Dualité injections–surjections

Marc SAGE

20 septembre 2007

Table des matières

1 $A \neq \emptyset \implies (A \hookrightarrow B \iff B \twoheadrightarrow A)$ **2**

2 Foncteurs « image directe » et « préimage » 2

3 Foncteurs « exponentielle » et « puissance » 4

Les notations sont celles de la feuille sur ensembles & applications, en particulier $A \hookrightarrow B$ désigne une *injection* de A dans B tandis que $A \twoheadrightarrow B$ désigne une *surjection* de A sur B.

1 $A \neq \emptyset \implies (A \hookrightarrow B \iff B \twoheadrightarrow A)$

Soit A un ensemble non vide. Montrer que la donnée d'une injection $A \hookrightarrow B$ équivaut à celle d'une surjection $B \twoheadrightarrow A$.

Pourquoi A est-il supposé non vide ?

Solution proposée.

Soit $i : A \hookrightarrow B$ une injection. Pour définir une surjection $s : B \twoheadrightarrow A$, on envoit les éléments de $\operatorname{Im} i$ sur leur unique antécédent (ce qui est bien défini par injectivité de i) et les autres sur n'importe quoi (on peut car A est non vide).

Soit $s : B \twoheadrightarrow A$ une surjection. Tout $a \in B$ admet donc un antécédent par s. L'axiome du choix nous donne une application $i : A \longrightarrow B$ permettant de choisir un tel antécédent. Par construction, on a $s \circ i = \mathrm{Id}$, d'où l'injectivité de i[1].

Si A est vide, on a toujours une application vide $\emptyset \longrightarrow B$ à valeurs dans B qui est injective de manière tautologique. Mais il n'y a jamais d'application $B \longrightarrow \emptyset$ dès que B est non vide !

Remarque. Si l'on rajoute de la structure à nos ensembles, il n'est plus vrai que la donnée d'un morphisme injectif $A \hookrightarrow B$ équivaut à celle d'un morphisme surjectif $B \twoheadrightarrow A$. Par exemple, on a un morphisme surjectif de groupes additifs $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais pas de morphisme injectif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ (sinon l'image de 1 serait d'ordre 2 dans $\mathbb{Z}$, donc nul).

2 Foncteurs « image directe » et « préimage »

Étant donnée une application $f : E \longrightarrow F$, on lui associe deux applications

$$f_* : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right. \text{ et } f^* : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(F) & \longrightarrow & \mathfrak{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array} \right. .$$

1. *Montrer les équivalences*
$$\begin{array}{rcl} f \textit{ injective} & \iff & f^* f_* = \operatorname*{Id}_{\mathfrak{P}(E)} \text{ ;} \\ f \textit{ surjective} & \iff & f_* f^* = \operatorname*{Id}_{\mathfrak{P}(F)} \text{ ;} \\ f \textit{ bijective} & \iff & f^* \textit{ et } f_* \textit{ bijectives réciproques l'une de l'autre.} \end{array}$$
2. *Étant données deux applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$, montrer les égalités*[2]
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \text{ et } (g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$
3. *Décrire tous les produits possibles de f^* et f_* (pour la loi $\circ$). On pourra montrer que*[3]
$$f^* f_* f^* = f^* \text{ et } f_* f^* f_* = f_*.$$
4. *Montrer les équivalences suivantes :*
$$\begin{array}{rcccccl} f \textit{ injective} & \iff & f_* \textit{ injective} & \iff & f^* \textit{ surjective} & \iff & f^* f_* = \operatorname*{Id}_{\mathfrak{P}(E)} \text{ ;} \\ f \textit{ surjective} & \iff & f_* \textit{ surjective} & \iff & f^* \textit{ injective} & \iff & f_* f^* = \operatorname*{Id}_{\mathfrak{P}(F)} \text{ ;} \\ f \textit{ bijective} & \iff & f_* \textit{ bijective d'inverse } f^* & \iff & f^* \textit{ bijective d'inverse } f_*. & & \end{array}$$

[1] Un tel i est appelé *section* de s. On peut facilement montrer que l'axiome du choix est équivalent à l'énoncé « *toute surjection admet une section* ».

[2] On dit que les « correspondances » $f \mapsto f_*$ et $f \mapsto f^*$ sont des *foncteurs*, respectivement *covariant* et *contravariant*. Il est usuel de noter avec une étoile en bas tout ce qui est covariant et avec une étoile en bas tout ce qui est contravariant.

[3] Un élément b vérifiant les relations $aba = a$ et $bab = b$ est appelé un *pseudo-inverse* de a.

Solution proposée.

1. On rappelle les inclusions suivantes (classiques) qui sont à connaître (en donner des contre-exemples au passage) :

$$\begin{array}{rcl} A & \subset & f^{-1}(f(A)) \\ f\left(f^{-1}(B)\right) & \subset & B. \end{array}$$

(a) Partons de f injective. On veut $\forall A \subset E$, $A = f^{-1}(f(A))$. En fait, seul le sens $\supset$ mérite une explication d'après le rappel ci-dessus. On prend donc un x dans $f^{-1}(f(A))$. Son image est dans $f(A)$, mettons $f(x) = f(a)$ pour un $a \in A$, d'où $x \in A$ par injectivité de f.

Réciproquement, supposons $\forall A \subset E$, $A = f^{-1}(f(A))$. On veut montrer que f est injective, *i. e.* que la préimage d'un singleton $\{f(x)\}$ est réduite à $\{x\}$[4]. Or, il est immédiat que $f(\{x\}) = \{f(x)\}$, ce qui permet d'écrire

$$\{x\} = f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(\{f(x)\}), \text{ CQFD.}$$

(b) Partons cette fois de f surjective et montrons l'inclusion $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$. Soit donc $b \in B$. Par surjectivité, il provient d'un $x \in E$, mettons $b = f(x)$. Mais alors $f(x) \in B$, *i. e.* $x \in f^{-1}(B)$, d'où $f(x) = b \in f\left(f^{-1}(B)\right)$.

Réciproquement, étant donné un $y \in F$, les hypothèses impliquent

$$y \in \{y\} = f\left(f^{-1}(\{y\})\right) \subset \operatorname{Im} f,$$

d'où la surjectivité de f.

2. Pour calculer $(g \circ f)_*$, on regarde son action sur une partie $A \subset E$:

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)_*(A) & = & [g \circ f](A) = \{[g \circ f](a) \ ; \ a \in A\} \\ & = & \{g(f(a)) \ ; \ a \in A\} = \{g(y) \ ; \ y \in f(A)\} \\ & = & g(f(A)) = g_*(f_*(A)). \end{array}$$

De même, pour une partie $B \subset G$, on aura

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)^*(B) & = & [g \circ f]^{-1}(B) = \{x \in E \,; \ [g \circ f](x) \in B\} \\ & = & \{x \in E \,; \, g(f(x)) \in B\} = \left\{x \in E \,; \, f(x) \in g^{-1}(B)\right\} \\ & = & f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right) = f^*(g^*(B)). \end{array}$$

3. Suivons l'énoncé. D'après les inégalités rappelées au début, pour une partie $A \subset E$ dont on note B l'image par f, on peut écrire

$$f(A) = B \supset f\left(f^{-1}(B)\right) = f\left(\underbrace{f^{-1}(f(A))}_{\supset A}\right) \supset f(A),$$

d'où l'égalité $f_* f^* f_* = f_*$. De la même façon, pour une partie $B \subset F$, en appelant A sa préimage, on aura

$$f^{-1}(B) = A \subset f^{-1}(f(A)) = f^{-1}\left(\underbrace{f\left(f^{-1}(B)\right)}_{\subset B}\right) \subset f^{-1}(B), \text{ d'où } f^* f_* f^* = f^*.$$

Pour répondre à la question posée, on observe que, dans un produit de f_* et f^*, les deux termes doivent s'alterner pour que la composée ait un sens. Finalement, les égalités précédentes montrent que les seuls produits possibles comporteront au plus deux termes : f^* et f_*, $f^* f_*$ et $f_* f^*$, et bien sûr l'on n'oublie pas les produits vides $\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(E)}$ et $\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(F)}$.

[4] Ici apparaît un des rares cas où l'on ne part pas d'une égalité $f(x) = f(x')$ pour aboutir à $x = x'$. L'exception est justifiée ici par l'utilisation d'un principe très important : toujours formuler le problème dans un contexte où les hypothèses s'utilisent facilement.

(a) Partons de f injective. On a déjà montré l'égalité $f^* f_* = \mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(E)}$, laquelle implique d'une part l'injectivité de f_*, d'autre part la surjectivité de f^*.

Supposons à présent f_* injective. En particulier, l'image directe de deux singletons $\{x\}$ et $\{x'\}$ sont deux singletons $\{f(x)\}$ et $\{f(x')\}$ distincts, d'où l'injectivité de f.

Supposons enfin f^* surjective. On part de $f(x) = f(x')$. On dispose d'un antécédent B pour le singleton $\{x\} = f^*(B)$, qui est nécessairement un singleton $B = \{y\}$, d'où $y = f(x)$. De la même manière, on a un singleton $B' = \{y'\}$ tel que $f^*(B') = \{x'\}$, et on trouve pareillement $y' = f(x')$. On en déduit $y = y'$, d'où $B = B'$, $f^*(B) = f^*(B')$, et $x = x'$. Ceci montre l'injectivité de f, ce qui boucle la première chaîne d'équivalences.

(b) Partons de f surjective. L'égalité $f_* f^* = \mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(F)}$ sus-montrée implique la surjectivité de f_* et l'injectivité de f^*.

Supposons à présent f^* injective. Si un $y \in F$ n'avait pas d'antécédent, $f^*(\{y\})$ serait vide, tout comme $f^*(\emptyset)$, ce qui contredirait l'injectivité de f^*.

Supposons enfin f_* surjective. On part d'un $y \in F$. Le singleton $\{y\}$ admet un antécédent A par f_* disons $\{y\} = f(A)$, d'où un $a \in A$ tel que $y = f(a)$. Ceci montre la surjectivité de f

(c) Il suffit de mettre ensemble les deux premières chaînes d'équivalences.

Remarque. L'étoile en haut met en évidence une *dualité* entre injections et surjections.

3 Foncteurs « exponentielle » et « puissance »

Fixons un ensemble G. À une application $f : E \longrightarrow F$ on associe les applications[5]

$$G_*(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} E^G & \longrightarrow & F^G \\ g & \longmapsto & f \circ g \end{array} \right. \text{ et } G^*(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} G^F & \longrightarrow & G^E \\ g & \longmapsto & g \circ f \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que G_* et G^* sont des foncteurs respectivement covariant et contravariant,* i. e. *que*

$$\left\{ \begin{array}{l} G_*(\beta \circ \alpha) = G_*(\beta) \circ G_*(\alpha) \\ G^*(\beta \circ \alpha) = G^*(\alpha) \circ G^*(\beta) \end{array} \right. .$$

2. *Montrer les équivalences*

$$\begin{array}{rcl} f \textit{ injective} & \iff & \forall G,\ G_*(f) \textit{ injective} \iff \forall G \neq \emptyset,\ G^*(f) \textit{ surjective} ; \\ f \textit{ surjective} & \iff & \forall G,\ G_*(f) \textit{ surjective} \iff \forall G,\ G^*(f) \textit{ injective.} \end{array}$$

Expliquer la restriction $G \neq \emptyset$ par un contre-exemple.

3. *Quel est le lien entre foncteurs préimage et exponentielle ?*

Solution proposée.

1. Fixons des notations $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$. On observe alors que appliquer $G_*(\beta \circ \alpha)$ à un $g \in E^G$ revient au même que de lui appliquer $G_*(\alpha)$ puis $G_*(\beta)$:

$$\begin{array}{l} g \overset{G_*(\alpha)}{\longmapsto} \alpha \circ g \overset{G_*(\beta)}{\longmapsto} \beta \circ (\alpha \circ g) \\ g \overset{G_*(\beta\circ\alpha)}{\longmapsto} (\beta \circ \alpha) \circ g, \end{array}$$

d'où la première égalité. Pour la seconde, on prend un $g \in G^C$ et on regarde :

$$\begin{array}{l} g \overset{G_*(\beta)}{\longmapsto} g \circ \beta \overset{G_*(\alpha)}{\longmapsto} (g \circ \beta) \circ \alpha \\ g \overset{G^*(\beta\circ\alpha)}{\longmapsto} g \circ (\beta \circ \alpha) ; \end{array}$$

on trouve la même chose, *CQFD*.

[5] G_* est appelé foncteur « *puissance* G », tandis que G^* est le foncteur « *exponentielle de base* G ». En effet, G_* met les ensembles de départ et d'arrivée « à la puissance G », avec une remarque analogue pour G^*.

2. Nous allons montrer chaque équivalence en se ramenant aux propriétés sur f.

(a) Montrons (f injective $\iff \forall G,\ G_*(f)$ injective).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit un ensemble G. Pour montrer $G_*(f)$ injective, on part de $[G_*(f)](g_1) = [G_*(f)](g_2)$, *i. e.* $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Par définition, cela signifie $f(g_1(x)) = f(g_2(x))$ pour tout $x \in G$, soit $g_1(x) = g_2(x)$ par injectivité de f, d'où $g_1 = g_2$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On prend un G très simple, réduit au singleton $\{0\}$. Les applications de $E^G = E^{\{0\}}$ s'identifient alors aux élements de E, de même pour F^G, de sorte que $G_*(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} E^{\{0\}} & \longrightarrow & F^{\{0\}} \\ g & \longmapsto & f \circ g \end{array} \right.$ s'identifie à l'application f (envoie une valeur $g \in E$ sur son image par f). De manière plus précise, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors les applications $g_i : 0 \mapsto x_i$ (pour $i = 1, 2$) ont même image $0 \mapsto f(x_i)$ par $G_*(f)$, donc coïncident, ce qui montre l'égalité souhaitée $x_1 = x_2$.

(b) Montrons (f injective $\iff \forall G \neq \emptyset,\ G^*(f)$ surjective).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Fixons un G non vide. On veut atteindre un $h \in G^E$ par $G^*(f)$, *i. e.* trouver un $g \in G^F$ tel que $h = [G^*(f)](g)$, *i. e.* tel que $h = g \circ f$. On a envie de poser $g := h \circ f^{-1}$, mais ce n'est possible que sur $f(E)$. Or, la formule $h = g \circ f$ se fiche éperdûment de savoir ce que vaut g en dehors de $f(E)$, ce qui permet de définir g en dehors en dehors de $f(E)$ par n'importe quoi dans G (on peut car G est non vide !).

Lorsque G est vide, si $G^*(f)$ était surjective pour tout $f : E \hookrightarrow F$, on aurait une surjection $\emptyset^E \twoheadrightarrow \emptyset^F$ pour tous ensembles E, F finis, d'où $0^{|E|} \geq 0^{|F|}$, ce qui commence à poser de sérieux problèmes lorsque $(|E|, |F|) = (1, 0)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $a \in E$. On peut définir un Dirac δ_a en a, application de $\{0,1\}^E$ qui possède par hypothèse un antécédent g dans $\{0,1\}^F$ par $G^*(f)$ avec $G = \{0,1\}$, disons $\delta_a = g \circ f$. Alors, pour tout b autre que a, on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \delta_a(a) = g(f(a)) \\ 0 = \delta_a(b) = g(f(b)) \end{array} \right. ,$$

ce qui empêche l'égalité $f(a) = f(b)$, d'où l'injectivité de f.

(c) Montrons (f surjective $\iff \forall G,\ G_*(f)$ surjective).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Fixons G et $h \in F^G$. On veut un $g \in E^G$ tel que $h = f \circ g$, *i.e.* une application g associant à tout $z \in G$ un antécédent de $h(z)$ par f. Comme f est surjective, on peut toujours trouver des antécédents à $h(z)$; l'axiome du choix nous donne alors l'existence d'un g cherché.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $y \in F$. La fonction constante égale à y a un antécédent g par $G_*(f)$, *i. e.* $f \circ g \equiv y$, d'où, en appliquant en un élément a d'un G pris non vide, $f(g(a)) = y$. Ceci nous donne un antécédent pour y.

(d) Montrons (f surjective $\iff \forall G,\ G^*(f)$ injective).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Fixons G et partons de $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. On applique en un antécédent par f d'un $y \in F$ quelconque, ce qui donne $g_1(y) = g_2(y)$ pour tout y, d'où $g_1 = g_2$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Observons que les antécédents de la fonction nulle (pourvu que l'on choisisse G muni d'un élément noté 0) sont les fonctions $g \in G^F$ vérifiant $g \circ f = 0$, *i. e.* $G^*(f)(g) = 0$, ou encore $g = 0$ (par injectivité de $G^*(f)$). Prenons maintenant un $y \in F$. Pourvu que l'on choisisse G contiennant deux éléments appelés 0 et 1, on peut parler du Dirac en y. C'est une application δ_y non nulle, donc non nulle sur $\operatorname{Im} f$ d'après ce qui précède (contraposé), donc il y a un $f(x) \in \operatorname{Im} f$ tel que $\delta_y(f(x)) \neq 0$, ce qui signifie exactement $\exists x \in E,\ f(x) = y$, d'où notre antécédent recherché.

3. Fixons un $f : E \longrightarrow F$. Il s'agit de comparer les applications

$$\begin{array}{rcl} f^* & : & \mathfrak{P}(F) \longrightarrow \mathfrak{P}(E) \\ G^*(f) & : & G^F \longrightarrow G^E. \end{array}$$

Il suffit pour cela de comparer $\mathfrak{P}(E)$ avec G^E. On se souvient alors que $\mathfrak{P}(E) \simeq \{0,1\}^E$ via la fonction caractéristique χ. On peut ainsi dessiner un *diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(F) & \xrightarrow{f^*} & \mathfrak{P}(E) \\ \downarrow \chi & & \downarrow \chi \\ G^F & \xrightarrow{G^*(f)} & G^E \end{array} \quad \text{avec } G = \{0,1\}.$$

On va montrer que ce diagramme est commutatif[6], *i. e.* que l'on dispose de la relation

$$G^*(f) = \chi \circ f^* \circ \chi^{-1}.$$

Il s'agit de montrer $G^*(f) \circ \chi = \chi \circ f^*$ sur $\mathfrak{P}(F)$[7]. Soit donc B une partie de F. On a d'une part

$$[\chi \circ f^*](B) = \chi(f^*(B)) = \chi\left(f^{-1}(B)\right) = \chi_{f^{-1}(B)},$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
[G^*(f) \circ \chi](B) &= [G^*(f)](\chi_B) \\
&= \chi_B \circ f : y \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } f(y) \in B \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\
&= \left(y \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } y \in f^{-1}(B) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \right) \\
&= \chi_{f^{-1}(B)}, \textit{ CQFD.}
\end{aligned}$$

Remarque. L'étoile en haut met en évidence pour la *deuxième* fois une dualité entre injections et surjections.

[6] Un diagramme d'applications est dit *commutatif* si, lorsque l'on suit deux chemins de flèches partant d'un même ensemble A et arrivant à un même ensemble B, les composées ainsi obtenues sont les mêmes.

[7] Retenir cette astuce de réécriture, certes moins jolie que la conjugaison, mais ayant l'avantage de ne pas faire apparaître d'inverse.