, puis $b \in A \setminus \{a\}$, puis $c \in A \setminus \{a, b\}$, puis $d \in A \setminus \{a, b, c\}$...

Formalisation : on pose $a_\alpha = f(A \setminus \{a_\xi < \alpha\})$ suite injective (car $a_\alpha \in A \setminus \{a_\xi < \alpha\}$), donc stationne à un ordinal α_0 , d'où $A = \{a_\alpha < \alpha_0\}$. (sinon on peut choisir un élément dans A privé de $\{a_\alpha < \alpha_0\}$).

Corollaire immédiat.

7 Théorème de Koenig (majoration de cardinaux)

On suppose AC.

1. Montrer que $\hookrightarrow$ total et que $\twoheadrightarrow$ est ordre opposé (modulo cond patho)
2. Soient $A_i < B_i$. Montrer que $\sqcup A_i < \prod B_i$.
3. Retrouver Cantor.

Solution proposée

1. $\hookrightarrow$ total car déjà total sur ordinaux et Zermelo dit que tout ensemble est bo. Si $A \twoheadrightarrow B$, en choisissant un antécédent, on a une injection $B \hookrightarrow A$. Réciproquement, si $A \hookrightarrow B$, on a une surjection $B \twoheadrightarrow A$ en reversant $\text{Im } i$ et envoyant le reste n'importe où (ce qui suppose $A \neq \emptyset$: on n'a jamais $B \twoheadrightarrow \emptyset$ sauf si $B = \emptyset$).
2. Soit $f : \sqcup A_i \twoheadrightarrow \prod B_i$. Aucune des flèches $A_k \hookrightarrow \sqcup A_i \twoheadrightarrow \prod B_i \twoheadrightarrow B_k$ n'est surjective (sinon AC donne section $B_k \hookrightarrow A_k$). Soit par AC (b_i) hors des images. Si $(b_i) = f(a_k)$, alors a_k est envoyé sur b_k , absurde.

3. Pour $(A_i, B_i) = (1, 2)$, on retrouve $I < 2^I$, et plus généralement pour $(A_i, B_i) = (1, B)$ on a $I < B^I$ pour $B > 1$.

Rq On peut remplacer $A < B$ par $\nexists B \hookrightarrow A$, sans avoir besoin de Zermelo. Mais comme on utilise AC, autant profiter de Zermelo et donc de la conclusion directe.

8 Théorème de Kuratowski-Zorn (AC et éléments maximaux)

AC permet d'alléger considérablement les contraintes portant sur un ensemble ordonné pour montrer l'existence d'un élément maximal. De façon plus précise, d'une part on peut supposer que l'ordre est *total*, d'autre on se permet de aller chercher un majorant *en-dehors* de notre ensemble.

Dans un ordre, une *chaîne* est une partie totalement ordonnée. Un ordre est dit *inductif* si tout ses chaînes sont majorées.

Théorème de Kuratowski-Zorn. Mq AC équivaut à ce que *tout ensemble inductif (non vide) admet un élément maximal*.

Solution proposée.

=> Idée : tant que pas de max, on pioche un élément toujours plus grand que les précédents, ce qui va induire (transfiniment) une suite (s_α) telle que s_α soit plus grand que les $s_{\xi < \alpha}$.

Formalisons. L'axiome du choix nous donne pour tout chaîne C un majorant $M(C)$, que l'on peut prendre strict en supposant A sans élément maximal (et en réutilisant AC). On définit alors par induction $s_\alpha = M(\{s_\xi\}_{\xi < \alpha})$: si cette définition bloque à un ordinal α , on peut prendre ce dernier minimal, mais alors $o < o' < \alpha \implies s_{o'} = M(\{s_\xi\}_{\xi < o'}) > s_o$ mq $\{s_\xi\}_{\xi < o'}$ est une chaîne, ce qui légitime la définition ci-dessus. Ce qui précède montre que la suite s_α croît strictement, ce qui est impossible.

<= Soit $\mathcal{A}$ ne contenna pas $\emptyset$. On regarde l'ensemble des fonctions de choix définie sur une partie de $\mathcal{A}$ ordonné par $\subset$ (non vide car contient l'application vide) Il est inductif, donc a un max f . Si $\text{Dom } f \subsetneq \mathcal{A}$, on prend un A en dehors et $a \in A$. Alors $f \cup (\{A, a\})$ prolonge, contradiction.

Rq. contrairement à zermelo, on ne reste pas "au même plan" dans la preuve qui précède : si l'on note IM_E la propriété " E inductif $\implies E$ admet maximal", alors ce qui précède montre que $IMP_{(E) \times E} \implies AC_E \implies IM_E$.

9 Théorème de Specker (pas d'injection $\mathfrak{P}(A) \hookrightarrow A^2$)

Ce théorème précise le fait qu'il n'y a pas d'injection $\mathfrak{P}(A) \hookrightarrow A$. On montre (sans AC) qu'il n'y a pas d'injection de $\mathfrak{P}(A) \hookrightarrow A^2$ (sauf si $|A| \in \{2, 4\}$) -> théorème Specker (1954)

1. Expliquer, si l'on souhaite construire une suite croissante (pour "prolonge") d'injections $i_\alpha : \alpha \hookrightarrow A$, de quel choix nous aimerions disposer. Conclure si ce choix était possible.

On suppose dorénavant donnée une injection $f : \mathfrak{P}(A) \hookrightarrow A^2$. On fixe une injection $i : \alpha \hookrightarrow A$ dont on note I l'image (avec $\alpha \geq 5$).

2. Montrer qu'il suffit de mq $\text{Im } f|_{\mathfrak{P}(I)} \not\subset I^2$.
3. Conclure.

Solution proposée.

1. Micro analyse : si $\alpha < \beta$, on doit poser i_α = la restriction de i_β , ce qui impose par induction le passage à la limite et (presque) le successeur : $i_{\alpha+1}$ est injectif ssi il envoie α hors de $\text{Im } i_\alpha$, d'où le choix voulu : pour tout ordinal α , une fonction $\text{Inj}(\alpha, A) \longrightarrow A$ qui choisit pour tout $i : \alpha \hookrightarrow A$ un élément hors de $\text{Im } i$. Si cela était possible, on initierait à injectera les ordinaux dans A , ce qui est absurde.

- Supposons $\exists X \subset I, f(X) \notin I^2$. Puisque I est bon ordre (par α), on peut *choisir* un tel X (en fonction de α). Il suffit alors de choisir l'une des coordonnées $\notin I$ de $f(X)$
- Supp $\text{Im } f \subset I^2$. Alors f induit $P(I) \hookrightarrow I^2$, ce qui est impossible pour α fini (car alors $2^\alpha \leq \alpha^2$), d'où l'élément. Pour α infini, on a $I \simeq I^2$, d'où (par f) une surjection $I \rightarrow P(I)$, ce qui est impossible (par arg diagonal). Pour conclure, ne pas oublier d'*initier* la suite de la première question : on peut pour $5 \hookrightarrow A$, les cas $A < 5$ se font à la main.

Remarque. Avec AC, Specker dit que $A^2 \hookrightarrow P(A)$. Mais cela est faux sans AC????

10 Théorème de Kruse (sur les non-injections $\mathfrak{P}(A) \longrightarrow A$)

On souhaite préciser l'énoncé qui dit qu'une application $\mathfrak{P}(A) \longrightarrow A$ ne peut être injective. On veut montrer qu'il y a deux parties $\exists X \subsetneq Y$ ayant même image.

On appelle **ensemble de Kruse** de A l'ensemble $\mathfrak{K}(A)$ des bons ordres $(B, \leq)$ où B est une partie de A .

- Conclure si l'on montre le théorème de Kruse : pour toute injection $\mathfrak{K}(A) \longrightarrow A$, il y a un bon ordre et un de ses segments initial strict qui ont même image.
- Conclure, à $f : \mathfrak{K}(A) \longrightarrow A$ fixé, si l'on exhibe un élément maximal dans

$$\mathcal{B}_f := \{B \in \mathfrak{K}(A) ; \forall b \in B, f(I^{<b}) = b\}.$$

- Conclure en invoquant une induction ordinale.
- (bonus sur les cardinaux)** Montrer que $\mathfrak{K}(A) \hookrightarrow \mathfrak{P}(A^2)$. Que dire du cas fini ? En supposant $A \sqcup A \simeq A$, mq $\mathfrak{K}(A) \hookrightarrow \mathfrak{P}(A)$. Que dire de plus avec AC ?

Solution proposée.

- Soit $f : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow A$. Elle induit une application $\mathfrak{K}(A) \longrightarrow A$, d'où la conclusion.
- Pour utiliser l'hypothèse de maximalité, on va rajouter un élément à B . Soit donc $a \notin B$ (si possible). Alors $B \sqcup \{a\}$ est bien ordonné (prendre $a > B$), est strictement plus grand que B , donc ne vérifie pas la prop, donc $a \neq f(I^{<a}) = f(B)$. Par contraposée, on en déduit que $f(B) \in B$, d'où par hyp $f(B) = f(I^{<f(B)})$, de sorte que B et $I^{<f(B)}$ ont même image par f .
- Énumérons $B = \{b_0 < b_1 < b_2 < b_3 < \dots\}$ (on peut ordonner grâce à bon ordre). Alors $b_0 = f(\emptyset)$, puis $b_1 = f(\{b_0\})$, puis $b_2 = f(\{b_0, b_1\})$, etc... $b_n = f(\{b_0, \dots, b_{n-1}\})$. Cela incite à définir par induction $b_\alpha = f(\{b_{\beta < \alpha}\})$ et à regarder les bon ordre $B_\alpha := \{b_\beta\}_{\beta < \alpha}$. La suite B_α est croissante et stationne dès qu'elle répète une valeur, donc stationne tout court à un B_f . Mq $B_f = \max \mathcal{B}_f$. Soit $B = \{b'_{\alpha < \beta}\}$ dans $\mathcal{B}_f$ et supposons $b'_\alpha \neq b_\alpha$ avec α minimum, alors $b'_\alpha = f(b'_{\xi < \alpha}) = f(b_{\xi < \alpha}) = b_\alpha$, contradiction.
- A un bon ordre $P \subset A$ on associe son graphe : c'est clairement injectif car le graphe est la relation (la partie se lit sur la diagonale).
Dans le cas fini, $\mathfrak{K}(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k!$ (choisir une partie et un ordre total dessus) = $[n!e]$, qui est bien $\leq 2^{n^2}$ (on a $[n!e] \leq 4n!$ et on mq rec $n! \leq 2^{n^2-2}$ en utilisant $n+1 \leq 2^n$).
étant donnée une partie $P \subset A$ bien ordonnable, il y a autant de façon de bien l'ordonner que de parties de P (cf exo 3), d'où (en considérant en plus les parties pas bon ordre)

$$\mathfrak{K}(A) \hookrightarrow \bigsqcup_{P \subset A} \mathfrak{P}(P) \hookrightarrow \bigsqcup_{P \subset A} \mathfrak{P}(A) = \bigcup_{P \subset A} (\mathfrak{P}(A) \times \{P\}) = \mathfrak{P}(A)^2 \cong 2^A \times 2^A \cong 2^{A \sqcup A} \simeq 2^A \cong \mathfrak{P}(A).$$

Si on suppose AC, toute partie est bon ordre, d'où $\mathfrak{P}(A) \hookrightarrow \mathfrak{K}(A)$, et BBBCDSZ conclut $\mathfrak{K}(A) \simeq \mathfrak{P}(A)$.

Remarque. On peut se passer des ordinaux (et de remplacement) pour cet exercice, mais l'on espère que la concision de ce qui précède rend évident que l'approche ordinale est la "meilleure" pour exhiber notre élément maximal cherché (on pourra comparer avec la leçon 16 de P. Ageron).

11 Théorème de Tarski *via* Hartogs (pour bien ordonner)

Nous venons de rencontrer l'ensemble de Kruse. Si l'on quotiente par la relation "iso de bon ordre", on obtient un ensemble de représentant de chaque partie bon ordre. Or les ordinaux sont des représentations canonique. On pose $H(A)$ l'ensmle des ordiaux $\hookrightarrow A$

(on a donc une surjection canonique $K(A) \twoheadrightarrow H(A)$, mais sans AC difficile d'en déuire une injection $H(A) \hookrightarrow K(A)$).

1. *Montrer que $H(A)$ est un ordinal ne s'injectant pas dans A . Que vaut $H(A)$ pour A bon ordre? Commenter.*
2. (hartogs 1915) *Montrer que $P(H(A)) \hookrightarrow PP(A^2)$. Commenter avec AC.*
3. (tarski 1924) *Montrer que A bon ordre si on peut injecter $A \times H(A) \hookrightarrow A \sqcup H(A)$*
4. *Montrer que AC ssi $\hookrightarrow$ total, ou encore ssi tout ensemble infini est équipotent son caré.*

Solution proposée.

1. Puisque $\hookrightarrow$ transitive, on $\alpha = I_{Ord}^{<\alpha} = I_{H(A)}^{<\alpha}$. Alors $H(A)$ ne s'appartient pas, donc $H(A) \not\hookrightarrow A$. Pour A bon ordre d'ord α , les ordinaux s'y injectant sont $0, 1, \dots, \alpha$, d'où $H(\alpha) = \alpha + 1$. Ainis, il doit être impossible de nier cette conclusion, car se donner AC en plus donne Zermelo et bon ordre pour tout le monde
2. A une partie $H \subset H(A)$, on associe l'ensemble des graphes d'un bon ordre sur une partie de A dont l'ordinal est dans H . Alos, si $H \neq \emptyset$ sont deux parties de $H(A)$, mettons $\theta \in H \setminus H$, il y a par def de $H(A)$ un bon ordre $P \subset A$ d'ordinal θ , et ce bon ordre ne peut être dans l'image de H , ce qui montre l'injectivité.
En suppo AC, la surjection $\mathfrak{K}(A) \twoheadrightarrow H(A)$ admet une section $H(A) \hookrightarrow K(A)$ et l'exo sur Kruse (point 4.) nous donne (avec AC) $\mathfrak{K}(A) \simeq \mathfrak{P}(A)$, d'où le résultat en prenant les parties. Cela est cohérence avec 1. : A est bon ordre (car AC), donc $\mathfrak{h}(A) = A + 1$ est bine $\leq 2^A$
3. il suffit d'injecter $A \hookrightarrow H(A)$. Idée : on a une injection $A \hookrightarrow H(A) \sqcup A$ donnée par $a \mapsto i(a, h(a))$ pour tout choix $h \in A^{H(A)}$. On veut choisir h pour éviter de tomber dans A : or, si $i(a, \cdot)$ reste d'image $\subset A$, alors $i(a, \cdot)$ injecte $H(A) \hookrightarrow A$, abs, donc on peut choisir $h(a)$ min pour cett prop.
4. $\Rightarrow$ tout ensemble est bon ordre, donc l'un est iso à un seg de l'autre, d'où $\hookrightarrow$ voulue $\Leftarrow$ On sait que $H(A) \not\hookrightarrow A$, donc $A \hookrightarrow H(A)$ est bon ordre.
 $\Rightarrow$ AC $\Rightarrow$ tout ens est bon ordre, donc exo 3 conclut. $\Leftarrow$ Puisque $A \times B \hookrightarrow (A \sqcup B) \times (A \sqcup B) \simeq A \sqcup B$, en prenant $B := H(A)$, on conclut.

Remarque : le théoème de Tarski a de quoi surprendre : une bijection entre deux ensembles (a priori sans bon ordre) permet d'en déduire un!

On peut raffiner la question 2 et mq $P(H(A) \times A) \hookrightarrow PP(A^2)$ en marquant un bon ordre par son min.

12 L'hypothèse du continu généralisée implique l'axiome du choix

On rappelle HC_A : pas de $A < X < P(A)$.

$HC_{\mathbb{N}}$ est la fameuse hyohtèse du continue, qui est indépendante des axiomes de ZFC (Godel & Cohen).

On veut montrer que HC_A pour tout A entraine AC

(Sierpiński, 1947)

1. *On suppose HC_A . Montrer que $A \simeq A + 1 \simeq A \sqcup A \simeq A^2$.
On suppose HC_A et $HC_{P(A)}$.*
2. *Montrer que $P(A) \sqcup H(A) \simeq P(A)$*
3. *Montrer que A bon ordre (Specker 1954) et conclure.*

Solution proposée.

- (les < qui suivent sont des corollaires de Specker) $A \leq A + 1 < P(A)$
 $A \leq A \sqcup A < P(A) \leq P(A) \sqcup P(A) \simeq P(A + 1) \simeq P(A)$
 $A \leq A \times A < P(A) \leq P(A) \times P(A) \simeq P(A \sqcup A) \simeq P(A)$
- On coince pour utiliser les HC : on a des parties et du Hartogs, donc on va faire apparaître $PH(A) \leq PP(A^2)$:

$$P(A) \leq P(A) \sqcup H(A) \stackrel{E < P(E)}{<} P(P(A) \sqcup H(A)) \simeq PP(A) \times PH(A) \stackrel{\text{Hartogs}}{\leq} PP(A) \times PP(A^2)$$

$$\stackrel{HC(A)}{\simeq} PP(A) \times PP(A) \simeq P(P(A) \sqcup P(A)) \stackrel{HC_{P(A)}}{\simeq} PP(A).$$

- on veut injecter $A \sqcup H(A)$ ds $A \times H(A)$. Le point 2. nous dit que $H(A) \leq P(A) \sqcup H(A) \simeq P(A)$, d'où

$$A < A \sqcup H(A) \stackrel{\substack{A \text{ et } H(A) \\ \text{non vides}}}{\leq} A \times H(A) \leq P(A) \times P(A) \stackrel{HC_{P(A)}}{\simeq} P(A)$$

Ainsi, A est bon ordre, d'où (Zermelo) AC.

13 Cardinaux et alephs

parmi plusieurs bon ordre non iso, certains sont equipotent (ω et $\omega + 1$) $\rightarrow$ choisir un représentant. En prendre un min est cool

Un card est un ord équipotent à aucun de ses éléments.

- Montrer que (avec AC) tout card a un plus petit card strictement supérieur
- Montrer que toute suite stricte croissante de card indexée par un ordinal a un sup
- En déduire que tout card est de la forme $\aleph_\alpha$ où $\aleph_0 = \omega$ et $\aleph_{\alpha+1} = s(\aleph_\alpha)$ et $\aleph_\lambda = \sup_{\kappa < \lambda} \aleph_\kappa$.
- (bonus)** Pour A ensemble infini, mq que l'ensemble (de Kruse) des graphes sur A^2 qui sont bon ordre sur une partie de A est un cardinal qui ne s'injecte pas dans A . Commenter.

Solution proposée.

- $\kappa \hookrightarrow P(\kappa)$ et AC dit que c'est inj stric de bon ordre, donc on peut prendre dans $P(\kappa)$ un plus petit ordinal $\kappa^+ > \kappa$.
- Le sup est la réunion $\kappa = \bigcup_{\xi < \alpha} \kappa_\xi$. Si $\varepsilon \in \kappa$, alors $\varepsilon \in \kappa_\xi$ pour un $\xi < \alpha$, donc $\varepsilon < \kappa_\xi \leq \kappa$.
- $\aleph$ bien def par induc transfinie. On mq par induc que tout card κ est un $\aleph$. Si ω ou successeur, clair. Supposons κ limite. On regarde $\lambda := \sup \{\alpha; \aleph_\alpha < \kappa\}$ (ok car on sépare dans κ vu que $\alpha \leq \aleph_\alpha$ par inductif). Si succes, c'est un max et alors $\aleph_\kappa = \aleph_\lambda^+ = \aleph_{s(\lambda)}$ absurde, d'où $\aleph_\lambda = \sup_{\alpha < \lambda} \aleph_\alpha \leq \kappa$, et l'inégalité stricte entrainerait $\lambda \in \lambda$.
- on a une fonctionnelle qui à un bon ordre associe un unique ordinal. Alors, par remplacement, on obtient un ensemble O d'ordinaux, clos par minorant (si α correspond à un bon ordre sur un $P \subset A$, alors $\beta \leq \alpha \Rightarrow \beta \subset \alpha$ est un bon ordre sur une partie de P), donc un ordinal. Par déf, tout ordinal $\alpha < O$ est dans O , d'où $\alpha \hookrightarrow A$; de plus, si $O \hookrightarrow A$, alors on aurait un iso de O sur une partie bon ordre de A , d'où $O \in O$, abs. Donc O est le plus petit ordinal ne s'injectant pas dans A , et on a clairement $O \subset PP(A^2)$. Enfin, si $\alpha < O$, on a $\alpha \not\hookrightarrow O$ (sinon $O \simeq \alpha \hookrightarrow A$). Avantage : pas d'AC! donc remplace 1.

Remarque sur les sup. Il est faux que $\lambda\alpha = \sup_{l < \lambda} l\alpha$.

Supposons le cas pour tout λ limite. En particulier pour $\lambda = \omega$, on a $\omega\alpha = \sup_{n < \omega} n\alpha$.

Considérons alors un ensemble ordonné dans lequel toute suite a un majorant strict (par exemple les fonctions définies autour de 0 munies de l'ordre "être un petit o de autour de 0"). On construit une suite (a_α) strictement croissante indexée par les ordinaux de la façon suivante : si ordinal successeur, on a un maj strict ; si ordinal limite, on l'écrit $\lambda = \omega\alpha$ par division euclidienne, ie $\lambda = \sup n\alpha$, et on considère un majorant strict de la suite $a_{n\alpha}$ (il majore donc $\sup a_{n\alpha} = a_{\sup n\alpha} = a_\lambda$).

EXO (AC) : Notons $\mathfrak{P}^I(A)$ l'ensemble des parties de A de cardinal I .

Si A et I finis, on a $|\mathfrak{P}^I(A)| = \binom{A}{I}$. Sinon, on a $\mathfrak{P}^I(A) \simeq \begin{cases} A^I & \text{si } I \leq A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

COR : soit $\lambda \leq E$ (sinon on a tout F^E). Supp E ou F infini. Alors $\{f \in F^E ; \text{Supp } f < \lambda\} \simeq \sup_{\kappa < \lambda} (EF)^\kappa$

CP : si E ou F infini, alors $F^{(E)} \simeq EF$.

DEM EXO : regardon l'application $A^I \longrightarrow \mathfrak{P}(A)$ qui oublie l'ordre. Son image d'une part est $\leq$ son domaine A^I , d'autre part contient $\mathfrak{P}^I(A)$, d'où (en choisant une section par AC) l'injection $\mathfrak{P}^I(A) \leq A^I$. Réciproquement,

$$\begin{aligned} A^I &= \{ \langle \langle I, A \rangle, G \rangle ; G \subset I \times A \text{ et } G \text{ univoque et } \text{Dom } G = I \} \\ &\simeq \{ G \subset I \times A \text{ et } G \text{ univoque et } \text{Dom } G = I \} \\ &\subset \{ G \subset I \times A \text{ et } |G| = I \} \quad (\text{or d'après AC on a } I \times A \simeq \max \{ I, A \} = A) \\ &\simeq \{ G \subset A \text{ et } |G| = I \} \quad (\text{en effet, si } E \simeq F, \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}^I(E) \\ P \end{array} \simeq \begin{array}{l} \mathfrak{P}^I(E) \\ \{ \varphi(p) \}_{p \in P} \end{array} \right.) \\ &= \mathfrak{P}^I(A) \end{aligned}$$

$$\text{DEM COR} \quad \{f \in F^E ; \text{Supp } f < \lambda\} = \coprod_{\kappa < \lambda} \underbrace{\coprod_{S \in \mathfrak{P}^\kappa(E)} \{f \in F^E ; \text{Supp } f = S\}}_{\simeq F^S \simeq F^\kappa} \simeq \sum_{\kappa < \lambda} (EF)^\kappa$$

$\simeq \mathfrak{P}^\kappa(E) \times F^\kappa$ si E ou κ infini $\simeq E^\kappa \times F^\kappa \simeq (EF)^\kappa$ (on a bien $\kappa \leq \lambda \leq E$)

Si E et κ sont finis, alors F est infini et on a $\mathfrak{P}^\kappa(E) \times F^\kappa \simeq \binom{E}{\kappa} \times F^\kappa \simeq F \simeq (EF)^\kappa$, donc même résultat

Dans tous les cas, on trouve $\sum_{\kappa \in \lambda} (EF)^\kappa = \max \{ \lambda, \sup (EF)^\kappa \} = \sup (EF)^\kappa$ car $\lambda \leq E \leq EF \leq (EF)^\kappa$ (discuter λ fini à part).

DEM CP Pour $\lambda = \mathbf{N}$, on obtient $F^{(E)} \simeq \sup (EF)^n = \sup EF = EF$.

EXo : peut-on symétriser les ordinaux/cardinaux comme on symétrise N en Z ?

(idée : non car on aimerait la commutativité de l'addition pour mener à bien la construction)

réponse ordinaire : aucun o ordinal infini n'est régulier (puisque $o = 1 + o$)

réponse cardinale : soit un groupe prolongeant un monoïde de cardinaux ; soit λ infini dedans : alors λ idempotent, donc nul (puisque $+$ simplifiable).

Donc la seule possibilité est de symétriser les cardinaux/ordinaux FINIS $\rightarrow$ d'où le $\mathbf{Z}$ classique.

(HOWEVER : il y a les numérosités, "cardinaux" infinis qui se simplifient, et qui permettent de retrouver analyse non standard)