Devoir maison

(facultatif)

Le but de ce problème est de se familiariser avec les structures algébriques que nous rencontrerons plus tard dans l'année.

On rappelle que le produit cartésien $A\times B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des couples (a,b) lorsque $\left\{\begin{array}{l} a \text{ parcourt } A \\ b \text{ parcourt } B \end{array}\right.$. Si l'on a deux applications $\left\{\begin{array}{l} f : A \longrightarrow A' \\ g : B \longrightarrow B' \end{array}\right.$, on notera $f\otimes g$ l'application $\left\{\begin{array}{ccc} A\times B & \longrightarrow & A'\times B' \\ (a,b) & \longmapsto & (f(a), g(b)) \end{array}\right.$.

Un diagramme d'applications est dit ***commutatif*** si, lorsque l'on suit deux chemins de flèches partant d'un même ensemble E et arrivant à un même ensemble F, les composées ainsi obtenues sont les mêmes. Par exemple, la commutativité du diagramme $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & B \\ \downarrow f & \swarrow_h & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{i} & D \end{array}$ s'exprimera par les égalités des composées $\left\{\begin{array}{l} A \overset{h\circ s=f}{\longrightarrow} C \\ B \overset{i\circ h=g}{\longrightarrow} D \\ A \overset{i\circ f=g\circ s}{\longrightarrow} D \end{array}\right.$ (où la dernière égalités découle des deux premières suivant $i\circ f = i\circ h\circ s = g\circ s$).

1 Généralités

1.1 Lois de composition

On fixe dans toute cette partie un ensemble E et un ensemble Ω.

On appelle ***action*** de Ω sur E toute application $\Omega\times E \longrightarrow E$. On notera $\omega\cdot e$ l'image d'un couple $(\omega,e)\in\Omega\times E$ par une telle action.

Lorsque $\Omega = E$, une action de E sur E s'appelle une ***loi de composition interne*** (sur E). (Suivant ce vocabulaire, on pourra parler de ***loi de composition externe*** (sur E) pour désigner toute action sur E.) Une ***addition*** est une lci notée $+$, une ***multiplication*** est une lci notée $\times$.

Supposons désormais E muni d'une lci $*$ et d'une action de Ω. On dit que

- la loi $*$ est ***commutative*** si $\forall a,b\in E,\ a*b = b*a$;
- un élément $\mathbf{1}\in\Omega$ est un ***neutre*** (à gauche) pour la loi $\cdot$ si $\forall e\in E,\ \mathbf{1}\cdot e = e$;
- un élément $\mathbf{1}\in E$ est un ***neutre*** (bilatère) pour la loi $*$ si $\forall e\in E,\ \mathbf{1}*e = e = e*\mathbf{1}$;
- un élément $i\in E$ est, lorsque la loi $*$ admet un neutre $\mathbf{1}$, un ***inverse*** d'un élément $e\in E$ donné si $i*e = \mathbf{1} = e*i$;
- la loi $\cdot$ est ***distributive*** sur la loi $*$ si $\left\{\begin{array}{c} \forall\omega\in\Omega \\ \forall a,b\in E \end{array}\right.$, $\omega\cdot(a*b) = (\omega\cdot a)*(\omega\cdot b)$;
- les lois $\cdot$ et $*$ sont ***associatives*** si $\left\{\begin{array}{c} \forall\omega\in\Omega \\ \forall a,b\in E \end{array}\right.$, $\omega\cdot(a*b) = (\omega\cdot a)*b$. (lorsque les lois $\cdot$ et $*$ coïncident, on dit plus simplement que la loi $*$ est ***associative***).

Questions.

1. *Montrer qu'un neutre pour $*$ est unique.*
2. *Montrer qu'un inverse d'un élément donné de E pour $*$ est unique lorsque la loi $*$ est associative (et possède un neutre).*
3. *Montrer que la commutavité de $*$ équivaut à la commutativité du diagramme*

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \xrightarrow{*} & E \\ \downarrow\tau & & \downarrow \mathrm{Id} \\ E\times E & \xrightarrow{*} & E \end{array} \qquad \text{avec } \tau : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

4. *Montrer que la distributivité de $\cdot$ sur $*$ équivaut à la commutativité du diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} \Omega\times(E\times E) & \overset{\mathrm{Id}\otimes *}{\longrightarrow} & \Omega\times E & \overset{\cdot}{\longrightarrow} & E \\ \downarrow\iota & & & & \downarrow \mathrm{Id} \\ (\Omega\times E)\times(\Omega\times E) & \overset{\cdot\otimes\cdot}{\longrightarrow} & E\times E & \overset{*}{\longrightarrow} & E \end{array} \qquad \textit{avec } \iota : \begin{pmatrix}\omega\\(a,b)\end{pmatrix}\mapsto\left(\begin{pmatrix}\omega\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\omega\\b\end{pmatrix}\right).$$

5. *Montrer que l'associativité de $\cdot$ sur $*$ équivaut à la commutativité du diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} \Omega\times(E\times E) & \overset{\mathrm{Id}\otimes *}{\longrightarrow} & \Omega\times E & \overset{\cdot}{\longrightarrow} & E \\ \downarrow\alpha & & & & \downarrow \mathrm{Id} \\ (\Omega\times E)\times E & \overset{\cdot\otimes \mathrm{Id}}{\longrightarrow} & E\times E & \overset{*}{\longrightarrow} & E \end{array} \qquad \textit{avec } \alpha : \begin{pmatrix}\omega\\(a,b)\end{pmatrix}\mapsto\left(\begin{pmatrix}\omega\\a\end{pmatrix},b\right).$$

1.2 Structures usuelles : monoïde, groupe, anneau, corps, espace vectoriel, algèbre

Un ***monoïde*** est un ensemble muni d'un lci associative avec neutre. Un monoïde ***additif*** (resp. ***multiplicatif***) désignera un monoïde dont la loi est une addition (resp. multiplication). Un ***groupe*** est un monoïde où tout élément possède un inverse.

Un ***anneau*** est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication distributive sur cette dernière faisant de cet ensemble un groupe additif et un monoïde multiplicatif. Les neutres additif et multiplicatif seront respectivement notés 0 et 1. La notation A^* désignera la partie des éléments non nuls d'un anneau donné A. Un anneau est dit ***commutatif*** lorsque sa multiplication l'est. Un ***corps*** est un anneau commutatif où $1\neq 0$ et où tout élément est inversible.

Un ***espace vectoriel*** est un groupe additif E sur lequel agit un corps K de sorte que l'action $\cdot$ possède un neutre, soit "associative"[1] avec le $\times$ de K, soit distributive sur le $+$ de E et soit "distributive"[2] (à gauche) sur le $+$ de K. On parlera de K-espace vectoriel pour préciser le corps K agissant. Une K-***algèbre*** est un ensemble A muni d'une addition, d'une multiplication et de l'action d'un corps K de sorte que

$$\begin{cases} \text{les lois } \cdot \text{ et } \times \text{ soient associatives} \\ A \text{ soit un anneau pour les lois } + \text{ et } \times \\ A \text{ soit un espace vectoriel pour les lois } + \text{ et } \cdot \end{cases}.$$

Questions.

1. (a) *Expliquer brièvement pourquoi les ensembles* $\mathbf{N}$, $2\mathbf{N}$ *et* $2\mathbf{N}+1$ *sont ou ne sont pas des monoïdes (discuter pour chacun le cas additif ou multiplicatif). Qu'en est-il de l'ensemble des applications d'un ensemble donné dans lui-même ?*

   (b) *Expliquer brièvement pourquoi les ensembles suivants sont des groupes :* $\mathbf{Z}$ *pour l'addition, le cercle unité complexe pour le produit,* $\mathfrak{S}_A$ *pour la composition. Les ensembles* $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ *sont-ils des groupes multiplicatifs ?*

   (a) *Expliquer brièvement pourquoi* $\mathbf{Z}$ *est un anneau et en quoi les ensembles* $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *et* $\mathbf{C}$ *sont des corps.*

   (b) *Montrer que l'addition d'un anneau est toujours commutative.*

   (c) *Montrer qu'un anneau contient un seul élément si et seulement si* $1=0$.

   (d) *Montrer que dans un anneau les éléments inversibles (pour* $\times$*) forment un groupe.*

   (e) *Montrer qu'un ensemble* K *muni d'une addition et d'une multiplication distributive sur cette dernière est un corps si et seulement si* K *est un groupe additif et si* K^* *est un groupe multiplicatif.*

   (a) *Expliquer brièvement en quoi les ensembles* $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *et* $\mathbf{C}$ *sont des* $\mathbf{Q}$*-espaces vectoriels et pourquoi* $\mathbf{R}^2$ *et* $\mathbf{R}^3$ *sont des* $\mathbf{R}$*-espaces vectoriels. Est-ce que* $\mathbf{C}^2$ *est un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel ?*

   (b) *Montrer que l'addition d'un espace vectoriel est toujours commutative.*

   (c) Soit K un corps et E un K-espace vectoriel .

      i. *Montrer l'équivalence* $\forall(\lambda,x)\in K\times E,\ \lambda x=0 \Longleftrightarrow \left\{\text{ou}\ \begin{matrix}\lambda=0\\ x=0\end{matrix}\right.$.

[1] comprendre $\lambda\cdot(\mu\cdot x)=(\lambda\times\mu)\cdot x$ pour tous $\lambda,\mu\in K$ et pour tout $x\in E$

[2] comprendre $(\lambda+\mu)\cdot e=\lambda\cdot e+\mu\cdot e$ pour tous $\lambda,\mu\in K$ et tout $e\in E$

ii. *Établir la « **règles des signes** »* $(-\lambda)\cdot x=\lambda\cdot(-x)=-(\lambda\cdot x)$ *pour tout* $(\lambda,x)\in K\times E$.

(d) *Montrer que le neutre d'un corps* K *agissant sur un* K*-espace vaut nécessairement* 1 (Hint : si $\mathbb{1}$ est un tel neutre, considérer $\mathbb{1}\cdot(\mathbb{1}\cdot x)$) . *Préciser le cas pathologique pour lequel cette affirmation fait défaut.*

(e) *Montrer qu'un corps* K *possède une unique structure de* K*-espace vectoriel.* (Hint : pour l'unicité, montrer $\lambda\cdot 1=\lambda$ pour tout $\lambda\in K$ en considérant $\lambda\cdot(1\cdot 1)$ et en déduire l'égalité $a\cdot b=a\times b$ pour tous $a,b\in K$.)

(f) *L'espace vectoriel* $\mathbf{R}^3$ *est-il une algèbre si l'on prend pour multiplication le produit vectoriel ? Lister précisément les points qui font défaut.*

1.3 Morphismes

Dans ce qui suit, il nous arrivera de formuler des énoncés qui font sens quelle que soit la structure considérée. Dans chacune de ces phrases, le mot *truc* sera employé et désignera l'un des six termes (et *le même* pour toute la phrase) parmi : *monoïde*, *groupe*, *anneau*, *corps*, *espace vectoriel*, *algèbre*.

Un ***morphisme de monoïdes*** est une application $M\xrightarrow{\varphi}N$ où M et N sont des monoïdes telle que $\varphi(1)=1$ et $\forall m,\mu\in M,\ \varphi(m\mu)=\varphi(m)\varphi(\mu)$.

Un ***morphisme de groupes*** est un morphisme de monoïdes $G\xrightarrow{\varphi}H$ où G et H sont des groupes tel que $\forall g\in G,\ \varphi\left(g^{-1}\right)=\varphi(g)^{-1}$.

Un ***morphisme d'anneaux*** est une application $A\longrightarrow B$ où A et B sont des annneaux qui est un morphisme de groupes additifs et un morphisme de monoïdes multiplicatifs.

Un ***morphisme de corps*** est un morphisme d'anneaux $K\xrightarrow{\varphi}L$ où K et L sont des corps tel que $\forall a\in K^*,\ \varphi\left(a^{-1}\right)=\varphi(a)^{-1}$.

Étant donné un ensemble Ω, un Ω***-morphisme*** est une application $X\xrightarrow{\varphi}Y$ où X et Y sont deux ensembles sur lesquels agit Ω telle que $\forall(\omega,x)\in\Omega\times X,\ \varphi(\omega\cdot x)=\omega\cdot\varphi(x)$.

Un ***morphisme de*** K***-espaces vectoriels*** est une application $E\xrightarrow{\varphi}F$ où E et F sont des K-espaces vectoriels qui est un morphisme de groupes additifs et un K-morphisme.

Un ***morphisme de*** K***-algèbres*** est une application $A\xrightarrow{\varphi}B$ où A et B sont des K-algèbre qui est un morphisme d'anneaux et un morphismes de K-espaces vectoriels.

Un ***isomorphisme*** (resp. ***endomorphisme***, resp. ***monomorphisme***, resp. ***automorphisme***) de trucs est un morphisme de trucs bijectif (resp. injectif, resp. d'un truc dans lui-même, resp. bijectif d'un truc dans lui-même[3]).

Questions.

1. (a) *Soit* $\varphi:G\longrightarrow H$ *un morphismes de groupes. Montrer que* φ *est injectif si et seulement si* $\forall g\in G,\ (\varphi(g)=1\Longrightarrow g=1)$.

   (b) *Soient* G *et* H *deux groupes (notés multiplicativement). Montrer qu'une application* $\varphi:G\longrightarrow H$ *est un morphisme de groupes si et seulement si* $\forall a,b\in G,\ \varphi(a\times b)=\varphi(a)\times\varphi(b)$, *ou encore si et seulement si le digramme suivant commute :* $\begin{array}{ccc}G\times G & \overset{\varphi\otimes\varphi}{\longrightarrow} & H\times H\\ \downarrow\times & & \downarrow\times\\ G & \overset{\varphi}{\longrightarrow} & H\end{array}$.

   (c) *Montrer que la composée de deux morphismes de monoïdes (resp. groupes) est encore un morphisme de monoïdes (resp. groupes).*

   (d) **(transfert de structure)** *Soit* $\varphi:M\xrightarrow{\sim}N$ *une bijection où* N *est un monoïde (resp. groupe). Montrer que la loi définie par* $m*\mu:=\varphi^{-1}(\varphi(m)\varphi(\mu))$ *pour tous* $m,\mu\in M$ *munit* M *d'une structure de monoïde (resp. groupe). Vérifier que* φ *devient alors un morphisme de monoïdes (resp. groupes).*

   (a) *Soient* A *et* B *deux anneaux. À quelle condition l'application nulle de* A *vers* B *est-elle un morphisme d'anneaux ? Même question avec l'application constamment égale à* 1.

   (b) *Montrer qu'une application entre deux corps est un morphisme de corps si et seulement si elle est un morphisme d'anneaux.*

[3]on pourra ainsi retenir « *auto = endo + iso* »

(c) *Montrer qu'un morphisme de corps est toujours un monomorphisme de corps.*

(d) *Soit* λ *un complexe. Montrer que l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ a & \longmapsto & \lambda a \end{array}\right.$ *est un monomorphisme de corps si et seulement* $\lambda = 1$.

(e) **(transfert de structure)** *Soit* $\varphi : A \widetilde{\longrightarrow} B$ *une bijection où* B *est un anneau (resp. corps). Montrer que les lois définies par* $\left\{\begin{array}{l} a + \alpha := \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(\alpha)) \\ a \times \alpha := \varphi^{-1}(\varphi(a) \times \varphi(\alpha)) \end{array}\right.$ *pour tous* $a, \alpha \in A$ *munissent* A *d'une structure d'anneau (resp. corps). Vérifier que* φ *devient alors un morphisme d'anneaux (resp. de corps).*

(a) *Soit* K *un corps et* A *une* K*-algèbre. Montrer que l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & A \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \times 1 \end{array}\right.$ *est un monomorphisme de* K*-algèbres.*

(b) **(transfert de structure)** *Soit* K *un corps et* $\varphi : A \widetilde{\longrightarrow} B$ *une bijection où* B *est une* K*-algèbre. Montrer que les lois définies par* $\left\{\begin{array}{c} a + \alpha := \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(\alpha)) \\ a \times \alpha := \varphi^{-1}(\varphi(b) \times \varphi(\beta)) \\ \forall \lambda \in K,\ \lambda \cdot a := \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(a)) \end{array}\right.$ *pour tous* $a, \alpha \in A$ *munissent* A *d'une structure de* K*-algèbre. Vérifier que* φ *devient alors un morphisme de* K*-algèbres.*

2. *Montrer que la réciproque d'un isomorphisme de trucs est également un isomorphisme de trucs.*
3. *Montrer que l'ensemble des endomorphismes (resp. automorphismes) de trucs est un monoïde (resp. un groupe) pour la composition.*

1.4 Sous-structures

Un ***sous-truc*** d'un truc T est une partie de T qui est un truc pour les lois de T restreintes à cette partie.

Questions.

1. *Soit* G *un groupe et* $H \subset G$. *Montrer que* H *est un sous-groupe (de* G*) si et seulement si* $\left\{\begin{array}{c} 1 \in H \\ \forall a \in H,\ a^{-1} \in H \\ \forall a, b \in H,\ ab \in H \end{array}\right.$.
2. *Montrer que* $a\mathbf{Z}$ *est un sous-groupe additif de* $\mathbf{R}$ *pour tout réel* a. *Montrer que* $u\mathbf{Z} + v\mathbf{Z}$ *est un sous-groupe additif de* $\mathbf{C}$ *pour tous complexes* u *et* v.
3. *Soit* A *un anneau et* $B \subset A$. *Montrer que* B *est un sous-anneau (de* B*) si et seulement si* $\left\{\begin{array}{c} -1 \in B \\ \forall x, y \in B,\ x + y \in B \\ \forall x, y \in B,\ xy \in B \end{array}\right.$.
4. *La partie* $2\mathbf{Z}$ *est-elle un sous-anneau de* $\mathbf{Z}$ *? Les parties* $\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$ *et* $i\mathbf{Z}$ *sont-elles des sous-anneaux de* $\mathbf{C}$ *?*
5. *Soit* F *une partie d'un espace vectoriel* E *sur un corps* K. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel (de* E*) si et seulement si* $\left\{\begin{array}{c} 0 \in F \\ \forall f, f' \in F,\ f + f' \in F \\ \forall (\lambda, f) \in K \times F,\ \lambda a \in F \end{array}\right.$.
6. *La partie* $\mathbf{R}^*$ *est-elle un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{C}$ *? Même questions pour les droites* $\mathbf{R} + i$ et $e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbf{R}$.
7. *Soient* k *un sous-corps d'un corps* K. *Montrer qu'un* K*-espace vectoriel est un* k*-espace vectoriel.*

2 Exemples

2.1 Matrices 2×2

On appelle ***matrice*** (complexe de taille 2×2) tout quadruplet de complexes écrit sous forme de tableau $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On munit l'ensemble $M_{2,2}(\mathbf{C})$ des matrices d'une addition, d'une multiplication et d'une action de

$\mathbf{C}$ respectivement définies par (les lettres $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ désignent ci-après des complexes)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{pmatrix} \\
\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Questions.

1. *Montrer que ces lois munissent $M_{2,2}(\mathbf{C})$ d'une structure de $\mathbf{C}$-algèbre dont on précisera le neutre multiplicatif.*
2. *En considérant des matrices avec un* 1 *et trois* 0*, montrer que cette algèbre n'est pas commutative, possède des idempotents*[4]*, possède des nilpotents*[5] *et n'est pas intègre*[6]*.*

   On définit le ***déterminant*** d'une matrice $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *de* $M_{2,2}(\mathbf{C})$ *par le complexe* $\det M := ad - bc$.
3. *Montrer que l'application* $\det : M_{2,2}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ *est un morphisme de monoïdes multiplicatifs.*
4. *Montrer qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul et donner alors son inverse.*

2.2 Deux constructions des complexes

1. On munit $\mathbf{R}^2$ d'une addition, d'une multiplication et d'une action de $\mathbf{R}$ définies par (ci-après les lettres a, b, α, β désignent des réels)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+\alpha \\ b+\beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta \\ a\beta + b\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et } \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}.$$

   Montrer que ces lois munissent $\mathbf{R}^2$ d'une structure de $\mathbf{R}$-algèbre qui est un corps que l'on notera $\mathbf{C}_1$. On exprimera son neutre multiplicatif ainsi que l'inverse d'un élément inversible donné. Rappeler pourquoi l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C}_1 \\ \lambda & \longmapsto & (\lambda, 0) \end{array} \right.$ *est un monomorphisme de $\mathbf{R}$-algèbres.*
2. On considère l'ensemble $\mathbf{C}_2$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b décrivent $\mathbf{R}$.

   (a) *Montrer que $\mathbf{C}_2$ est une sous-$\mathbf{R}$-algèbre de $M_{2,2}(\mathbf{C})$ qui est un corps. On exprimera son neutre multiplicatif ainsi que l'inverse d'un élément inversible donné. Rappeler pourquoi l'application* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \hookrightarrow & \mathbf{C}_2 \\ \lambda & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{array} \right.$ *est un monomorphisme de $\mathbf{R}$-algèbres.*

   On définit la ***norme*** d'un élément $c = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $\mathbf{C}_2$ comme étant $\|c\| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

   (b) Montrer que la partie de $\mathbf{C}_2$ formée des éléments de norme 1 est un sous-groupe de $\mathbf{C}_2$.
3. *Montrer que les corps $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ sont tous deux isomorphes à $\mathbf{C}$ en tant que $\mathbf{R}$-algèbres. Pouvait-on du coup aller plus vite aux questions 1. et 2.(a) ?*

[4] Dans un monoïde, un ***idempotent*** est un élément valant son carré.
[5] Dans un anneau, un ***nilpotent*** est un élément dont une puissance est nulle.
[6] Un anneau A est dit ***intègre*** si $\forall x, y \in A,\ (xy = 0) \iff (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

3 Deux constructions des quaternions[7]

1. On considère l'ensemble $\mathbf{H}_1$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ où α et β décrivent $\mathbf{C}$.

   (a) *Montrer que $\mathbf{H}_1$ est une sous-$\mathbf{R}$-algèbre de $M_{2,2}(\mathbf{C})$. En est-ce une sous-$\mathbf{C}$-algèbre ?*

   (b) *Montrer que l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \hookrightarrow & \mathbf{H}_1 \\ \alpha & \longmapsto & \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \end{array}\right.$ *est un monomorphisme de $\mathbf{R}$-algèbres. Est-elle un morphisme de $\mathbf{C}$-algèbres ?*

   (c) *Montrer que tout élément de $\mathbf{H}_1$ se décompose d'une unique façon sous la forme*

   $$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où } \lambda, \mu, \nu, \xi \text{ sont des réels.}$$

   L'algèbre $\mathbf{H}_1$ est-elle commutative ?

   (d) *Montrer que tout élément non nul de $\mathbf{H}_1$ admet un inverse que l'on précisera. Peut-on dire que $\mathbf{H}_1$ est un corps ?* (Hint : calculer $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \beta \\ -\overline{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$.)

   On définit la ***norme*** d'un élément $h = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ de $\mathbf{H}_1$ comme étant $\|h\| := \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$.

   (e) *Montrer que la partie de $\mathbf{H}_1$ formée des éléments de norme 1 est un sous-groupe de $\mathbf{H}_1^*$.*

2. On définit sur $\mathbf{H}_2 := \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ une addition, une multiplication et une action de $\mathbf{R}$ respectivement définies par (ci-après les lettres a, λ, μ désignent des réels et u, v des vecteurs de $\mathbf{R}^3$)

   $$\begin{aligned} \binom{\lambda}{u} + \binom{\mu}{v} &:= \binom{\lambda+\mu}{u+v} \\ \binom{\lambda}{u} \times \binom{\mu}{v} &:= \binom{\lambda\mu - u \cdot v}{\lambda v + \mu u + u \wedge v} \\ a \cdot \binom{\lambda}{u} &:= \binom{a\lambda}{au}. \end{aligned}$$

   (où $\cdot$ désigne le produit scalaire et où $\wedge$ désigne le produit vectoriel)

   Montrer que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_1 & \longrightarrow & \mathbf{H}_2 \\ \begin{pmatrix} a+ib & A+iB \\ -A+iB & a-ib \end{pmatrix} & \longmapsto & \binom{a}{(b,A,B)} \end{array}\right.$ *est bien définie, bijective, et préserve sommes et produits. En déduire que $\mathbf{H}_2$ est une $\mathbf{C}$-algèbre où tout élément non nul est inversible (on explicitera l'inverse d'un élément $\binom{\lambda}{u}$ donné) et que la partie formée des élément $\binom{\lambda}{u}$ avec $\lambda^2 + ||u||^2 = 1$ est un sous groupe de $\mathbf{H}_2^*$.*

3. **(quaternions et rotations[8])** On fixe un quaternion $q \in \mathbf{H}_2$ de norme 1.

   (a) *Montrer que q s'écrit $\binom{\cos\theta}{(\sin\theta)u}$ pour un réel θ avec u vecteur unitaire.*

   (b) *Montrer que l'application* $\rho : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} \text{le vecteur } y \text{ tel que} \\ q\binom{0}{x}q^{-1} = \binom{0}{y} \end{array}\right. \end{array}\right.$ *est bien définie et fixe[9] u.*

   (c) *Exprimer l'image par ρ d'un vecteur $v \perp u$ à l'aide de u et de $u \wedge v$. En déduire que ρ est la rotation d'axe dirigé par u et d'angle 2θ.*

   (d) *Utiliser les quaternions pour déterminer la composée des trois rotations de même angle θ et d'axes dirigés respectivement par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.*

[7] Un ***quaternion*** est un objet de la forme $a + bi + cj + dk$ où a, b, c, d sont quatre réels et où les quaternions i, j, k satisfont les relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Il s'agit donc d'une généralisation des nombres complexes, ce qui fait que les quaternions sont aussi appelés ***hyper-complexes***. Les quaternions font partie de l'œuvre de Sir William Rowan Hamilton qui a présenté son article *On quaternions* le 11 novembre 1844 à la Royal Irish Academy. On pourra retenir que l'ensemble $\mathbf{H}$ des quaternions fait référence à **H**amilton ou aux **h**yper-complexes.

[8] C'est à l'occasion de l'article précité que Hamilton introduisit les termes *scalaire* et *vecteur*.

[9] Une application f ***fixe*** un point a si $f(a) = a$.