Ensembles & applications

Marc SAGE

27 septembre 2011

Table des matières

1 En apéritif **2**

2 Introduction aux diagrammes commutatifs **3**

3 Théorème de Knaster-Tarski **3**

4 Paradoxe de Russell – Théorème de Cantor **4**

5 Théorème de Bendixon-Bernstein-Borel-Cantor-Dedekind-Schröder-Zermelo **4**

6 Calculs dans l'anneau $(\mathfrak{P}(E), \cap, \cup)$ **6**

7 Calculs dans l'anneau $\mathfrak{P}(E)$: la suite, starring $\bigcap$ & $\bigcup$ **8**

8 Calculs dans l'anneau $\mathfrak{P}(E)$: $\bigcap$ & $\bigcup$ vous saluent **9**

9 Intermède technique **9**

10 Interlude combinatoire **10**

11 Une caractérisation des ensembles infinis **11**

12 Des bijections ne préservant pas la nature des intervalles **11**

13 $\mathbb{R} \simeq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable **12**

14 Équipotence des $\mathbb{R}^n$ **12**

15 Autour de $\mathfrak{S}_E$ **13**

16 Partitions et cardinaux **14**

17 Théorème de Zorn (sans les ordinaux) **15**

Rappel sur fonctions & applications.

Une *fonction* est la donnée d'un ensemble A (dit *de départ*, *source*), d'un ensemble B (dit *d'arrivée*, *but*) et d'une partie $G \subset A \times B$ (le *graphe* de f) telle qu'à un $a \in A$ ne corresponde qu'au plus un $b \in B$:

$$\forall a \in A,\ \forall b, b' \in B,\ \left\{ \begin{array}{c} (a,b) \in G \\ (a,b') \in G \end{array} \right. \Longrightarrow b = b'.$$

On note $\operatorname{Func}(A,B)$ ou $\operatorname{Fonc}(A,B)$ l'ensemble des fonctions de A dans B.

Le *domaine* d'une fonction $f \in \operatorname{Func}(A,B)$ de graphe G est

$$\operatorname{Dom} f := \{a \in A\ ;\ \exists b \in B,\ (a,b) \in G\}.$$

Pour $a \in \operatorname{Dom} f$, on note

$$f(a) := \cup \{b \in B\ ;\ (a,b) \in G\}$$

l'unique $b \in B$ tel que $(a,b) \in f$ et on l'appelle l'*image* de a par f.

Une *application* de A dans B est une fonction de A dans B dont le domaine est A tout entier – en d'autres termes, une fonction partout définie. Et on parlera (presque) toujours d'applications.

La notation B^A désignera l'ensemble des applications de A dans B (et non l'inverse : noter pour la mémoire que $\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$).

Point vocabulaire.

Si $f : A \longrightarrow B$ est une application, on dit que f va de A *dans* B (en anglais : *into*) et non de A *sur* B (*onto*), cette dernière préposition étant exclusivement réservée aux applications **sur**jectives (noter que *sur* se traduit par *on*).

Une injection $A \longrightarrow B$ est à voir comme une inclusion $f(A) \subset B$ où $f(A)$ est une copie de A injectée dans B. C'est pourquoi on utilisera la notation $A \hookrightarrow B$ (concaténation de $\subset$ et $\longrightarrow$).

De même, une surjection sera notée $A \twoheadrightarrow B$, le nombre multiples de flèches évoquant la multiplicité des antécédents – et surtout celle des extrémités des flèches arrivant sur une même image.

Lorsque nous parlons d'ensembles (sans structure additionnelle), la notion d'isomorphisme est l'*équipotence*[1], à savoir l'existence d'une bijection de A sur B. On notera alors $A \simeq B$.

On rappelle qu'un ensemble est *dénombrable* (ou *énumérable*) s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Il nous arrivera d'abréger « AC » pour « axiome du choix ».

1 En apéritif

Soit E un ensemble non vide et A, B deux parties de E. Donner trois CNS pour que l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{P}(E)^2 \\ X & \longmapsto & (X \cup A, X \cup B) \end{array} \right.$$

soit respectivement surjective, injective, bijective.

Solution proposée.

Si un énoncé pareil (chercher une CNS) ne vous donne pas envie de faire un raisonnement par analyse-synthèse, peut-être trouverez-vous votre salut dans le tricot.

Supposons que f soit surjective. Puisque $X \cup A$ contient toujours A, la seule possibilité pour atteindre $\emptyset$ en première coordonnée est $A = \emptyset$. Il faut de même $B = \emptyset$. Mais alors $f(X) = (X, X)$ ne peut atteindre les couples hors diagonale, à l'instar de $(E, \emptyset)$ (c'est là qu'on utilise l'hypothèse E non vide). Finalement, f ne peut être surjective, *a fortiori* bijective.

Supposons f injective. Il est bon de remarquer que toute partie de $A \cap B$ s'envoie toujours sur (A, B). L'ensemble $\mathfrak{P}(A \cap B)$ est donc réduit à un seul élément, d'où $A \cap B = \emptyset$. Supposons réciproquement cette condition. En décomposant une partie X sous la forme $A'_X \sqcup B'_X \sqcup X'$ avec $\left\{ \begin{array}{c} A'_X \subset A \\ B'_X \subset B \end{array} \right.$ et X' disjoint de $A \cup B$ (noter l'unicité d'une telle décomposition), on a

$$f(X) = (A \sqcup B'_X \sqcup X', A'_X \sqcup B \sqcup X').$$

Si cela coïncide avec un $f(Y)$, on lit $B'_X = B'_Y$ sur la première coordonnée et $A'_X = A'_Y$ sur la seconde, ainsi que $X' = Y'$ sur les deux, d'où $X = Y$. La CNS cherchée est donc la disjonction de A et B.

[1] littéralement "de même puissance", la *puissance* d'un ensemble étant un terme ancien désignant son cardinal

2 Introduction aux diagrammes commutatifs

On se donne quatre ensembles muni d'applications comme indiqué sur le diagramme commutatif[2] suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{s}{\twoheadrightarrow} & B \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ C & \overset{i}{\hookrightarrow} & D \end{array}.$$

L'application s est donc surjective, i injective, et on a l'égalité $i \circ f = g \circ s$.

Montrer qu'il y a un unique h faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{s}{\twoheadrightarrow} & B \\ \downarrow f & \swarrow_h & \downarrow g \\ C & \overset{i}{\hookrightarrow} & D \end{array}.$$

Solution proposée.

Cherchons h par analyse-synthèse.

Il est nécessaire, si l'on veut $f = h \circ s$, qu'un élément $s(a)$ de B s'envoie par h sur $f(a)$. C'est d'ailleurs le seul moyen raisonnable dont on dispose pour définir h : ramener dans A pour appliquer f et tomber dans C.

Montrons que ce procédé définit bien une application $h : \left\{ \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & C \\ s(a) & \longmapsto & f(a) \end{array} \right.$. Il s'agit de montrer que l'image $f(a)$ ne dépend pas du a choisi pour réprésenter $s(a)$. Pour cela, on fait apparaître du g pour utiliser l'hypothèse $i \circ f = g \circ s$: étant donnés deux $a, a' \in A$, on a les implications

$$s(a) = s(a') \implies g \circ s(a) = g \circ s(a') \implies i \circ f(a) = i \circ f(a') \overset{i \text{ injective}}{\implies} f(a) = f(a'), \ \textit{CQFD}.$$

Vérifions que $i \circ h = g$: faisant apparaître du s pour utiliser la définition de h, il vient $i \circ h \circ s = i \circ f = g \circ s$, d'où $i \circ h = g$ par surjectivité de s, *CQFD.*

3 Théorème de Knaster-Tarski

Montrer que toute application croissante $f : \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \mathfrak{P}(E)$ dans lui-même admet un point fixe. (On pourra considérer la plus petite partie de E stable par f.)

Solution proposée.

Règle ensembliste : lorsqu'il s'agit de considérer la plus petite partie vérifiant un truc, on regarde si l'intersection de toutes les parties vérifiant ce truc ne marche pas. Suivant l'énoncé, posons donc $S := \bigcap_{f(A) \subset A} A$ et montrons que S est fixe par f.

Il est déjà aisé de montrer que S est stable par f. Si A est stable par f, alors A contient S, d'où par croissance de f l'inclusion $f(S) \subset f(A) \overset{A \text{ stable}}{\subset} A$; intersecter sur toutes les parties A stables montre l'inclusion $f(S) \subset \bigcap_{f(A) \subset A} A = S$ souhaitée.

Montrons l'inclusion réciproque.

Étant donné un point $s \in S$, *i. e.* appartenant à toute partie stable, la partie $P := S \setminus \{s\}$ ne peut être stable, donc il y a un point de $f(P)$ hors de P ; or l'inclusion $P \subset S$ donne par croissance de f l'inclusion $f(P) \subset f(S) \subset S = P \sqcup \{s\}$. Le point s doit donc appartenir à $f(P)$, donc à $f(S)$ par croissance de f, *CQFD.*

Remarque. Ce théorème se généralise facilement en remplaçant $\mathfrak{P}(E)$ par tout ensemble ordonné *achevé*, *i. e.* où toute partie admet un infimum. On revoit à la feuille sur les relations binaires.

[2] Un diagramme d'applications est dit *commutatif* si, lorsque l'on suit deux chemins de flèches partant d'un même ensemble A et arrivant à un même ensemble B, les composées ainsi obtenues sont les mêmes.

4 Paradoxe de Russell – Théorème de Cantor

1. **Paradoxe de Russell.** *Montrer que la classe de tous les ensembles n'est pas un ensemble.* (On pourra penser à un argument diagonal.)
2. **Théorème de Cantor.** *Montrer (sans AC) que l'on ne peux pas surjecter un ensemble A sur son ensemble des parties, ni y injecter son ensemble des parties) :*

$$\nexists s : A \twoheadrightarrow \mathfrak{P}(A), \qquad \nexists i : \mathfrak{P}(A) \hookrightarrow A.$$

   Retrouver le paradoxe de Russell.
3. *En déduire que, sous l'hypothèse $|B| > 1$, on ne pas non plus surjecter A sur B^A :*

$$|B| > 1 \implies \nexists s : A \twoheadrightarrow B^A.$$

Solution proposée.

1. L'idée d'un argument diagonal est de « comparer » un élément x à lui même ou à quelque chose qui dépend de lui, et à rajouter une négation[3]. Dans notre cas, on peut comparer deux ensembles pour $\in$, ce qui amène à considérer la condition $a \notin a$. S'il y avait un ensemble Ω de tous les ensembles, on pourrait former par séparation l'ensemble $A = \{a \in \Omega \ ; \ a \notin a\}$. Mais alors la définition extensive de A nous donne pour tout ensemble a l'équivalence $a \in A \iff a \notin a$, ce qui mène à une contradiction en spécialisant $a = A$.
2. Soit par l'absurde $s : A \twoheadrightarrow \mathfrak{P}(A)$. Si A était fini de cardinal n, on devrait avoir $n \geq 2^n$, ce qui n'est pas, mais cet argument tombe en défaut en cardinal infini. Pour reprendre l'idée de l'argument diagonal, on peut comparer ici a et $f(a)$ pour la relation $\in$. Formons donc la partie $P := \{a \in A \ ; \ a \notin f(a)\}$. Par surjectivité, on a un antécédent $\alpha \mapsto P$. Mais alors la définition extensive de P montre l'équivalence $a \in P \iff a \notin f(a)$ pour tout ensemble a, d'où la contradiction pour $a = \alpha$.

   Par ailleurs, toute injection $i : A \hookrightarrow B$ (avec $A \neq \emptyset$) fournit une surjection $B \twoheadrightarrow A$: envoyer un $b \in \operatorname{Im} i$ sur son unique antécédent et les autres sur un élément fixé dans A. Un ensemble de parties étant toujours non vide, on en déduit qu'il ne peut y avoir d'injection $\mathfrak{P}(A) \hookrightarrow A$.

   Soit par l'absurde Ω ensemble de tous les ensembles. En particulier, $\mathfrak{P}(\Omega) \subset \Omega$, d'où une injection $\mathfrak{P}(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} \Omega$, de laquelle on tire une surjection $\Omega \twoheadrightarrow \mathfrak{P}(\Omega)$ (envoyer les éléments de $\operatorname{Im} i$ sur leur unique antécédent et tous les autres sur n'importe quoi (par exemple $\emptyset$)), ce qui ne saurait être.
3. D'un point de vue cardinaux, si nos ensemble sont finis, l'existence d'une telle surjection entrainerait $|A| \geq |B|^{|A|} \geq 2^{|A|}$, ce qui est absurde (puisque $n < 2^n$ pour tout entier n). De manière générale, B contient au moins deux éléments que l'on peut appeler 0 et 1, d'où une surjection $B \twoheadrightarrow \{0,1\}$ (envoyer les autres éléments sur n'importe quoi) qui induit une surjection $B^A \twoheadrightarrow \{0,1\}^A$. Comme ce dernier est équipotent à $\mathfrak{P}(A)$ via la fonction caractéristique, on a finalement une surjection $A \twoheadrightarrow B^A \twoheadrightarrow \mathfrak{P}(A)$, et ça Cantor nous dit que ce n'est pas possible.

5 Théorème de Bendixon-Bernstein-Borel-Cantor-Dedekind-Schröder-Zermelo

On se donne deux injections $\left\{ \begin{array}{l} f : A \hookrightarrow B \\ g : B \hookrightarrow A \end{array} \right.$. On souhaite construire une bijection entre A et B.

Première méthode (jolie).

1. *Montrer qu'il suffit de bijecter A et $g(B)$.*
2. *On définit $A_0 := A \backslash g(B)$ et $A_n := [g \circ f]^{\circ n}(A_0)$ pour tout entier $n \geq 0$. Montrer qu'il suffit de bijecter $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ avec $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$*

[3] à l'instar du célèbre crêtois affirmant « Je suis un menteur. ». C'est le même type d'argument qui a servi à Gödel pour construire une affirmation vraie mais non prouvable (laquelle clamant « Je ne suis pas démontrable ! »).

3. *Terminer la preuve !*

Seconde méthode (plus technique)

1. *Conclure si l'on arrive à exhiber une partie $A' \subset A$ telle que $A' = {}^c g\left({}^c f\left(A'\right)\right)$.*
2. *Montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \{X \subset A\ ;\ X \subset {}^c g\left({}^c f\left(X\right)\right)\}$ admet un plus grand élément $\cup\mathcal{A}$.*
3. *Terminer la preuve ! La raccourcir en invoquant Knaster-Tarski.*

Troisième méthode (expéditive)

On appelle *futur* d'un $a \in A$ tout élément de la forme $\cdots g \circ f \circ g \circ f\left(a\right)$ et *futur* d'un $b \in B$ tout élément de la forme $\cdots f \circ g \circ f \circ g\left(b\right)$. Un *passé* d'un $x \in A \cup B$ est un élément dont x est un futur.

On définit A_0, A_1, A_∞ respectivement comme l'ensemble des $a \in A$ ayant un nombre pair, impair, infini respectivement de passés. On définit de même B_0, B_1, B_∞.

Conclure !

Première solution proposée.

1. Grand principe : une injection $A \hookrightarrow B$ induit toujours une bijection de A sur son image. On a donc $B \simeq g\left(B\right)$, que l'on souhaite $\simeq A$.
2. Notons par commodité A_∞ la réunion $\bigcup_{n\geq 1} A$, et considérons $\varphi : A_0 \cup A_\infty \longrightarrow A_\infty$ une telle bijection . On la prolonge sur A en prenant l'identité partout ailleurs :
$$\overline{\varphi} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ a \in A_0 \cup A_\infty & \longmapsto & \varphi\left(a\right) \\ a \notin A_0 \cup A_\infty & \longmapsto & a \end{array} \right. .$$
$\overline{\varphi}$ est injective comme recollement de deux applications injectives d'images disjointes, donc induit une bijection de A sur son image. Cette dernière est la réunion des images de ses restrictions à $A_0 \cup A_\infty$ et à son complémentaire A', *i. e.* $A_\infty \cup A'$. Or A_0 est disjoint des $A_{n\geq 1}$ (ces derniers sont inclus dans $\operatorname{Im} g$), donc A se décompose en
$$A = \left(A_0 \sqcup A_\infty\right) \sqcup A' = A_0 \sqcup \underbrace{\left(A_\infty \cup A'\right)}_{\operatorname{Im}\overline{\varphi}}.$$
$\operatorname{Im}\overline{\varphi}$ est donc le complémentaire de A_0 dans A, *i. e.* $g\left(B\right)$. On en déduit $A \simeq \overline{\varphi}\left(A\right) = \operatorname{Im}\overline{\varphi} = g\left(B\right)$.
3. Construire φ est aisé : il s'agit de créer un décalage des indices dans la suite A_n, ce qui se fait naturellement en considérant $g \circ f$ qui envoie A_n sur A_{n+1}. L'application $\varphi := g \circ f$ ainsi définie sur $A_0 \cup A_\infty$ est injective comme composée de deux injections, et d'image A_∞, *CQFD.*

Seconde solution proposée

1. Il faut faire un dessin pour voir ce qui se passe. $\mathcal{A}$ étant partitionné en $A' \sqcup g\left({}^c f\left(A'\right)\right)$, on peut définir une bijection en recollant
$$\left\{ \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f} & f\left(A'\right) \\ g\left({}^c f\left(A'\right)\right) & \xrightarrow{g^{-1}} & {}^c f\left(A'\right) \end{array} \right. .$$
2. Observer avant tout que $\mathcal{A}$ est non vide car contient $\emptyset$. Montrons ensuite que $\mathcal{A}$ est stable par union : étant donnée une famille $\left(X_i\right) \in \mathcal{A}^I$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on vérifie que
$$\bigcup X_i \subset \bigcup {}^c g\left({}^c f\left(X_i\right)\right) = {}^c \bigcap g\left({}^c f\left(X_i\right)\right) \overset{g \text{ injective}}{=} {}^c g\left(\bigcap {}^c f\left(X_i\right)\right) = {}^c g\left({}^c \bigcup f\left(X_i\right)\right) = {}^c g\left({}^c f\left(\bigcup X_i\right)\right).$$
3. Notons $A' := \cup\mathcal{A}$ le plus grand élément de $\mathcal{A}$. A' est étant maximal pour la propriété $A' \subset {}^c g\left({}^c f\left(A'\right)\right)$, il est bon candidat à l'égalité afin de conclure à l'aide du premier point. Montrons l'autre inclusion. Soit un x dans ${}^c g\left({}^c f\left(A'\right)\right)$; les parties A' et $\{x\}$ sont donc incluses dans ${}^c g\left({}^c f\left(A'\right)\right)$, d'où
$$A' \cup \{x\} \subset {}^c g\left({}^c f\left(A'\right)\right) \subset {}^c g\left({}^c f\left(A' \cup \{x\}\right)\right),$$
ce qui dit exactement que $A' \cup \{x\} \in \mathcal{A}$. Par maximalité de A', on doit avoir $A' \cup \{x\} = A'$, ou encore $x \in A'$, *CQFD.*

   On a utilisé au point 2. la croissance de l'application $X \mapsto {}^c g\left({}^c f\left(X\right)\right)$ définie sur $\mathfrak{P}\left(A\right)$: le point fixe cherché découle alors du théorème Knaster-Tarski.

Troisième solution proposée.
Un élément ayant un nombre impair de passés étant nécessairement l'image d'un élément ayant un nombre pair de passés[4], on dispose de deux surjections $A_0 \overset{f}{\twoheadrightarrow} B_1$ et $B_0 \overset{g}{\twoheadrightarrow} A_1$; puisque f et g sont injectives, ce sont des bijections. On a de même une bijection $A_\infty \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B_\infty$, d'où en recollant tout :

$$A = A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_\infty \simeq B_1 \sqcup B_0 \sqcup B_\infty = B, \textit{ CQFD.}$$

Remarque nominale. La diversité des noms attribués à ce théorème surprendra peut-être notre lecteur français habitué à Cantor-Bernstein : qu'il y voit une indication de l'histoire de ce théorème.

Remarque cardinale. On se fixe un gros ensemble Ω. En se plaçant sur $\mathfrak{P}(\Omega)$ quotientée par l'équipotence, la relation $\widetilde{A} \leq \widetilde{B}$ définie par $\exists i : A \hookrightarrow B$ est clairement bien définie, réflexive et transitive. On vient de montrer qu'elle est anti-symétrique, *i. e.* que c'est une relation d'ordre. C'est la notion standard pour classifier la taille des ensembles et un premier pas vers les *cardinaux*.

Remarque catégorielle. Si l'on rajoute de la structure à nos ensembles et que l'on demande aux injections de préserver cette structure, le théorème tombe en défaut. Par exemple, considérons la catégorie des ensembles totalement ordonnés avec les fonctions croissantes. Nous avons alors des injections dans les deux sens entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, mais ils ne sont pas isomorphes. Il y a plein d'autres contre-exemples.

6 Calculs dans l'anneau $(\mathfrak{P}(E), \cap, \cup)$

Soit (J_i) une famille indexée par un ensemble I et $\left(A_i^j\right)$ une famille indexée par $I \times \bigcup_{i \in I} J_i$.

1. (a) *Développer* $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} A_i^j$. *Même question en échangeant* $\bigcap$ *et* $\bigcup$.
   (b) **(bonus)** *Montrer que l'égalité obtenue est équivalente à AC.*
2. *Développer* $\prod_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} A_i^j$, $\prod_{i \in I} \coprod_{j \in J_i} A_i^j$ *et* $\prod_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} A_i^j$. *Peut-on développer* $\cap$ *et* $\cup$ *sur* Π *?*
3. *On suppose* $J_i = J$ *constant. Comparer les paires d'ensembles suivants et donner des conditions simples où l'on a égalité :*
   (a) $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_i^j$ *et* $\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} A_i^j$;
   (b) $\bigcap_{i \in I} \prod_{j \in J} A_i^j$ *et* $\prod_{j \in J} \bigcap_{i \in I} A_i^j$;
   (c) $\bigcup_{i \in I} \prod_{j \in J} A_i^j$ *et* $\prod_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_i^j$.
4. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties d'un même ensemble A. Montrer que les parties de A contruites par intersections d'unions d'éléments de $\mathcal{A}$ sont exactement les parties de A construites par unions d'intersections d'éléments de $\mathcal{A}$. Que se passe-t-il si l'on impose la finitude des réunions ? Des intersections ?*

Solution proposée.

1. (a) Intuitons le résultat en prenant un I fini. Pour mieux voir le calcul, on remplace les $\cap$ par des produits et les $\cup$ par des sommes. On obtient

$$\sum_{j \in J_1} A_1^j \sum_{j \in J_2} A_2^j \cdots \sum_{j \in J_n} A_n^j.$$

Pour développer cette dernière expression, on nous appris[5] à piocher un élément dans chaque somme, à faire le produit de ces n facteurs puis à sommer les produits ainsi formés. Piocher un j dans chaque J_i, c'est considérer un élément du produit $J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n$. On devrait donc trouver

$$\sum_{j \in J_1 \times \cdots \times J_n} A_1^{j_1} A_2^{j_2} \cdots A_n^{j_n} = \sum_{j \in \prod J_i} \prod_i A_i^{j_i}.$$

[4] Attention à ne pas inverser les parités, un élément n'ayant aucun passé ne peut être une image !
[5] au collège (pour $n = 2$), si si, souvenez-vous

Revenant aux symboles ensemblistes, on intuite

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i}A_i^j\overset{?}{=}\bigcup_{j\in\prod_{i\in I}J_i}\bigcap_{i\in I}A_i^{j_i}.$$

Montrons cela par double-inclusion. L'égalité obtenue en échangeant $\bigcap$ et $\bigcup$ s'en déduira par passage au complémentaire[6].

Soit un x dans $\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i}A_i^j$. Il y a alors pour tout $i\in I$ un $j_i\in J_i$ tel que $x\in A_i^{j_i}$, d'où avec l'axiome du choix une *famille* $(j_i)\in J^I$, ce qui donne $x\in\bigcup_{f\in\prod J_i}\bigcap_{i\in I}A_i^{f(i)}$ en prenant $f=j$. Réciproquement, s'il y a une application $f\in\prod J_i$ telle que $x\in A_i^{f(i)}$ pour tout i, alors il y a pour tout $i\in I$ un $j:=f(i)\in J_i$ tel que $x\in A_{i,j}$, d'où $x\in\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i}A_i^j$.

(b) Nous avons utilisé AC pour montrer l'inclusion $\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i}A_i^j\subset\bigcup_{j\in\prod_{i\in I}J_i}\bigcap_{i\in I}A_i^{j_i}$. Montrons que cela était nécessaire.

Fixons un ensemble E dont on cherche une fonction de choix, *i. e.* une application $f:\mathfrak{P}(E)\longrightarrow E$ telle que $f(P)\in P$ pour toute partie $P\subset E$ (non vide). L'inclusion ci-dessus faisant apparaître un ensemble d'applications, il est judicieux de prendre $I:=\mathfrak{P}(E)\backslash\{\emptyset\}$ et $J_i:=E$ pour tout i. Pour coder la condition $f(P)\in P$, prenons des A_P^e binaires selon que $e\in P$ ou non, par exemple $A_P^e=\left(\begin{smallmatrix}E\text{ si }e\in P\\ \emptyset\text{ si }e\notin P\end{smallmatrix}\right)$. Ainsi, l'intersection $\bigcap_{\emptyset\subsetneq P\subset E}A_P^{f(P)}$ est non vide ssi f est une fonction de choix ; notre problème se ramène donc à la non-vacuité de la réunion $\bigcup_{f\in E^{\mathfrak{P}(E)\backslash\{\emptyset\}}}\bigcap_{\emptyset\subsetneq P\subset E}A_P^{f(P)}$; vu l'inclusion supposée, on est ramené à montre que l'intersection $\bigcap_{\emptyset\subsetneq P\subset E}\bigcup_{a\in E}\left(\begin{smallmatrix}E\text{ si }e\in P\\ \emptyset\text{ si }e\notin P\end{smallmatrix}\right)$ est non vide. Mais toute partie non vide P contient un certain $a\in E$ pour lequel $A_P^a=E$, de sorte que la réunion $\bigcup_{a\in E}A_P^a$ vaut toujours E : la grosse intersection vaut donc E, ce qui conclut[7].

2. Tout se développe comme on l'attend. On peut le faire à la main, ou bien écrire le produit comme une intersection pour utiliser ce qui précède.

Par exemple, pour un produit d'unions, en posant pour alléger $A_i:=\bigcup_{j\in J_i}A_i^j$ et $A:=\bigcup_i A_i$, on obtient

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i}A_i^j &= \prod_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}\left\{(a_\iota)\in A^I\ ;\ a_i\in A_i\right\}=\bigcap_{i\in I}\left\{(a_\iota)\in A^I\ ;\ \exists j\in J_i,\ a_i\in A_i^j\right\}\\ &= \bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i}\left\{(a_\iota)\in A^I\ ;\ a_i\in A_i^j\right\}=\bigcup_{j\in\prod J_i}\bigcap_{i\in I}\left\{(a_\iota)\in A^I\ ;\ a_i\in A_i^j\right\}=\bigcup_{j\in\prod J_i}\prod_i A_j^{j_i}.\end{aligned}$$

Pour l'intersection, on fait comme ci-dessus en remplaçant les $\exists j$ par des $\forall j$.

Pour l'union disjointe, il suffit de vérifier la disjonction des ensembles obtenus dans la formule avec l'union : supposant vide l'intersection à i fixé de deux quelconques A_i^j (pour deux j distincts), une famille dans $\left(\prod_i A_i^{j_i}\right)\cap\left(\prod_i A_i^{j'_i}\right)$ pour deux applications $j\neq j'$ qui diffèrent – mettons en i_0 – aura sa i_0-ième coordonnée dans $A_{i_0}^{j_{i_0}}\cap A_{i_0}^{j'_{i_0}}=\emptyset$ (i_0 fixé et $j_{i_0}\neq j'_{i_0}$), ce qui est absurde.

Le problème dans une écriture $\bigcup_{i\in I}\prod_{j\in J_i}A_{i,j}=\prod_{j\in\prod J_i}\bigcup_{i\in I}A_{j,j_i}$ est que les familles ne sont pas indexées par le même ensemble : une telle égalité n'a donc aucun sens. Même chose en remplaçant $\cup$ par $\cap$.

(a) On a une inclusion évidente $\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I}A_i^j\subset\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}A_i^j$ qui résulte d'une interversion de quantificateurs $\exists j,\forall i,(*)\implies\forall i,\exists j,(*)$. On aurait aussi pu dire que $\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}A_i^j=\bigcup_{j\in J^I}\bigcap_{i\in I}A_i^{j_i}$ contient l'union pour les j constants[8].

Toutefois, l'inclusion est stricte en général : en prenant $\left\{\begin{array}{c}A_1^1=A_2^2=\{a\}\\ A_1^2=A_2^1=\emptyset\end{array}\right.$, on obtient un contre-exemple :

$$\left\{\begin{array}{l}\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I}A_i^j=\left(A_1^1\cap A_2^1\right)\cup\left(A_1^2\cap A_2^2\right)=(\{a\}\cap\emptyset)\cup(\emptyset\cap\{a\})=\emptyset\\ \bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}A_i^j=\left(A_1^1\cup A_1^2\right)\cap\left(A_2^1\cup A_2^2\right)=(\{a\}\cup\emptyset)\cap(\emptyset\cup\{a\})=\{a\}\end{array}\right..$$

[6] Une fois les $A_{i,j}$ donnés, appliquer ce qui précède aux ${}^cA_{i,j}$.

[7] Le cas $E=\emptyset$ est pathologique : une fonction de choix devient une application $f:\emptyset\longrightarrow\emptyset$ soumise à aucune condition et l'application vide remplit ces conditions. (De toute façon, AC est vérifié sur les ensembles finis, *a fortiori* sur le vide.)

[8] Lorsque tous les J_i sont égaux à un même J, le produit $\prod_{i\in I}J_i$ se simplifie en J^I.

Pour avoir égalité, il suffit de s'assurer que les intersections $\bigcap_{i\in I} A_i^{j_i}$ correspondant à des j non constants sont nulles. Cela sera réalisé si $A_i^j \cap A_{i'}^{j'} = \emptyset$ dès que[9] $j \neq j'$.

(b) Intuitons l'inclusion $\bigcup_{i\in I} \prod_{j\in J} A_i^j \subset \prod_{j\in J} \bigcup_{i\in I} A_i^j$: lorsque J a deux éléments, on veut comparer une diagonale de pavés $\bigcup_{i\in I}(A_i \times B_i)$ à un grand pavé $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$ et l'on voit bien (quand les A_i d'une part et les B_i d'autre part sont disjoints) que l'inclusion est stricte en général.

Pour le montrer proprement, on peut le faire à la main ou utiliser la question 3.a (comme on l'a fait à la question 2). Au lecteur de jouer.

Pour avoir égalité, il suffit par exemple que l'un des pavés diagonaux soit le gros pavé total, ce qui se dit : « il y a un indice i_0 tel que $A_{i_0}^j$ contienne (pour tout j) tous les A_i^j ». Mais cela n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple $\begin{cases} A_3 = A_1 \sqcup A_2 \\ B_2 = B_1 \sqcup B_3 \end{cases}$ avec les notations du premier paragraphe.

(c) Plus agréablement, le produit commute à l'intersection : $\bigcap_{i\in I} \prod_{j\in J} A_i^j = \prod_{j\in J} \bigcap_{i\in I} A_i^j$. Encore une fois, on peut le faire à la main ou bien écrire le produit comme une intersection et invoquer l'associativité de $\cap$.

3. Une intersection de réunions d'éléments de A est de la forme $\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} A_{i,j}$, qui se développe en une union d'intersections d'après la première question. La réciproque s'obtient en passant au complémentaire.

Lorsque l'on impose la finitude des réunions, le terme $\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J_i} A_{i,j}$ ne comporte que des réunions finies mais le terme $\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} A_{i,j} = \bigcup_{j\in\prod_{i\in I} J_i} \bigcap_{i\in I} A_{i,j_i}$ peut très bien en contenir une infinité (elles sont indexées par $j \in \prod_{i\in I} J_i$ qui, sous la seule contrainte « I fini », peut être infini). Concrêtement, si l'on prend pour $\mathcal{A}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$, une intersection quelconque d'intervalles reste un intervalle, donc $\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J_i} A_{i,j}$ est un réunion finie d'intervalles. En revanche, si l'on considère les parties $\mathbb{R}\backslash[2k, 2k+1]$ pour $k \in \mathbb{Z}$, chacune réunion de deux intervalles, leur intersection est la réunion $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k, 2k+1]$ de leurs complémentaires, donc est formée d'une infinité d'intervalles[10], donc ne peut pas être réunion finie d'intersection d'intervalles.

Même conclusion avec la finitude des intersections (prendre le complémentaire).

7 Calculs dans l'anneau $\mathfrak{P}(E)$: la suite, starring $\bigcap$ & $\bigcup$

Soient deux familles (A_i) et (B_i) de parties d'un ensemble donné indexées par un même ensemble I. Calculer

$$\bigcap_{J\subset I} \left[\left(\bigcup_{j\in J} A_j \right) \cup \left(\bigcup_{j\notin J} B_j \right) \right].$$

Solution proposée.

Intuitons le résultat en prenant un I fini. Pour mieux voir le calcul, on remplace les $\cup$ par des produits et les $\cap$ par des sommes. On obtient

$$\sum_{J\sqcup K=I} \left(\prod_{j\in J} a_j \prod_{k\in K} b_k \right),$$

ce qui revient à choisir des termes a_i et des termes b_i en développant le produit $\prod_{i\in I}(a_i+b_i)$. On aimerait donc bien que

$$\bigcap_{J\sqcup K=I} \left[\left(\bigcup_{j\in J} A_j \right) \cup \left(\bigcup_{k\in K} B_k \right) \right] = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B_i).$$

Montrons cela par double-inclusion.

Un élément x dans le truc de droite appartient à un $A_{i_0} \cap B_{i_0}$ pour un certain i_0. Étant donnée une partition $J \sqcup K = I$, ou bien $i_0 \in J$ et alors $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$, ou bien $i_0 \in K$ et alors $x \in \bigcup_{k\in K} B_k$. Dans tous les cas, on tombe dans $\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \cup \left(\bigcup_{k\in K} B_k\right)$, et ce pour toute partition $J \sqcup K = I$, d'où l'inclusion $\supset$.

Nous proposons deux solutions pour montrer l'inclusion réciproque.

[9] Cela suppose que J contienne au moins deux éléments ; le lecteur vérifiera que l'égalité est maintenue lorsque J est vide ou est un singleton.

[10] Pour raisonner rigoureusement, il faudrait invoquer des arguments de connexité, chaque composante connexe correspondant à un intervalle.

1. Soit un élément x dans le truc de gauche. Il s'agit d'exhiber une partition $J \sqcup K$ sympathique pour dire que x est dedans. Soyons humble et n'allons pas chercher trop loin. On dispose d'un x, de parties A_i et B_i : le moyen le plus simple de construire une partie $J \subset I$ est de considérer quelque chose du type de $\{i \in I \ ; \ x \in A_i\}$ ou autre en remplaçant A par B ou $\in$ par $\notin$. Essayons avec $J := \{i \in I \ ; \ x \notin A_i\}$: x est alors dans $\left(\bigcup_{x \notin A_j} A_j\right) \cup \left(\bigcup_{x \in A_k} B_k\right)$, donc dans $\bigcup_{x \in A_k} B_k$, d'où un k_0 tel que $x \in A_{k_0} \cap B_{k_0}$, ce qui montre l'autre inclusion.
2. L'ensemble à simplifier étant une intersection d'unions, on sait la développer d'après la première question de l'exercice précédent. Ainsi, en posant $C_J^i := \binom{A_i \text{ si } i \in J}{B_i \text{ si } i \notin J}$ pour tout $\binom{i \in I}{J \subset I}$, on veut simplifier $\bigcap_{J \in \mathfrak{P}(I)} \bigcup_{i \in I} C_J^i = \bigcup_{i \in I^{\mathfrak{P}(I)}} \bigcap_{J \in \mathfrak{P}(I)} C_J^{i_J}$. Or la réunion contient les intersections pour les applications i constantes, *i. e.* les

$$\bigcap_{J \subset I} C_J^i = \bigcap_{J \subset I} \begin{pmatrix} A_i \text{ si } i \in J \\ B_i \text{ si } i \notin J \end{pmatrix} = \left(\bigcap_{i \in J \subset I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i \notin J \subset I} B_i\right) = A_i \cap B_i$$

; (les deux sous-intersections sont non vides puisque i appartient toujours à la partie totale I mais jamais à la partie vide $\emptyset$).

8 Calculs dans l'anneau $\mathfrak{P}(E)$: $\bigcap$ & $\bigcup$ vous saluent

Soit A un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille. On définit deux parties de $\mathfrak{P}(I)$ par

$$\begin{cases} \mathcal{R} := \left\{R \subset I \ ; \ A \subset \bigcup_{r \in R} A_r\right\} \\ \mathcal{J} := \{J \subset I \ ; \ {}^cJ \notin \mathcal{R}\} \end{cases} . \textit{ Montrer l'égalité } \bigcap_{R \in \mathcal{R}} \bigcup_{j \in R} A_j = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \bigcap_{j \in J} A_j.$$

Solution proposée.

Observer que $\mathcal{R}$ désigne les ensembles d'indices donnant un recouvrement de A.

Interprétons de même la partie $\mathcal{J}$. Soit $J \in \mathcal{J}$ et $R \in \mathcal{R}$. Si R ne contient aucun élément de J, alors R est inclus dans ${}^cJ \notin \mathcal{R}$ et ne peut être un recouvrement. En d'autres termes, tout recouvrement doit contenir au moins un élément de J. Ainsi, la partie$\mathcal{J}$ désigne les ensembles des indices d'une famille inévitable (au sens où tout recouvrement doit contenir un élément de cette famille).

Une fois cela précié, menons une double-inclusion.

Du côté gauche, on a l'intersection de tous les recouvrements. À droite, on a l'union des intersections de familles inévitables . En particulier, si x est dans tous les recouvrements, la famille J des (indices des) A_i contenant x est inévitable, c'est donc un élément de $\mathcal{J}$. Donc x appartient au membre de droite.

Réciproquement, si x appartient à l'intersection d'une famille inévitable (indexée par) J, cela signifie que tout recouvrement comporte l'un des A_i avec $i \in I$, et contient donc x.

9 Intermède technique

1. *Soit $f : A \longrightarrow A$ une application et $a_0 \in A$. Montrer qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la condition initiale $a(0) = a_0$ ainsi que la relation de récurrence $a_{n+1} = f(a_n)$.* (On pourra montrer que, pour tout n, il existe une telle suite indexée par $[0, n]$).
2. *Soit $f : \bigcup_{n \geq 0} A^n \longrightarrow A$ définie sur toutes les suites finies à valeurs dans A. Montrer qu'il y a une unique suite $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que $a_n = f\left((a_i)_{i<n}\right)$ pour tout $n \geq 0$. Que signifie la condition pour $n = 0$?*

Solution proposée.

1. Suivons humblement l'énoncé et considérons l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels il y a une suite finie $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $a_i = f(a_{i-1})$ pour tout $0 < i \leq n$. Si cet ensemble ne vaut pas tout $\mathbb{N}$, son complémentaire contient un minimum n_0, mais alors en posant $a_{n_0+1} := f(a_{n_0})$ on obtient une suite définie sur $[0, n_0+1]$ et satisfaisant la relation de récurrence, ce qui contredit la définition de n_0. On dispose donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une suite $(a_i^n)_{0 \leq i \leq n}$: il est vital d'observer qu'une telle suite (à n fixé) est unique : si $(b_i)_{i \leq n}$ en est une autre, en considérant par l'absurde un plus petit entier $i \leq n$ tel que $b_i \neq a_i$, on obtient immédiatement une contradication en écrivant $b_i = f(b_{i-1}) = f(a_{i-1}) = a_i$). Il est donc permis de poser $a_i := a_i^n$ pour n'importe quel $n \geq i$. Alors la suite $(a_i)_{i \geq 0}$ convient et est unique (on a montré que ses restrictions à tout $[0, n]$ le sont).
2. On procède exactement de même en adaptant les relations de récurrence.

   Pour $n = 0$, la famille $(a_i)_{i<n}$ est la famille vide à valeurs dans A, unique élément de $A^0 := A^\emptyset$, de sorte que la condition $a_0 = f\left((a_i)_{i \in \emptyset}\right)$ est en fait une condition initiale.

Remarque ordinale. Le résultat se prolonge sans aucune difficulté aux suites indexées par un ordinal transfini[11], *cf.* feuille sur les ordinaux.

Remarque tétratomique. Pour définir la réunion des A^n, pas besoin d'invoquer l'axiome de remplacement, il suffit de séparer dans $\mathrm{Fonc}(\mathbb{N}, A)$ les fonctions dont le domaine est fini.

10 Interlude combinatoire

On se donne un ensemble A infini et un entier $n \geq 0$. Quel est le nombre maximal de parties que l'on peut former à l'aide de n parties $A_1, ..., A_n$ de A et de la loi $A * B := {}^cA \cup {}^cB$?

Solution proposée.

La loi donnée permet de récupérer les autres lois ensemblistes usuelles :

$$^cA = A * A \qquad A \cap B = {}^c(A * B) \qquad A \cup B = {}^c[({}^cA) \cap ({}^cB)].$$

Ainsi, la partie de $\mathfrak{P}(A)$ obtenue est la même que celle obtenue avec les lois ^{c}, $\cap$ et $\cup$. Elle contient déjà les unions d'intersections de A_i ou de ^cA_i et c'est en fait suffisant : cet ensemble est clairement stable par union, il est stable par intersection car une intersection d'unions est un réunion d'intersections, il est enfin stable par complémentaire d'après les lois de De Morgan et par le même argument.

On gagnera à voir que les unions sus-mentionnées sont *disjointes*[12] : si deux intersections diffèrent, il y a un indice i pour lequel on a choisi A_i dans la première et ^cA_i dans la seconde, de sorte que l'intersection des deux est nulle. Elle seront donc en nombre $I \leq 2^n$ (choisir pour chaque i ou bien la partie A_i ou bien son complémentaire, en faisant attention aux intersections vides qui induisent des répétitions), d'où au plus 2^I unions (on choisit pour chaque intersection de la faire apparaître ou non dans l'union).

Pour réaliser l'égalité, il suffit de s'arranger pour que toutes les intersections soient non vides – étant disjointes, elles seront alors *distinctes*. Pour ce faire, on peut partir d'une partition de A en 2^n parts (il en existe car A est infini : prendre $2^n - 1$ singletons et ce qui reste), indexer celle-ci par les parties de $\{1, ..., n\}$, mettons $(P_I)_{I \subset \{1,...,n\}}$, puis considérer pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ la réunion A_i des P_I sur les parties I contenant i. On laisse au lecteur le soin de vérifier que les intersections des A_i ou ^cA_i sont exactement les P_I, ce qui permet de conclure :

le nombre maximal recherché est 2^{2^n}.

Remarque. De même que les lois ensemblistes ^{c}, $\cap$ et $\cup$ correspondent aux connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$ et $\vee$, la loi $*$ correspond au connecteur universel NAND, attribué à *Sheffer*, également noté $|$ et appelé connecteur d'*incompatibilité*.

[11] littéralement « au-delà du fini », c'est la terminologie ordinale pour « infini »

[12] Elles recouvrent même tout A puisqu'un élément $a \in A$ est dans l'intersection des $\binom{A_i \text{ si } a \in A_i}{^cA_i \text{ sinon}}$.

11 Une caractérisation des ensembles infinis

Montrer qu'un ensemble A est infini ssi tout $f \in A^A$ admet une partie stable non triviale (autre que $\emptyset$ et A).

Solution proposée.
Lorsque l'on parle de stabilité, le minimum vital est de regarder ce que devient un élément après plusieurs itérations. Si $a \in A$ et $f \in A^A$, alors l'ensemble

$$I_a := \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), ...\}$$

des itérés de a est stable[13] par f, mais également $I_{f(a)}$, lequel a le bon goût d'être inclus dans le précédent et ainsi, pour peu que l'inclusion soit stricte, de nous fournir une partie stable non triviale. Puisque $I_a = \{a\} \cup I_{f(a)}$, l'inclusion est stricte ssi $a \notin I_{f(a)}$. Dans le cas contraire, mettons $a = f^n(a)$ pour un $n \geq 1$, alors I_a est fini car inclus dans $\left\{a, f(a), f^{\circ 2}(a), ..., f^{\circ n}(a)\right\}$, donc sera une partie stable non triviale dans le cas A infini, ce qui montre le sens $\Longrightarrow$.

Pour l'autre sens, faisons une (micro-)analyse. Si $f \in A^A$ n'a aucune partie stable non triviale, alors tous les I_a valent A (ce sont des parties stables non vides). Fin de l'analyse. Pour réaliser cette condition lorsque A est fini, mettons $A = \{a_1, ..., a_n\}$, il suffit de considérer l'application « cycle » $a_i \mapsto a_{i+1}$ (où les indices sont pris modulo n) : si S est une partie stable non vide, elle contient un a_k, donc (par stabilité) tous les itérés de ce dernier, autrement dit tout A, ce qui conclut.

On passe à présent à des énoncés d'équiotence, autour du fini, du dénombrable et du continu. On utilisera à volonté les théorèmes de BBBCDSZ et de Cantor.

12 Des bijections ne préservant pas la nature des intervalles

Montrer que deux intervalles réels (bornés ou non) sont toujours équipotents (à l'exception des intervalles vides et des singletons).

Solution proposée.
Quitte à appliquer l'injection bornée th, on se ramène à des intervalles bornés[14]. Quitte à appliquer une similitude (toujours bijective), on se ramène aux intervalles $[0,1]$, $[0,1[$, $]0,1]$ et $]0,1[$.

Le problème se pose clairement au niveau des bornes. Or l'on connaît tous une bijection d'un certain ensemble permettant de se débarrasser d'une borne : ajouter 1 dans $\mathbb{N}$ (on tue le 0). Il suffit donc de trouver dans $[0,1]$ une « copie » de $\mathbb{N}$ afin de se débarrasser de l'une ou l'autre de ses bornes. Cela est aisé : il suffit d'« inverser » $\mathbb{N}$ pour le faire rentrer dans $[0,1]$, *i. e.* de considérer l'ensemble $\left\{\frac{1}{n} \; ; \; n > 0\right\}$.

De manière plus formelle, on définit une bijection par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1[\\ \frac{1}{n} \text{ où } n > 0 & \longmapsto & \frac{1}{n+1} \\ x \notin \left\{\frac{1}{n} \; ; \; n > 0\right\} & \longmapsto & x \end{array} \right. .$$

En composant par la symétrie $x \mapsto 1 - x$, on bijecte $[0,1[$ et $]0,1]$, puis on réutilise l'application ci-dessus pour bijecter ce dernier avec $]0,1[$

Remarque. Si l'on impose aux bijections d'être *continues*, alors on ne pourra plus mettre en correspondance deux intervalles de nature différente. Sanity check : la bijection $[0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1[$ ci-desssus n'est continue en aucun des $\frac{1}{n}$ pour $n > 0$.

[13] c'est d'ailleurs la plus petite partie contenant a stable par f
[14] On peut également considérer l'application $a \mapsto \frac{a}{1+|a|}$.

13 $\mathbb{R} \simeq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable

Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ sont en bijection.
En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Solution proposée.
On sait déjà que $\mathbb{R} \simeq [0,1]$. On injecte ce dernier dans $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ en prenant le développement décimal propre :

$$i : a \mapsto \{\lfloor 10^n a \rfloor \ ; \ n \geq 1\}.$$

Pour montrer proprement qu'il s'agit d'une injection, on aimerait bien récupérer la n-ième décimale d'un réel a (sachant que $i(a)$ est un ensemble et non une famille !). Pour cela, on observe que $i(a)$ contient un unique entier a_n tel que $10^n < a_n + 1 \leq 10^{n+1}$, et on vérifie alors que $a = 0, a_1 a_2 a_3 ...$

Pour la réciproque, on effectue une *trichotomie* de $[0,1]$. Étant donnée une partie $P \subset \mathbb{N}$, identifiée à sa fonction caractéristique $(p_n) = \chi_P$ on construit une suite (a_n, b_n) par récurrence :

$$\begin{array}{rcl} (a_0, b_0) & : & = (0,1), \\ (a_{n+1}, b_{n+1}) & : & = \left\{ \begin{array}{ll} \left(a_n, \frac{a_n + 2b_n}{3}\right) & \text{si } p_n = 0 \\ \left(\frac{2a_n + b_n}{3}, b_n\right) & \text{si } p_n = 1 \end{array} \right. \end{array}.$$

Il est aisé de voir que (a_n) croît, (b_n) décroît et $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{3}$, ce qui montre que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune l_P.

Montrons que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & [0,1] \\ P & \longmapsto & l_P \end{array} \right.$ est injective. Considérons deux parties P et Q distinctes, identifiées à leur fonctions caractéristiques (p_n) et (q_n). Puisque $\chi_P \neq \chi_Q$, il y a un plus petit entier k tel que $p_k \neq q_k$. Les suites (a_n, b_n) associées prennent donc les mêmes valeurs jusqu'à (a_{k-1}, b_{k-1}), mais ensuite les segments $[a_k(P), b_k(P)]$ et $[a_k(Q), b_k(Q)]$ deviennent disjoints ; comme l_P doit appartenir à $[a_k(P), b_k(P)]$, on a bien $l_P \neq l_Q$, *CQFD*.

Pour conclure, si $\mathbb{R}$ était dénombrable, la partie infinie $[0,1]$ le serait aussi, d'où une injection

$$\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow [0,1] \simeq \mathbb{N}, \text{ contredisant le théorème de Cantor.}$$

14 Équipotence des $\mathbb{R}^n$

Montrer que $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ et en déduire que $\mathbb{R}^a \simeq \mathbb{R}^b$ pour tous entiers $a, b \geq 1$.

Solution proposée.
Se rappelant que $\mathbb{R} \simeq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ (*cf.* exercice précédent), ce qui devient (en invoquant les fonctions caractéristiques) $\mathbb{R} \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on est ramené à montrer

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \stackrel{?}{\simeq} \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}}.$$

Il s'agit donc de trouver une identification $\mathbb{N} \stackrel{?}{\simeq} \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}$, ce qui est vraiment facile lorsque l'on se souvient des mots « pair » et « impair ». Si l'on explicite les correspondances ci-dessus, on tombe sur l'application *farot*[15], mélangeant deux suites de 0 et de 1, définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ (a_1, a_2, a_3, ...; \ b_1, b_2, b_3, ...) & \longmapsto & (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ...) \end{array} \right.$$

et dont la réciproque est donnée par... (suivez votre intuition des cartes) la lecture du farot ci-dessus en reversant le sens des flèches.

On déduit de ce qui précède les équipotences

$$\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n,$$

d'où par une récurrence immédiate $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ pour tout $n \geq 1$, ce qui suffit pour retrouver notre énoncé.

Remarque topologique. Des arguments de connexité[16] permettent de montrer que le segment $[0,1]$

[15] Le mélange *farot* est un mélange américain parfait – toutes les cartes sont parfaitement entrelacées. Si ce dernier est réalisé parfaitement, le jeu redevient tel quel après un certain nombre de farots, un fait paradoxal qui s'explique avec quelques rudiments de théorie des groupes (plus particulièrement : le théorème de Lagrange).

[16] *cf.* feuille sur la continuité

ne peut pas être homéomorphe au carré $[0,1]^2$. On peut en revanche construire une surjection continue $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$ (c'est la fameuse courbe de Peano, *cf.* feuille sur la continuité pour plus de détails).

Remarque cardinale. On montre sur la feuille consacrée aux ordinaux que ensemble infini bien ordonné est équipotent à son carré (on vient de traiter à la main le cas de $\mathbb{R}$). On verra également que l'axiome du choix permet de bien ordonner tout ensemble puis que, réciproquement, l'équipotence de tout ensemble infini avec son carré implique l'axiome du choix.

15 Autour de $\mathfrak{S}_E$

1. *Peut-on énumérer l'ensemble $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Préciser son cardinal.*
2. *Qu'en est-il du sous-groupe $\mathfrak{S}_\infty$ de $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ formée des permutations à support[17] fini ?*
3. *Généraliser à l'ensemble $\mathfrak{S}_E$ d'un ensemble infini E dont toutes les parties sont équipotentes à leur carré.*

Solution proposée.

1. Sans la condition de bijectivité, la réponse est clairement non sinon

$$\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \twoheadrightarrow 2^{\mathbb{N}} \simeq \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \text{ contredisant Cantor.}$$

Mais nous avons affaire à des bijections. Peut-on déjà en contruire des simples ? Pour rester dans le fini (on y voit mieux), toute bijection $f \in \mathfrak{S}_A$ d'une partie $A \subset \mathbb{N}$ dans elle-même induit une bijection $\widetilde{f} \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ en prolongeant f par l'identité en-dehors de A. Si nous pouvions trouver dans chaque $\mathfrak{S}_A$ un f_A de sorte que tous les f_A soient distincts, nous aurions une injection $\left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(\mathbb{N}) & \hookrightarrow & \mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \\ A & \longmapsto & \widetilde{f_A} \end{array}\right.$, empêchant $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ d'être dénombrable par le théorème de Cantor.

Pour ce faire, il suffit d'associer à chaque $f \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ une quantité $q(f)$ telle que les $q\left(\widetilde{f_A}\right)$ soient distincts pour A décrivant $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Pour ne pas s'embêter à tenir compte de la différence entre f_A et $\widetilde{f_A}$, il faudrait que $q(f_A)$ ne dépende que du support de f_A. Il est alors naturel de prendre pour $q(f)$ le support de f. Pour faire simple, on cherche à avoir $q(f_A) = A$, autrement dit f_A sans point fixe. Pour y parvenir, on distingue les cas selon la finitude (ou non) de A. Lorsque A est fini, mettons $A = \{a_1 < \cdots < a_n\}$, on définit $f_A(a_i) = a_{i+1}$ pour tout i modulo n ; lorsque A est infini (donc dénombrable comme partie de $\mathbb{N}$), disons $A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \cdots\}$, on définit f_A comme échangeant chaque a_{2i} avec a_{2i+1} pour tout $i \geq 0$; on vérifie alors que f_A fixe exactement le complémentaire de A dans les deux cas.

Montrons réciproquement que $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, ce qui permettra de conclure $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \simeq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ grâce à BBBCDSZ : (les ensembles E, F, G ci-dessous sont génériques)

$$\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \underset{E \hookrightarrow \mathfrak{P}(E)}{\hookrightarrow} \mathfrak{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} \underset{\mathfrak{P}(E) \simeq \{0,1\}^E}{\simeq} \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \underset{(E^F)^G \simeq E^{F \times G}}{\simeq} \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \underset{\mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}}{\simeq} \{0,1\}^{\mathbb{N}} \simeq \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \textit{ CQFD.}$$

2. En regroupant les permutations de $\mathfrak{S}_\infty$ selon leur support, on voit que $\mathfrak{S}_\infty$ est équipotent à l'union des $\mathfrak{S}_A$ pour A décrivant les parties finies de $\mathbb{N}$. Or d'une part on va montrer que ces dernières sont en nombre dénombrable, d'autre part il est clair que les $\mathfrak{S}_A$ sont tous finis (on rappelle $|\mathfrak{S}_A| = |A|!$), ce qui réalisera $\mathfrak{S}_\infty$ comme union dénombrable d'ensembles finis, nous donnant ainsi accès à son cardinal :

$$|\mathfrak{S}_\infty| = \aleph_0 \text{ (le dénombrable).}$$

Prouvons notre assertion. L'ensembles des parties finies de $\mathbb{N}$ est la réunion des ensembles des parties de $\mathbb{N}$ de cardinal fixé (lorsque ce cardinal décrit $\mathbb{N}$) : comme il n'y a qu'un nombre dénombrable de cardinaux possibles, il suffit de montrer que, à $k \in \mathbb{N}$ fixé, l'ensemble $\mathfrak{P}_k(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ de cardinal k est au plus dénombrable. Or l'on a une surjection évidente $\mathbb{N}^k \twoheadrightarrow \mathfrak{P}_k(\mathbb{N})$ avec les équipotences $\mathbb{N}^k \simeq \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^0 \simeq \{0\}$, ce qui conclut.

[17] le *support* d'une permutation σ est l'ensemble des points qui ne sont pas fixés par σ

3. Reprenons la démonstration du premier point en remplaçant $\mathbb{N}$ par E. L'injection $\mathfrak{S}_E \hookrightarrow \mathfrak{P}(E)$ demeure valide point par point en utilisant l'hypothèse $E^2 \simeq E$. Quant à notre application $A \mapsto \widetilde{f_A}$, il s'agit de bien définir f_A dans le cas où A est infini : pour garder l'idée d'échanger deux termes consécutifs, on peut remarquer que l'équipotence $A \simeq A \sqcup A$ (qui découle des injections $A \hookrightarrow A \sqcup A \hookrightarrow A \times A \simeq A$ et de BBBCDSZ) permet de définir f_A comme échangeant un élément $a \in A$ de la première copie avec le a de la seconde copie. On pourrait également définir f_A comme échangeant les coordonnées d'un élément de $A \times A \simeq A$, à condition de priver $A \times A$ de sa diagonale $\{(a,a)\}_{a\in A}$ (qui est fixe par notre f_A), ce qui reste possible vu les injections[18] $A \hookrightarrow (A \times A) \setminus \{(a,a)\}_{a\in A} \hookrightarrow A \times A \simeq A$.

   Finalement, on obtient la généralisation

$$|\mathfrak{S}_E| = \left|E^E\right| = |\mathfrak{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

Remarque. Il est usuel lorsque l'on étudie les groupes symétriques $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}_{\{1,2,\ldots,n\}}$ de plonger ces derniers dans $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ en prolongeant l'action d'un $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ par Id en-dehors de $\{1,...,n\}$ (c'est le prolongement $f \mapsto \widetilde{f}$ de notre démonstration). L'intérêt du groupe $\mathfrak{S}_\infty$ ainsi obtenu est d'être incomparablement moins difficile à étudier que $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ (même s'il contient déjà toute la richesse des groupes $\mathfrak{S}_n$), ce que confirme notre étude cardinale.

Remarque axiomatique. L'hypothèse de la dernière question peut être levée en invoquant l'axiome du choix (*cf.* remarque à l'exercice précédent).

16 Partitions et cardinaux

1. *Soit A un ensemble dont toute partie est ou bien finie ou bien cofinie*[19]*. Montrer que A est fini.*
2. *On suppose plus généralement qu'il y a un entier $n \geq 2$ tel que, pour toute partition en n parties $A = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$, l'un des A_i est fini. Montrer de même que A est fini.*
3. *Même question pour des partitions dénombrables.*
4. *On suppose que toute partition continue*[20] *de $\mathbb{R}$ contient une part au plus dénombrable. Montrer l'hypothèse du continu généralisée.*

Solution proposée.

1. Supposons par l'absurde que A soit infini. On peut donc trouver une injection $\mathbb{N} \hookrightarrow A$. Mais alors l'image des entiers pairs est infinie, tandis que son complémentaire qui contient l'image des impairs est elle aussi infinie, contradiction.
2. On vient de traiter le cas $n = 2$ en partitionnant $\mathbb{N}$ en deux parties infinies à l'aide du reste modulo 2. Remplacer par les restes modulo un entier $n \geq 2$ permet de généraliser immédiatement.
3. Pour des partitions dénombrables, l'idée des congruences ne fait plus sens ; on s'en sort autrement pour exhiber une partition de $\mathbb{N}$ en un nombre dénombrable de parties infinies. En notant A_n l'ensemble des entiers s'écrivant à l'aide de n premiers exactement avec multiplicité (A_1 est ainsi l'ensemble des premiers, A_2 l'ensemble des produits de deux premiers éventuellement confondus, etc.), il est clair que tout entier ≥ 2 tombe dans un A_n (et un seul).
4. Il suffit de montrer que notre hypothèse est contradictoire pour en déduire tout ce qu'on veut – hypothèse du continu et axiomes des grands cardinaux inclus (ainsi que leur négation).

   Il serait sage de faire le lien avec les questions précédentes : on demandait de montrer qu'un ensemble infini peut toujours être partitionné en un nombre dénombrable de parts dénombrables, ce que nous avons fait en le démontrant pour l'ensemble infini particulier $\mathbb{N} \simeq \bigsqcup_{n\geq 1} A_n \simeq \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (\{n\} \times \mathbb{N}) \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. L'écriture qui précède montre en fait que la question se réduisait à montrer l'équipotence de $\mathbb{N}$ et de son carré.

   Qu'en est-il de $\mathbb{R}$? L'exercice 14 montre que cela reste valide, ce qui permet de partitionner $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{r\in\mathbb{R}} \{r\} \times \mathbb{R}$ en un nombre continu de parts infinies indénombrables, fournissant la contradiction cherchée.

[18] Pour la première, on peut fixer deux éléments $a \neq b$ dans A et définir : d'une part $x \mapsto (x,a)$ pour $x \neq a$, d'autre part $a \mapsto (a,b)$.
[19] de complémentaire fini
[20] *i. e.* indexée par le continu ($\mathbb{R}$)

Remarque. La dernière question se généralise aisément une fois que l'on sait que tout ensemble infini (pas seulement $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$) est équipotent à son carré (avec AC) : *si κ est un cardinal fixé, un ensemble dont toutes les partitions indexées par κ ont une part de cardinal $< \kappa$ est nécessairement de cardinal $< \kappa$* (il suffit d'écrire $\kappa \simeq \kappa^2 = \coprod_{k \in \kappa} \{k\} \times \kappa$). L'exercice demandait de traiter les cas dénombrable ($\kappa = \aleph_0$) et continu ($\kappa = 2^{\aleph_0}$).

17 Théorème de Zorn (sans les ordinaux)

On se propose de montrer le lemme de Zorn, lequel, en substance, permet d'alléger considérablement les contraintes portant sur un ensemble ordonné pour montrer l'existence d'un élément maximal. De façon plus précise, d'une part on peut supposer que l'ordre est *total*, d'autre part on se permettre d'aller chercher un majorant *en-dehors* de notre ensemble.

On va montrer ce théorème (car il s'agit de bien plus qu'un simple lemme) à l'aide d'un résultat ensembliste qui ne fait pas appel à l'axiome du choix.

(La bonne façon de s'y prendre reste toutefois clairement le recours aux ordinaux. Pour apprécier l'utilisation de ces derniers, on laisse le lecteur comparer la lecture de ce qui suit à celle du théorème de Zorn dans la feuille sur les ordinaux.)

Définitions.
Un chaîne *est une partie (d'un ensemble ordonné) qui est totalement ordonnée.*
Un ensemble ordonné E est dit inductif *si tout chaîne de E admet un majorant dans E.*
Un ensemble $\mathcal{E}$ de parties d'un ensemble E sera dit stable par union de chaîne *si l'union de toute chaîne de $\mathcal{E}$ (pour $\subset$) reste dans $\mathcal{E}$.*

On laisse méditer le lecteur sur l'implication évidente

$$\text{stable par union de chaîne} \implies \text{inductif.}$$

Théorème (Zorn).
Tout ensemble inductif (non vide) admet un élément maximal.

Proposition.
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble (non vide) de parties d'un ensemble E et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que, pour toute partie $A \subset E$, on a $f(A) = A \cup \{e_A\}$ avec $e_A \in E$. Alors, si $\mathcal{E}$ est stable par union de chaîne, f admet un point fixe.

Démonstration.

1. *Déduire de la proposition le théorème de Zorn*

   Soit $A_0 \in \mathcal{E}$. Une partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ sera dite *gentille* si elle contient A_0, est stable par union de chaîne et stable par f.

2. *Montrer l'existence d'un plus petit ensemble gentil $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$.*
3. *Conclure si $\mathcal{A}$ est totalement ordoné.*
4. *Expliquer comment faire un raisonnement par induction sur $\mathcal{A}$.*
5. *Montrer par induction que $\mathcal{A}$ est totalement ordonné. Pour le passage à f, on montrera par une autre induction que, à $A \in \mathcal{A}$ fixé, une autre partie $B \in \mathcal{A}$ vérifie $f(A) \subset B$ ou $B \subset A$.*

Solution proposée.

1. On se donne E un ensemble (non vide) inductif supposé par l'absurde sans élément maximal. Le bon candidat pour $\mathcal{E}$ est l'ensemble des chaînes de E. Pour trouver un f, *i. e.* pour obtenir des e_A, on utilise l'inductivité de E : toute chaîne A admet un majorant e_A, que l'on peut toujours supposé strict (car il n'est pas maximal dans E). L'axiome du choix nous donne donc une application $e : \mathcal{E} \longrightarrow E$, qui permet de construire $f(A) = A \cup \{e_A\}$. La proposition affirme que f a un point fixe, ce qui est impossible vu que l'on n'a jamais $e_A \in A$.

2. L'existence de A_0 est assurée par la non vacuité de $\mathcal{E}$. Un $\mathcal{A}$ comme voulu doit être inclus dans *tous* les ensembles gentils (il y a au moins $\mathcal{E}$ qui est gentil), donc dans leur intersection $\mathcal{I}$. Si l'on montre que $\mathcal{I}$ est gentil, on aura gagné : il suffira de prendre $\mathcal{A} = \mathcal{I}$.

   Il est clair que l'intersection d'ensembles contanant un même A_0 contient encore cet A_0. De plus, en vertu de la formule $f\left(\bigcap A_i\right) \subset \bigcap f\left(A_i\right)$, la condition de stabilité (par f) passe bien à l'intersection. Il reste le passage à l'union de chaîne : si $\mathcal{C}$ est une chaîne de $\mathcal{I}$, $\mathcal{C}$ est incluse dans l'intersection des ensembles gentils, lesquels sont stables par union de chaîne, donc contiennent tous $\cup\mathcal{C}$, ce qui montre que $\mathcal{I}$ contient $\cup\mathcal{C}$.

3. La condition donnée dit que $\mathcal{A}$ est une chaîne. Son union $\cup\mathcal{A}$ reste donc dans $\mathcal{A}$, donc son image $f\left(\cup\mathcal{A}\right)$ aussi, *i. e.* $f\left(\cup\mathcal{A}\right) \in \mathcal{A}$, ou encore $f\left(\cup\mathcal{A}\right) \subset \cup\mathcal{A}$. La condition sur f imposant l'inclusion inverse, on a trouvé notre point fixe.

4. Pour montrer une proposition $\mathcal{P}\left(A\right)$ sur tous les $A \in \mathcal{A}$, il suffit de montrer trois choses : $\mathcal{P}\left(A_0\right)$, $\mathcal{P}\left(A\right) \implies \mathcal{P}\left(f\left(A\right)\right)$, et, si $\mathcal{C}$ est une chaîne de $\mathcal{A}$, $\left[\forall C \in \mathcal{C}, P\left(C\right)\right] \implies P\left(\cup\mathcal{C}\right)$. En effet, l'ensemble des $A \in \mathcal{A}$ vérifiant $\mathcal{P}$ sera alors gentil, donc contiendra $\mathcal{A}$ par minimalité de ce dernier.

5. Montrons par induction sur $A \in \mathcal{A}$ que tout $B \in A$ vérifie $A \subset B$ ou $B \subset A$.

   (a) Pour $A = A_0$, montrons que $\mathcal{B} := \{B \in \mathcal{A}\ ;\ A_0 \subset B\}$ est gentil. Ceci montrera qu'il contient $\mathcal{A}$, donc que A_0 est minimal dans A (*a fortiori* comparable à tous les autres).

   (b) Il est déjà trivial que $A_0 \in \mathcal{B}$. De plus, pour $B \in \mathcal{B}$, on a de suite $A_0 \subset f\left(A_0\right) \subset f\left(B\right)$; comme par ailleurs $\mathcal{A}$ est stable par f, $f\left(B\right)$ tombe dans $\mathcal{A}$, ce qui montre $f\left(B\right) \in \mathcal{B}$. Enfin, si $\mathcal{C}$ est une chaîne de $\mathcal{B}$, tous ses éléments contiennent A_0, donc l'union $\cup\mathcal{B}$ aussi, laquelle tombe du coup dans $\mathcal{B}$ (ne pas oublier de dire que, $\mathcal{A}$ étant stable par union de chaîne, $\cup\mathcal{B}$ reste dans $\mathcal{A}$).

   (c) Pour le passage à f, suivons l'énoncé : on se donne un $A \in \mathcal{A}$ vérifiant $\forall B \in \mathcal{A}$, $(A \subset B)$ ou $(B \subset A)$, et on montre par induction sur $B \in \mathcal{A}$ que $f\left(A\right) \subset B$ ou $B \subset A$.

      i. Pour $B = A_0$, la seconde inclusion est triviale car A_0 minore $\mathcal{A}$.

      ii. Pour l'union de chaîne, soit $\mathcal{C}$ une chaîne dont les éléments B vérifient $f\left(A\right) \subset B$ ou $B \subset A$. Alors, ou bien il y a un B vérifiant $f\left(A\right) \subset B$, auquel cas $f\left(A\right) \subset B \subset \cup\mathcal{C}$, ou bien tous les B sont inclus dans A, donc leur union aussi, *i. e.* $\cup\mathcal{C} \subset A$; dans les deux cas, on a ce qu'on veut.

      iii. Pour le passage à f, on part d'un B vérifiant $f\left(A\right) \subset B$ ou $B \subset A$. Le premier cas peut être abandonné car il implique $f\left(A\right) \subset f\left(f\left(A\right)\right) \subset f\left(B\right)$. Mais on sait aussi, par hypothèse d'induction sur A, que l'on dispose de l'une des inclusions $A \subset f\left(B\right)$ ou $f\left(B\right) \subset A$. La seconde donnant de suite $B \subset f\left(B\right) \subset A$, on la laisse tomber. Finalement, il ne reste qu'un seul cas : $B \subset A \subset f\left(B\right)$. C'est le moment d'invoquer la forme de f pour dire que l'une des deux inclusions précédentes est une égalité.