Addition, multiplication, exponentiation : récurrences (version chantier)

Marc SAGE

Table des matières

1 Rappels sur l'axiome de l'infini (équivalence des "infinis premiers")

Idée : entiers code notre *action*. Action illimité <–> pas d'obstcle à l'action <-> on peut toujours agir. On code donc l'infini par un ensemble stable par une action (et contenant un point de départ).

Soit o un objet (notre point de départ) et σ une fonctionnelle (la "fonction" σ généralise le successeur s).

On abrégera par commodité

$$a' := \sigma(a)$$

L'axiome de l'infini de dépat o et de pas σ se formule :

$$\exists I,\ o \in I \text{ et } \forall i \in i,\ i' \in I.$$

On supposera σ injective et n'atteignant pas 0. *On sait alors que* σ pas de point fixe.

Nous avons montré (indépendmment de tels σ et o) dans aure DM (2 EnsAxiomes)

$$Infini_o^\sigma \Longleftrightarrow Infini_\emptyset^s.$$

Il y a une partie de I contenant o stable par σ et minimale pour ces propriété. On la notera N.

On a le théorème de récurrence : pour tout 1-prédicat P, on a l'implication

$$(P_o \wedge [\forall n \in N,\ P_n \implies P_{n'}]) \implies (\forall n \in N,\ P_n).$$

Tout entier $\neq o$ est successeur

Il y a une unique partie de N (que l'on notera $[o,n]$) contenant o,n mais pas n' et telle que pour tout $a \in N$ autre que n on ait l'équivalence $\forall a \neq n,\ a \in [o,n] \Longleftrightarrow a' \in [o,n]$. Elle se construit "par récurrence" $[o,n'] = [o,n] \amalg \{n'\}$

Soit E un ensemble contenant un élément ε et stable par une application f. Il y a une unique suite $e : N \longrightarrow E$ tq $e_o = \varepsilon$ et $e_{a'} = f(e_a)$ pour tout $a \in N$.

On garde désormais o, σ et l'ensemble "infini" associé N.

De ce qui précède, on utilise : principe de récurence, les suites récurrences. (et les segments $[0,n]$ pour une seule question aindépendnate)

On définit $1 := o'$

2 Addition

Souhait : (pour les entier primtifs) agir $a+b$ fois c'est agir a fois *puis* b fois. Eg : $o''' + o'' = o'''''$. Donc se passe dans le "nombre" d'itération.

En particulier, ajouter 1 est agir une fois de plus, çàd appliquer σ.

Il est raisonnable d'espérer les propriétés suivantes :

1. commutativité
$$a + b = b + a\,;$$
2. associativité
$$a + (b + c) = (a + b) + c\,;$$
3. élement neutre o
$$a + o = a\,;$$
4. bon comportement vis-à-vis du successeur
$$a + b' = (a + b)'.$$

1. *Montrer qu'il y a une unique loi + vérifiant les axiomes 3 et 4 ci-dessus.*
2. *Prouver alors les deux premiers axiomes.*
3. *Montrer que + est régulier.*

DEM

1. **Anayse.** Fixons un $a \in N$. Notons α la suite $n \mapsto a+n$. Les deux derniers axiomes s'écrivent $\alpha_o = a$ et $\alpha_{n'} = \alpha'_n$ or on sait qu'il n'y a qu'au plus une telle suite.

   Synthèse. Soit $a \in N$. La fonction σ stabilise N, donc il y a une unique suite α telle que $\left\{\begin{array}{c} \alpha_o = a \\ \alpha_{n'} = \sigma(\alpha_n) \end{array}\right.$ (moralement $\alpha_n = a+n$) Notons ${}^a\alpha$ cette unique élément de N^N. On définit alors

$$+ \ : \left\{\begin{array}{ccc} N^2 & \longrightarrow & N \\ (a,b) & \longmapsto & {}^a\alpha_b \end{array}\right.$$

   Fixons a et abrégeons $\alpha := {}^\alpha\alpha$
   Pour $n = o$, il vient

$$a + o = \alpha_o = a \text{ comme souhaité}$$

   Pour $n = 1$, on a

$$a + 1 = \alpha_1 = \alpha_{o'} = \alpha'_o = a' \text{ comme attendu}$$

   Ensuite, on a toujours

$$(a+n)' = \alpha'_n = \alpha_{n'} = a + n' \text{ comme voulu.}$$

2. **ASSOS** Axiome 4 s'écrit aussi

$$(a+n)+1 = a+(n+1).$$

   On en déduit par récurrence l'associativité de + :

$$(a+n)+x = a+(n+x).$$

   Pour $x = o$, on a $(a+n)+o = (a+n) = a+n = a+(n) = a+(n+o)$.
   Supposons la relation pour un $x \geq o$. Notons A la suite définissant l'addition depuis $a+n$. Alors

$$\begin{array}{rcl} (a+n)+x' & = & A_{x'} = A'_x = ((a+n)+x)' = (a+(n+x))' = \alpha'_{n+x} = \alpha_{(n+x)'} = \alpha_{n+x'} \\ & = & a+(n+x')\,, \textit{ CQFD.} \end{array}$$

   COMM
   Montrons $a+1 = 1+a$ par récurrence. Pour $a = o$, rien à faire. Ensuite, on a

$$\begin{array}{rcl} (a+1)+1 & = & a+(1+1) \\ & = & (1+1)+a \\ & = & 1+(1+a) \\ & = & 1+(a+1)\,, \text{ ok} \end{array}$$

   On peut alors montrer $a+b = b+a$ par récurrence sur a. Pour $a = o$, rien à faire. Ensuite, si a commute avec tout le monde, on a

$$(a+1)+b = a+(1+b) = (1+b)+a = (b+1)+a = b+(1+a) = b+(a+1)\,, \textit{ CQFD.}$$

3. Montrons par récurrence sur n :

$$a+n = b+n \implies a = b.$$

   Pour $n = o$, c'est tautologique.
   Pour $n = 1$, c'est l'injectivité de σ.
   Supposons le résultat vrai pour un $n \geq o$. Fixons a et b deux entiers tels que $a+n+1 = b+n+1$. On a donc

$$(a+1)+n = (b+1)+n,$$

   d'où $a+1 = b+1$ par hypothèse de récurrence et $a = b$ par l'hypothèse au rang 1.

3 Ordre

Souhait : $a \leq b$ <=> a vient après b dans la liste o, o', o'', o''', o'''' <=> pour avoir b on a itéré un certain nombre de fois *en plus* d'obtenir a :

$$a \leq b \iff \exists n,\ b = a + n.$$

On veut en particulier o plus petit élément et $n < n'$.

1. *Montrer qu'il y a sur N un unique ordre $\leq$ dont o est le plus petit élément et telle que $n < n'$. Est-ce N a un max ?*
2. *Montrer que o n'est pas un successeur. En déduire*
$$a + b = o \implies a = b = o.$$
3. *Montrer que l'on peut simplifier les comparaisons (larges comme strictes). En déduire*
$$\nexists n,\ a < n < a + 1.$$
4. *Montrer que l'on peut additionner des comparaisons et que celle résultante sera stricte dès que l'une ajoutée l'est. Montrer que l'on peut simplifier les comparaisons strictes.*
5. *Montrer les équivalences*
$$a > n \iff a \geq n + 1.$$
6. *Montrer que toute partie non vide admet un min. Généraliser à une formule f écrite dans le langage*[1] *de N tq $\exists a,\ f(a)$ et $\forall n, \exists a < n,\ f(a)$. Montrer en fait que cette propriété* équivaut *au principe d'induction.*
7. *Montrer que l'ordre $\leq$ est total.*
8. *Montrer $[o, n] = \{a \in N\ ;\ a \leq n\}$. Que vaut $\max[o, n]$?*

DEM

1. **Analyse** Fixer b, rec sur a.
   Pour $a = o$, on veut $o \leq b \iff \exists n,\ b = o + n = n$, c'est vrai comme ($vrai \iff vrai$).
   Supposons le résultat pour un $a \geq o$.
   => Supp $a' \leq b$. Alors $a < a' \leq b$, donc $a < b$; soit n tq $b = a + n$, on a $n \neq o$ sinon $a = b$, donc $n = m + 1$ et $b = a + m + 1 = a' + m$.
   <= Supp $\exists m,\ b = a' + m$. En p, $\exists n,\ b = a + n$, donc $b \geq a$. Si =, on a $b = b' + m$, d'où $o = 1 + m$, abs
   Synthèse On définit donc $a \leq b \iff \exists n, b = a + n$.
   Réflexif car $a = a + o$.
   Anti-symétrique : $b = a + n = b + n + m \implies o = n + m \implies n = m = o \implies a = b$.
   Transitivité : $c = b + m = a + (n + m)$.
   Claire que o est min ($a = o + a \Longrightarrow \exists n,\ a = o + n \Longleftrightarrow a \geq o$)
   Et que $a' > a$ ($a' = a + 1 \Longrightarrow \exists n,\ a' = a + n \Longleftrightarrow a' \geq a$)
   Si N avait un max n, alors $n' = n + 1 > n = \max N$, abs
2. Si o était successeur $o = m'$, alors $1 + m = m + 1 = m' = o$, donc $o \geq 1 = o'$, abs.
   Supposons $a + b = o$. Si b est un successeur, mettons $b = n'$, on a aurait $o = a + n' = (a + n)'$, *absurde*.
3. résulte de ce que + est simplifiable :
$$a + n \leq b + n \iff \exists x, b + n = a + n + x \iff \exists x, b = a + x \iff a \leq b$$
   d'où
$$a + n < b + n \iff \begin{cases} a + n \leq b + n \\ a + n \neq b + n \end{cases} \iff \begin{cases} a \leq b \\ a \neq b \end{cases} \iff a < b.$$

[1] Écrire $\forall a \in A$ ne veut rien dire si A n'est pas défini par une formule logique au premier ordre en la signature $(0, 1, +, \times, s)$. Evidement, dans notre étude, notre $\mathbb{N}$ est un ensemble, donc $\forall a \in A$ a toujours un sens.

Soit a. Mq par rec sur n (la conclusion en découlera) :

$$n \leq a < n+1 \implies a = n.$$

Pour $n = o$, on a $a < 1$. Si $a \neq o$, a est un successeur $a = b+1$, donc $b+1 \leq 1$, $b \leq o$, $b = o$, $1 = a < 1$, absurde.

Supposons vrai à un rang $n \geq o$. Partons de $n+1 \leq a < n+1+1$. L'inégalité de gauche empêche la nullité de a, donc a s'écrit $b+1$. On peut alors simplifier par 1 dans $n+1 \leq b+1 < n+2$ et utiliser l'HR pour conclure $b = n$ et $a = b+1 = n+1$.

4. On peut additionner les inégalités

$$\begin{cases} a \leq b \\ \alpha \leq \beta \end{cases} \implies b + \beta = a + \alpha + (n + \nu) \implies a + \alpha \leq b + \beta.$$

Si l'une des comparaison est strictes, l'un des n ou ν est non nul, donc la somme $n + \nu$ est non nulle, donc la $\leq$ finale est stricte.

5. Montrons en lemme le cas $n = o$. On a l'imoplkcaition $a \geq o + 1 \Longrightarrow a \geq 1 \Longrightarrow a > o$. On a les implciation $a > o \Longrightarrow a \neq o \Longrightarrow a$ successeur$\Longrightarrow \exists n, a = 1 + n \Longrightarrow a \geq 1$.

On récurre ensuite sur a.

Pour $a = o$, $o > n$ ets faux car o est min et $o \geq n+1 \Longleftrightarrow n+1 = o$ (car o est min) ce qui est faux, d'où l'équivalence faux<=>faux.

Supp ok pour un $a \geq o$. ON a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
a+1 > n \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a+1 \geq n \\ a+1 \neq n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists d,\ a+1 = n+d \\ a+1 \neq n \end{cases} \Longleftrightarrow \exists d, \begin{cases} a+1 = n+d \\ a+1 \neq n \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists d, \begin{cases} a+1 = n+d \\ n+d \neq n \end{cases} \Longleftrightarrow \exists d, \begin{cases} a+1 = n+d \\ d \neq o \end{cases} \Longleftrightarrow \exists d, \begin{cases} a+1 = n+d \\ d > o \end{cases} \\
&\overset{\text{lemme}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists d, \begin{cases} a+1 = n+d \\ d \geq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \exists d, \begin{cases} a+1 = n+d \\ \exists \delta,\ d = 1+\delta \end{cases} \Longleftrightarrow \exists d,\ \exists \delta, \begin{cases} a+1 = n+d \\ d = 1+\delta \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists \delta,\ \exists d, \begin{cases} a+1 = n+d \\ d = 1+\delta \end{cases} \Longleftrightarrow \exists \delta,\ a+1 = n+(1+\delta) \Longleftrightarrow \exists \delta,\ a = n+\delta \Longleftrightarrow a \geq n
\end{aligned}$$

6. $\boxed{\Longrightarrow}$ f code une partie A non vide sans plus petit élément. Nous allons montrer par induction que

$$\forall n,\ A \geq n.$$

cela conduira à une contradiction en prenant un élément a_o dans A (c'est là qu'il faut supposer A non vide) et en appliquant ce qui précède à $n = a'_o$

o étant le plus petit élément de N, on a toujours $A \geq o$.

Supposons $A \geq n$ pour un $n \geq o$. Alors n ne peut appartenir à A sinon il serait son plus petit élément. On a donc $A > n$, i.e. $A \geq n'$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit P_n une formule vérifiée pour $n = o$ et telle que $P_n \implies P_{n'}$. Si P n'est pas vraie pour tous les entiers, la partie $A := \{n \in N,\ \neg P_n\}$ contient un plus petit élément a. Alors $a \neq o$, donc est successeur d'un b ; mais alors P_b fausse, sinon P_a à savoir $P_{b'}$ serait vraie, d'où $b \in A$, contredisant $a \leq A$.

7. Fixons un entier a et montrons par récurrence sur n que

$$n \leq a \text{ ou } n \geq a.$$

Pour $n = o$, on a $n = o \leq a$.

Supposons maintenant $n \leq a$ ou $n \geq a$ pour un $n \geq o$. Si on est dans le second cas, on additionne $\begin{matrix} 1 \geq o \\ n \geq a \end{matrix}$, d'où $n+1 \geq a$, CQFD. Dans le premier cas, ou bien $n = a$, auquel cas $n+1 = a+1 \geq a$, au bien $n < a$, auquel cas $n+1 \leq a$ par le lemme, *CQFD.*

8. Rec sur n. Puisque $o = \min N$, on a $\{a\ ;\ a \leq o\} = \{o\} = [o, o]$. Ensuite, vu que

$$[o, n'] = [o, n] \amalg \{n'\} = \{a\ ;\ a \leq n\} \amalg \{n'\} = \{a\ ;\ a < n'\} \amalg \{a\ ;\ a = n'\} = \{a\ ;\ a \leq n'\}.$$

En particulier, on en déduit $\max [o, n] = n$.

4 Multiplication

Souhaite : itérer $a \times b$ fois, c'est itérer a fois "itérer b fois".

On prendra dès à présent la convention de noter la loi $\times$ par un point $\cdot$ voire par rien du tout. La multiplication sera prioritaire sur l'addition, de sorte que l'expression

$$a \times b + c \text{ signifiera } (a \times b) + c \text{ et se notera } ab + c.$$

De même que pour l'addition, il est raisonnable d'espérer les propriétés suivantes :

1. commutativité
$$ab = ba\,;$$
2. associativité
$$a\,(bc) = (ab)\,c\,;$$
3. distributivité
$$(a+b)\,(c+d) = ac + ad + bc + bd\,;$$
4. élément absorbant o
$$a \cdot o = o\,;$$
5. bon comportement vis-à-vis du successeur
$$a \cdot (b+1) = ab + a.$$

1. *Montrer qu'il y a une unique loi $\times$ vérifiant les axiomes* **??** *et* **??**.
2. *Montrer que* 1 *est neutre et que $\times$ est intègre.*
3. *Montrer la distrib*
4. *En déduire asso com*
5. *Montrer on peut mulplier des $\leq$, multplier $<$ par un $\neq o$ (why $\neq o$?), multiplier des $<$. Est-ce que $\leq \times <$ donne $<$?*
6. *En déduire que la multiplication est régulière (à l'exception de la division par o). Idem pour $\leq$ et $<$.*

DEM

1. **Analyse.** Fixons $a \in N$. Ntons μ la suite $n \mapsto a{\cdot}n$. Les deux axiomes se réécrivent $\begin{cases} \mu_o = o \\ \mu_{n+1} = \mu_n + a \end{cases}$, d'où l'unicité.

   Synthèse. Soit $a \in N$. La fonction $+a$ stabilise N, donc il y a une unique suite (μ_n) telle que $\begin{cases} \mu_o = o \\ \mu_{n+1} = \mu_n + a \end{cases}$. Notons ${}^a\mu$ cette suite de N^N. On définit alors
$$\times\ : \begin{cases} N^2 & \longrightarrow & N \\ (a,b) & \longmapsto & {}^a\mu_b \end{cases}$$
   On a déjà
$$a \times o = \mu_o = o \text{ comme souhaité.}$$
   Ensuite,
$$a \cdot (b+1) = \mu_{b+1} = \mu_b + a = ab + a \text{ comme voulu.}$$
2. Montrons que 1 est neutre :
$$a \cdot 1 = a \cdot o' = (a \cdot o) + a = o + a = a.$$
   Soient a et b tels que $ab = o$. Supposons $b \neq 0$. Alors b est successeur, mettons $b = n+1$, d'où $o = ab + a$ et $a = o$.

3. À gauche, on récurre sur n pour montrer

$$a\,(b+n) = ab + an.$$

Pour $n = o$, on a
$$a\cdot(b+o) = a\cdot(b) = ab = ab + o = ab + (a\cdot o)\,.$$

Pour $n = 1$, on l'a déjà fait, c'est la compatibilité avec le successeur.

Supposons la relation vérifiée pour un $n \geq o$. Notons μ' la suite définissant la multiplication par $b+n$. On a alors

$$a\,(b+(n+1)) = a\,((b+n)+1) = a\,(b+n) + a = ab + an + a = ab + a\,(n+1)\,,\ \mathit{CQFD}.$$

À droite, on récurre sur n pour montrer

$$(a+b)\,n = an + bn.$$

Pour $n = o$, tout vaut o, d'où l'égalité.

Supposons la relation vérifiée pour un $n \geq o$. On en déduit

$$\begin{aligned}(a+b)\,(n+1) &= (a+b)\,n + (a+b) = (an+bn) + (a+b) = (an+a) + (bn+b)\\ &= a\,(n+1) + b\,(n+1)\,,\ \mathit{CQFD}.\end{aligned}$$

4. Montrons l'associativité $(ab)\,c = a\,(bc)$ par récurrence sur c. Pour $c = o$, rien à faire. Ensuite, on a

$$(ab)\,(c+1) = (ab)\,c + ab = a\,(bc) + ab = a\,(bc+b) = a\,(b\cdot(c+1))\,,\ \mathit{CQFD}.$$

De même, la commutativité $ab = ba$ par récurrence sur a. POur $a = o$, trivial. Ensuite, on écrit

$$(a+1)\,b = ab + b = b + ab = b\,(1+a) = b\,(a+1)\,,\ \mathit{CQFD}.$$

5. On peut multiplier les inégalités de même sens :

$$\left\{\begin{array}{c} a \leq b \\ \alpha \leq \beta \end{array}\right. \implies b\beta = a\alpha + (\alpha n + an' + nn') \implies a\alpha \leq b\beta.$$

Sens strict par un entier non nul :

$$\left\{\begin{array}{c} a < b \\ n \neq o \end{array}\right. \implies bn = an + kn \geq an\,;\text{ si } bn = an,\ a = b \text{ par intégrité, } \textit{absurde}\text{, d'où } an < bn.$$

(ceg : multplier par o donne $=$, donc $<$ pas préservé)

Inégalités srictes : supposons $\left\{\begin{array}{c} a < b \\ \alpha < \beta \end{array}\right.$. Alors $\left\{\begin{array}{c} \alpha \leq \beta \\ a \leq a \end{array}\right. \implies a\alpha \leq a\beta$ et $\left\{\begin{array}{c} a < b \\ \beta \neq o \end{array}\right. \implies a\beta < b\beta$, d'où $a\alpha < b\beta$. Attention, contrairement à l'addittion , multiplier $\leq$ par $<$ donne du large $\leq$: il suffit de prendre $o \leq o$

6. Mq $\left\{\begin{array}{c} an = bn \\ n \neq o \end{array}\right. \implies a = b$. Si $a \neq b$, mettons $a < b$, alors $an < an$, exclu. (On peut aussi le faire avec une récurrence sur a, dans laquelle d'incorpore une récurrence sur b.)

pour $<$: $\left\{\begin{array}{c} an < bn \\ n \neq o \end{array}\right. \implies a < b$. La contraposée a déjà été montrée.

On peut mettre les deux sens précédents ensemble, ce qui donne $\left\{\begin{array}{c} an \leq bn \\ n \neq o \end{array}\right. \implies a \leq b$.

5 Exponentiation

Souhaite : itérer a^b fois, c'est itérer b fois "multiplier par a".

De même que pour l'addition, il est raisonnable d'espérer les propriétés suivantes :

1. itération de $\times$
$$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$$
2. distributivité
$$a^{b+c} = a^b a^c\,;$$
3. élément absorbant o
$$a^0 = 1\,;$$
4. bon comportement vis-à-vis du successeur
$$a^{b+1} = a^b a.$$

1. *Montrer qu'il y a une unique loi $\wedge$ vérifiant les axiomes 3et4 .*
2. *Montrer que 1 est neutre et que $a^p = 0 \Longrightarrow a = 0$*
3. *asso com ?*
4. *Montrer les deux distrib*
5. *Mq $\wedge$ croiss (sauf base 0), sttt si base ≥ 2 ou si exp ≥ 1.*
6. *En déduire que l'exponentiation est régulièr (sauf cas pathol), idem pour pour $\leq$* et w. *Montrer on peut exp des $\leq$ (sauf un cas pathol)*
7. *résoudre $a^b = 0$ et $= 1$ et $= 2$ et $= 3$*

SSS

1. $\cdot a$ stablise N donc $\exists!\varepsilon : N \longrightarrow N$ tq $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_{n'} = \varepsilon_n a$. NOtons ${}^a\varepsilon$. Def alors
$$\wedge\ : \left\{ \begin{array}{ccc} N^2 & \longrightarrow & N \\ (a,b) & \longmapsto & {}^a\varepsilon_b \end{array} \right.$$
2. Alors $1^n = 1$ par rec sur n. Ok pour $n = 0$, ensuite $1^{n'} = 1^n 1 = 11 = 1$.
Soit $a \neq 0$. Mq $a^p \neq 0$ par rec sur p. $p = 0$ ok car $1 \neq 0$. Soit p tq $a^p \neq 0$. Multiplier par $a \neq 0$ donne (par intégraité) $a^p a \neq 0$ cqfd.
3. pas comm : $1^n = 1 < n = n^1$
pas asso car $2^{(1^n)} = 2^1 = 1$ et $\left(2^1\right)^n = 2^n > 2^0 = 1$ (dès que $n > 0$).
4. Mq $a^{b+c} = a^b a^c$ par rec sur c. On a $a^{b+0} = a^b = a^b 1 = a^b a^0$. Ensuite, $a^{b+c'} = a^{(b+c)'} = a^{b+c} a = a^b a^c a = a^b$.
Mq $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ par rec sur c. On a $\left(a^b\right)^0 = 1 = a^0 = a^{b0}$. Ensuite, $\left(a^b\right)^{c'} = \left(a^b\right)^c a^b = a^{bc} a^b = a^{bc+b} = a^{bc'}$
5. Soit $a < b$. Mq $a^n < b^n$ par rec sur $n \geq 1$. Ok pour $n = 1$. Ensuite, on multiplie $a^n < b^n$ et $a < b$, d'où $a^{n'} < b^{n'}$.
Soit $a \geq 2$. Mq $p > q \geq 0 \Longrightarrow a^p > a^q$ par rec sur q.
Pour $q = 0$: Soit $p > 0$, disons $p = \pi'$. On a $a^\pi \geq 1$ et $a \geq 2$, donc $a^\pi a \geq 12 > 1$, d'où $a^p > a^0$.
Soit q tq... SOit $p > q'$. Alors $p > 0$, donc $p = \pi'$; la comp $p > q'$ devient $\pi' > q'$, çàd $\pi > q$, d'où $a^\pi > a^q$; or $a > 1$ donc $a^\pi a > a^q 1$, çàd $a^p > a^{q'}$
CAs pathoo : si exp 0 cst donc crssoin ; si base 1, cst donc croiss ; si base 0, décroit
6. C'est l'injectivé sauf cas pathol. Pour $<$, c'est la strict croiss. En découle $\leq$.
Supp $a \leq b$ et $p \leq q$. Par croissance, on a $a^p \leq b^p \leq b^q$ (sauf si $b = 0$, $p = 0$)

7. Déjà vu que $a^b = 0 \Longrightarrow a = 0$ ($\Longleftarrow$trivial)

Mq $\left\{ \begin{array}{c} a^b = 1 \\ b > 0 \end{array} \right. \Longrightarrow a = 1$. a ne peut être nul (sinon $a^{b>0} = 0$), donc $a \geq 2$, d'où $a^b > a^0 = 1$ abs.

Mq $a^b = 2 \Longrightarrow (a, b) = (2, 1)$. Déjà $a \neq 0, 1$ et $b \neq 0$. D'où $a^b \geq 2^b \geq 2^1$ avec = ssi (base $a = 2$) et (exp $b = 1$)

Mq $a^b = 3 \Longrightarrow (a, b) = (3, 1)$. Déjà $a \neq 0, 1$ et $b \neq 0$. IL suffit de mq $a \neq 2$ pour conclure comme ci-dessu. Suppos $a = 2$, d'où $2^b = 3$. Alors $b < 2$ (sinoin $2^b \geq 2^2 = 4 > 3$) et ni $b = 0$ ni $b = 1$ convient.

6 Super ? ?

Def $a \uparrow b$ par $a \uparrow b' := a^{a \uparrow b}$ (dans autre sens, aucun interêt –> EXO)
Quoi démontrer ? ? ?