Combinatoire

Marc SAGE

1ier juillet 2008

Table des matières

On notera indifféremment le cardinal d'un ensemble A par

$$\operatorname{Card} A = \operatorname{card} A = \# A = |A| .$$

Le complémentaire d'une partie A dans un ensemble E sera noté ${}^cA$ ou $\overline{A}$.
On rappelle également que la notation $\coprod$ signifie "union disjointe", ce qui permet d'évaluer les cardinaux

$$\operatorname{Card} \coprod A_i = \sum \operatorname{Card} A_i .$$

1 Pour s'échauffer

Soit E un ensemble fini à n éléments. Trouver le nombre de couples (A, B) de parties de E recouvrant E.

Solution proposée.
Fixons une partie A. On veut ensuite une partie B telle que $A \cup B = E$. Cela signifie exactement que B s'écrit comme l'union ${}^cA \cup A'$ du complémentaire de A avec une partie A' de A (faire un dessin avec des patates...). Dénombrer les B qui nous intéressent revient donc à dénombrer les parties A' de A, ce qui se fait en $2^{|A|}$. Il reste à sommer en faisant varier la partie A fixée au départ. Pour cela, on fixe d'abord le cardinal k de la partie A (entre 0 et n), puis on choisit la partie A (ce qui ce fait en $\binom{n}{k}$ choix), et on somme le tout :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^k = 3^n .$$

De manière plus formelle, on écrirait

$$\begin{aligned}
\# \left\{ (A,B) \in \mathfrak{P}(E)^2 \ ; \ A \cup B = E \right\} &= \operatorname{Card} \coprod_{A \subset E} \left\{ (A,B) \in \mathfrak{P}(E)^2 \ ; \ A \cup B = E \right\} \\
&= \sum_{A \subset E} \operatorname{Card} \left\{ (A,B) \in \mathfrak{P}(E)^2 \ ; \ A \cup B = E \right\} \\
&= \sum_{A \subset E} \operatorname{Card} \{ B \subset E \, ; \, A \cup B = E \} \\
&= \sum_{A \subset E} \# \{ B = {}^cA \cup A' \, ; \, A' \subset A \} \\
&= \sum_{A \subset E} \# \{ A' \subset A \} \\
&= \sum_{A \subset E} 2^{|A|} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|A|=k} 2^{|A|} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \sum_{|A|=k} 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} \\
&= (2+1)^n = 3^n .
\end{aligned}$$

La réponse cherchée est donc 3^n.
Et c'est là que l'on se dit : "Je suis trop bête, il y avait plus simple !". En effet, un recouvrement par deux parties $A \cup B$ est exactement une union disjointe de trois parties $(A \backslash B) \amalg (A \cap B) \amalg (B \backslash A)$: pour la réciproque, associer à une partition (A', I, B') le couple $(A' \cup I, B' \cup I)$. On cherche donc le nombre de partitions de E en trois parties. Or, connaitre une partition de E en p parties revient à se donner pour chaque élément $x \in E$ un nombre entre 1 et p (le numéro de la partie dans laquelle se trouve x), *i. e.* une application de E dans $\{1, ..., p\}$, lesquelles sont en nombres $p^{|E|}$. On retrouve notre 3^n.

Remarque. De manière plus générale, se donner un recouvrement en p parts A_i revient à se donner une union disjointe de $2^p - 1$ parts : on récupère les parts formées des éléments appartenant à un A_i exactement (p

choix), puis à deux A_i exactement ($\frac{p(p-1)}{2}$ choix), etc., ce qui donne $\binom{p}{1}+...+\binom{p}{p}=2^p-1$ choix. Le lecteur soucieux de formalisation pourra considérer les applications

$$\begin{array}{ccc} (A_1,...,A_p) & \longmapsto & \left(\bigcap_{i\in I} A_i \Big\backslash \bigcup_{i\notin I} A_i\right)_{\emptyset\subsetneq I\subset[1,p]} \\ (B_I)_{\emptyset\subsetneq I\subset[1,p]} & \longmapsto & \left(\bigcup_{1\in I} B_I, \bigcup_{2\in I} B_I, ..., \bigcup_{p\in I} B_I\right) \end{array}$$

et montrer qu'elles sont réciproques (c'est un excellent exercice de théorie des ensembles).

2 De l'art de montrer des identités combinatoires

1. *Montrer (presque) sans calcul la formule du binôme :*

$$(a+b)^n=\sum_{p+q=n}\binom{n}{p}a^pb^q.$$

2. *Soient p,q,n des entiers naturels avec $n\leq p,q$. Montrer que*

$$\binom{p+q}{n}=\binom{p}{0}\binom{q}{n}+\binom{p}{1}\binom{q}{n-1}+...+\binom{p}{n-1}\binom{q}{1}+\binom{p}{0}\binom{q}{n}.$$

3. *Étant donnés des entiers naturels $n\geq p$, calculer*

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^p\binom{n}{p}.$$

Solution proposée.

1. Remarquons que l'identité à montrer est homogène en a et b. En traitant à part le cas trivial $a=0$ (le seul terme non nul dans la somme étant alors a^n), il suffit donc de montrer $(1+c)^n=\sum_{p=0}^n\binom{n}{p}c^p$ (on a posé $c:=\frac{b}{a}$). Or, lorsque l'on développe le produit

$$(1+c)^n=(1+c)(1+c)...(1+c),$$

on pioche un certain nombre p de termes c dans les facteurs $(1+c)$ et on pioche un 1 dans chacun des facteurs restant, d'où une contribution en c^p. On obtient donc une somme de la forme $\sum_{p=0}^n k_pc^p$ où k_p désigne le nombre de façons de choisir p termes c parmi les n facteurs $(1+c)$, *i. e.* $\binom{n}{p}$. Ploum.

2. Pour calculer $\binom{p+q}{n}$, on interprête en disant que choisir n nombres parmi $p+q$, c'est en choisir i parmi p et $n-i$ parmi q (avec i qui varie entre 0 et n), d'où une somme de $\binom{p}{i}\binom{q}{n-i}$ avec i qui varie là où il faut.

   Autre idée, basée sur le premier point : $\binom{p+q}{n}$ désigne le coefficient en x^n dans le polynôme $(1+x)^{p+q}=(1+x)^p(1+x)^q$. Il suffit de calculer le coefficient en x^n dans le produit de droite par un produit de Cauchy pour obtenir l'identité souhaitée.

3. Inspirons-nous de la solution précédente. On sait que le terme $(-1)^k\binom{n}{k}$ est le coefficient en x^k du polynôme $(1-x)^n$. Pour se ramener à un degré en x fixe, on multiplie par x^{n-k} ; ainis, la quantité cherchée est le coefficient en x^n dans le polynôme

$$\begin{aligned} & x^n(1-x)^n+x^{n-1}(1-x)^n+x^{n-2}(1-x)^n+...+x^{n-p}(1-x)^n \\ = & \left(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+...+x^{n-p}\right)(1-x)^n \\ = & \left(x^{n-p}-x^{n+1}\right)(1-x)^{n-1} \\ = & x^{n-p}(1-x)^{n-1}-x^{n+1}(1-x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Le second terme n'intervenant pas puisqu'il est de valuation $\geq n+1>n$, on veut le coefficient en x^p de $(1-x)^{n-1}$, *i. e.* $(-1)^p\binom{n-1}{p}$.

Remarquer que pour $p=n$ on trouve bien 0, ce qui était immédiat par le binôme :

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}=(1-1)^n=0.$$

3 Un peu de théorie extrémale des ensembles

Quel est le nombre maximal de parties de $E:=\{1,...,n\}$ *qui ont deux à deux une intersection non vide ?*

Solution proposée.
Testons les petites valeurs pour intuiter ce qui se passe. Pour $n=3$, les parties de $\{1,2,3\}$ sont

$$\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}.$$

En essayant de prendre des parties comme dans l'énoncé, on tombe sur les familles

$$\begin{array}{c}\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\\ \{2\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\\ \{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\end{array}$$

qui ont toutes 4 éléments. Une attention plus marquée montrera que chacune de ces familles a exactement un élément en commun. Ceci incite à considérer dans le cas général les parties contenant un élément fixé : il y en a 2^{n-1} puisque le choix des $n-1$ éléments restants est arbitraire. Observer dans notre exemple que $4=2^{3-1}$...

Si l'on essaie d'augmenter cette valeur, on se heurte à un mur. L'explication est simple : on ne peut pas prendre plus de 2^{n-1} parties ! Un argument pour monter cela consiste à dualiser : puisque 2^{n-1} est la moitié de 2^n, à chaque bonne configuration, on va associer une configuration duale en prenant les complémentaires, de sorte à prendre deux fois plus de place dans $\mathfrak{P}(E)$. Les hypothèses impliquent qu'aucune partie de la configuration duale ne se retrouve dans la configuration initiale (si ${}^cA_i=A_j$, alors $A_i\cap A_j=\emptyset$), donc on a bel et bien une copie de notre famille de parties dans $\mathfrak{P}(E)$. Si cette dernière est de cardinal p, on doit avoir $2p\leq 2^n$, *i. e.* $p\leq 2^{n-1}$, *CQFD.*

4 Sur les dérangements

On appelle *dérangement* toute permutation sans points fixes. On notera $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$ et D_n son cardinal.

Établir la formule de récurrence

$$D_{n+1}=n\left(D_n+D_{n-1}\right),$$

en déduire

$$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n,$$

puis dériver la valeur de D_n :

$$D_n=n!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-...+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Solution proposée.
On dénombre les dérangements de $\mathfrak{S}_{n+1}$ selon l'image i de $n+1$, laquelle se trouve être dans $\{1,...,n\}$ puisqu'un dérangement ne fixe pas $n+1$. Notons donc $\mathfrak{D}_{n+1}^i$ les dérangements qui envoient $n+1$ sur i.

L'idée pour récurrer est de retirer toute trace de $n+1$, ce qui se fait en oubliant les deux associations $(n+1,i)$ et $(a,n+1)$ où a désigne l'antécédent de $n+1$ (noter que $a\leq n$ vu que ne fixe pas $n+1$). Mais on ne peut quand même couper le $(n+1,i)$ comme ça, car il faut bien que nos permutations atteignent i ! On définit donc naturellement une application en coupant $(n+1,i)$ et en court-circuitant $(a,n+1)$ en (a,i) :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{D}_{n+1}^{i} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ \sigma & \longmapsto & k \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma(k) & \text{si} & k \neq a \\ i & \text{si} & k = a \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Il est légime de se demander si φ arrive toujours dans $\mathfrak{D}_n$ (afin de faire apparaître les termes de la récurrence) : en fait, non, on voit que ce sera le cas ssi $a \neq i$. On partitionne donc $\mathfrak{D}_{n+1}^{i}$ selon que l'antécédent a de $n+1$ vaut i ou pas. Notons $\mathfrak{D}_{n+1}^{i,i}$ et $\mathfrak{D}_{n+1}^{i,*}$ les ensembles respectivements associés (le second exposant précise l'antécédent de a).

Pour $a = i$, on coupe carrément les deux paires en $n+1$, et on remarque qu'un $\sigma \in \mathfrak{D}_{n+1}^{i,i}$ est entièrement déterminé par sa restriction à $\{1,...,n\} \setminus \{i\}$, laquelle décrit les dérangements de $\mathfrak{S}_{\{1,...,n\}\setminus\{i\}} \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$, d'où $\left|\mathfrak{D}_{n+1}^{i,a}\right| = D_{n-1}$.

Par ailleurs, il est aisé de voir que l'application φ induit une bijection de $\mathfrak{D}_{n+1}^{i,*}$ sur $\mathfrak{D}_n$: pour la réciproque, étant donné un $\tau \in \mathfrak{D}_n$, on commence par récupérer $a = \tau^{-1}(i)$, puis on définit $\sigma \in \mathfrak{D}_{n+1}^{i}$ par

$$\sigma(k) = \left\{ \begin{array}{ccc} \tau(k) & \text{si} & k \neq a, n+1 \\ n+1 & \text{si} & k = a \\ i & \text{si} & k = n+1 \end{array} \right. .$$

On en déduit l'égalité des cardinaux $\left|\mathfrak{D}_{n+1}^{i,*}\right| = D_n$.

Finalement, le cardinal de $\mathfrak{D}_{n+1}^{i}$ vaut $\left|\mathfrak{D}_{n+1}^{i,a}\right| + \left|\mathfrak{D}_{n+1}^{i,*}\right| = D_{n-1} + D_n$ pour tout i décrivant $\{1,...,n\}$, d'où

$$D_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \left|\mathfrak{D}_{n+1}^{i}\right| = n\left(D_{n-1} + D_n\right).$$

Supposons à présent la relation $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ vraie pour un $n \geq 2$ (elle l'est pour $n = 2$ vu que $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$). On en déduit

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= n\left(D_{n-1} + D_n\right) = nD_{n-1} + nD_n = \left(D_n - (-1)^n\right) + nD_n \\ &= (n+1) D_n + (-1)^{n+1} \text{, d'où la relation au rang } n+1. \end{aligned}$$

En divisant par $n!$, on obtient

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{D_{n-1}}{(n-1)!},$$

d'où l'expression voulue par une récurrence immédiate.

Remarque. On peut également résoudre cet exercice en passant par les séries génératrices exponentielles des D_n (*cf.* feuille sur les séries entières).

5 Inversion de Pascal et surjections

1. *Montrer la* formule d'inversion de Pascal *: si une suite (u_n) est déterminée à partir d'une autre suite (v_n) par la formule*

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} v_i,$$

alors les v_n s'expriment de manière analogue par

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k = \sum_{p+q=n} (-1)^p \binom{n}{p} u_q$$

(on a simplement "inversé" les places de u_n et v_n en rajoutant une correction $(-1)^k$).

2. *Retrouver le nombre D_n de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ en dénombrant les permutations selon le cardinal de leur support.*
3. *Exprimer le nombre $s_{a,b}$ de surjections de $\{1,...,a\}$ dans $\{1,...,b\}$.*

Solution proposée.

1. Un calcul brutal avec une bête interversion de $\sum$ suffit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}u_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}v_i\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{i}v_i\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{i}v_i\\ &= \sum_{i=0}^{n}v_i\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(n-k)!}{i!\,(n-k-i)!}.\end{aligned}$$

Comme on veut trouver v_n, il serait souhaitable que la somme $\sum_k$ à $i\neq n$ fixé soit nulle. On a du $(-1)^k$ et des choses qui ressemblent à du binomial, donc cela doit probablement se faire à coup de $\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n-i}{k}=0$. On oriente les calculs dans cette voie :

$$\begin{aligned}&= \sum_{i=0}^{n}v_i\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\frac{n!}{(n-i)!i!}\frac{(n-i)!}{k!\,(n-k-i)!}.\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}v_i\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n-i}{k}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}v_i\,(1-1)^{n-i}=\binom{n}{n}v_n=v_n.\end{aligned}$$

On peut aussi raisonner matriciellement. La relation de départ s'écrit

$$(u_0,u_1,...,u_n)=(v_0,v_1,...,v_n)\,P$$

pour un matrice triangulaire P bien choisie (prendre $p_{i,j}=\binom{j}{i}$ pour $0\leq i,j\leq n$), d'où v_n en inversant :

$$v_n=\left[uP^{-1}\right]_{1,n}=\sum_{i=0}^{n}u_i\left[P^{-1}\right]_{i,n}.$$

Pour calculer effectivement P^{-1}, on observera judicieusement que P est la matrice de passage de la base $\left(1,X,X^2,...,X^n\right)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\left(1,1+X,(1+X)^2,...,(1+X)^n\right)$ en vertu de l'identité

$$(1+X)^j=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}X^j.$$

Son inverse se calcule aisément en écrivant

$$X^k=(X+1-1)^k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}(X+1)^i\ ;$$

on obtient $\left[P^{-1}\right]_{i,k}=(-1)^{k-i}\binom{k}{i}$, d'où la formule souhaitée.

2. Pour les dérangements, en suivant l'énoncé, on voit que choisir une permutation de $\mathfrak{S}_n$ revient à choisir le cardinal k de son support dans $\{0,1,...,n\}$, les k éléments parmi n qui seront fixés, puis un dérangement des $n-k$ éléments restant, d'où $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} \overset{k \leftarrow n-k}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$. Pascal nous permet alors d'inverser

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k \implies D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

3. Revenons à nos surjections. Les v_n vont évidemment jouer les rôles des inconnues, donc vont compter des surjections. Essayons de partionner un ensemble de cardinal u_n à l'aide de surjections pour avoir une relation du genre $u_n = \sum (*) v_n$. Pour cela, on dénombre B^A selon le nombre de points atteints : on choisit le nombre i de points atteints (entre 1 et b), on choisit ces i points parmi b, puis on pioche une application surjective sur ces i points, d'où

$$b^a = \sum_{i=1}^{b} \binom{b}{i} s_{a,i}.$$

Il reste à appliquer l'inversion de Pascal aux suites $u_n = n^a$ et $v_n = s_{a,n}$. Pour être propre, on fait partir la somme de $i = 0$, ce qui suppose de parler de $s_{a,0}$; or, il est clair que $\emptyset^{\{1,\ldots,a\}}$ est vide pour $a \geq 1$, d'où $s_{a,0} = 0$ également. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} s_{a,b} &= \sum_{k=0}^{b} (-1)^{b-k} \binom{b}{k} k^a \\ &= b^a - \binom{b}{1} (b-1)^a + \binom{b}{2} (b-2)^a - \ldots + (-1)^{b-2} \binom{b}{2} 2^a + (-1)^{b-1} b. \end{aligned}$$

Remarque. Il est très frustrant de ne pas voir immédaitement pourquoi la somme ci-dessus est nulle pour $a < b$. En fait, c'est un fait général : si P est un polynôme à coefficients rationnels et à valeurs entières, alors on montre que

$$\forall b > \deg P, \ \sum_{k=0}^{b} (-1)^k \binom{b}{k} P(b-k) = 0$$

(pour le cas qui nous intéresse, prendre $P = X^a$).

Cela peut se faire en deux étapes. En définissant un opérateur de translation sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ par

$$\tau f(n) = f(n-1),$$

le binôme permet d'écrire

$$\sum_{k=0}^{b} (-1)^k \binom{b}{k} f(b-k) = (\mathrm{Id} - \tau)^b (f) = \delta^b f$$

où l'on a noté $\delta := \mathrm{Id} - \tau$. Ensuite, il est aisé de vérifier que si f est polynomiale de degré d, alors δf est polynomiale de degré $d-1$ (bien sûr, si f est constant, $\delta f = 0$), d'où $\delta^{\deg f + 1} f = 0$ et la formule souhaitée.

6 De la formule du crible

1. *Rédiger une preuve agréable de la formule du crible en utilisant les fonctions caractéristiques.*
2. *Donner une méthode originale du calcul de l'indicatrice d'Euler.*
3. *Retrouver le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments (cf. exercice 5). Si une infinité de personnes viennent assister à une réunion en laissant leur parapluie au vestiaire et repartent en en reprenant un au hasard, quel chance y a-t-il pour que personne ne récupère son parapluie ?*

4. *Dénombrer les surjections de $\{1,...,a\}$ vers $\{1,...,b\}$ où a et b sont des entiers naturels (on comparera avec l'exercice précédent).*

Solution proposée.

1. L'idée est de voir que le cardinal d'une partie A d'un ensemble fini E s'obtient par la formule

$$|A| = \sum_{x\in E} \chi_A(x).$$

Il est donc naturel de regarder $\chi_{A_1\cup...\cup A_n}$. Par commodité, on regarde plutôt

$$\begin{aligned}1-\chi_{A_1\cup...\cup A_n} &= \chi_{\overline{A_1\cup...\cup A_n}} = \chi_{\overline{A_1}\cap...\cap\overline{A_n}} = \chi_{\overline{A_1}}\times...\times\chi_{\overline{A_n}} = (1-\chi_{A_1})...(1-\chi_{A_n})\\ &= 1-\sum_{i=1,...,n}\chi_{A_i}+\sum_{i<j}\chi_{A_i}\chi_{A_j}-\sum_{i<j<k}\chi_{A_i}\chi_{A_j}\chi_{A_k}+...+(-1)^n\chi_{A_1}...\chi_{A_n},\end{aligned}$$

d'où

$$\chi_{A_1\cup...\cup A_n} = \sum_{1\le i\le n}\chi_{A_i} - \sum_{1\le i<j\le n}\chi_{A_i\cap A_j} + \sum_{1\le i<j<k\le n}\chi_{A_i\cap A_j\cap A_k}+...+(-1)^{n-1}\chi_{A_1\cap...A_n}.$$

En sommant sur tous les éléments de $A_1\cup...\cup A_n$, on a la formule désirée :

$$|A_1\cup...\cup A_n| = \sum_{i=1,...,n}|A_i| - \sum_{i<j}|A_i\cap A_j| + ... + (-1)^{n-1}|A_1\cap...\cap A_n|.$$

2. Soit $\prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ la décomposition d'un entier $n\ge 2$ en facteurs premiers. Rappelons que l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ compte le nombre d'entiers de $\{1,...,n\}$ premiers avec n.

Pour compter ces derniers, on va dénombrer leur complémentaire. Être premier avec n signifie être premier avec tous les p_i, donc ne pas être premier avec n signifie être un multiple d'un des p_i. Comme on ne s'intéresse qu'aux entiers compris entre 1 et n, les ensembles A_i des multiples de p_i qui sont $\le n$ ont pour réunion le complémentaire des nombres que l'on cherche à compter.

Il reste à appliquer la formule du crible. Observer d'une part que, être dans l'intersection de $A_{i_1}\cap...\cap A_{i_k}$ revient à être multiple de $p_{i_1}...p_{i_k}$ (et être $\le n$), d'autre part que que le nombre de multiples d'un entier a plus petits qu'un entier M est $\left\lfloor \frac{M}{a}\right\rfloor$ (un tel multiple s'écrit $ak\le M$ avec $1\le k\le\frac{M}{a}$). On peut donc écrire :

$$|A_1\cup...\cup A_r| = \sum_{i=1,...,r}\frac{n}{p_i} - \sum_{i<j}\frac{n}{p_ip_j}+...+(-1)^{r-1}\frac{n}{p_1...p_r},$$

d'où la formule recherchée

$$\varphi(n) = n\left(1-\sum_{i=1,...,r}\frac{1}{p_i}+\sum_{i<j}\frac{1}{p_ip_j}+...+(-1)^r\frac{1}{p_1...p_r}\right) = n\prod_{i=1}^r\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

3. On regarde $E=\{1,...,n\}$. Comme précédemment, on compte les dérangement selon leur complémentaire. En effet, ne pas être un dérangement revient à fixer un certain élément, donc en notant A_i les permutations fixant (au moins) le point i, on compte les éléments de $\mathfrak{S}_n$ privé de $A_1\cup...\cup A_n$.

Pour appliquer la formule du crible, on observe que être dans $A_{i_1}\cap...\cap A_{i_k}$ revient à fixer les k points $i_1,...,i_k$, ce qui laisse le choix pour permuter les $n-k$ points restants, d'où $|A_{i_1}\cap...\cap A_{i_k}| = (n-k)!$. Cela fournit

$$\begin{aligned}|A_1\cup...\cup A_n| &= \sum_{i=1,...,n}(n-1)! - \sum_{i<j}(n-2)!+...+(-1)^{n-1}\\ &= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)!+...+\binom{n}{n}(-1)^{n-1}\\ &= \frac{n!}{1!}-\frac{n!}{2!}+...+(-1)^{n-1}\frac{n!}{n!},\end{aligned}$$

d'où le nombre de dérangements

$$D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

On en déduit la probabilité pour qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ prise au hasard soit un dérangement :

$$p_n = \frac{D_n}{|\mathfrak{S}_n|} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

On reconnaît le développement tronqué de $\exp(-1)$, d'où la probabilité pour qu'aucun membre de notre infinité de personnes ne remparte avec son parapluie :

$$\lim p_n = \frac{1}{e} \simeq 0,368.$$

4. Toujours comme précédement, ne pas être surjective revient à ne pas atteindre un point i dans $\{1, ..., b\}$, d'où un ensemble A_i associé. Ensuite, être dans $A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}$ revient à ne pas atteindre les k points $i_1, ..., i_k$, ce qui fait $b - k$ choix pour chacun des a points au départ. Il en résulte

$$|A_1 \cup ... \cup A_b| = \sum_{i=1,...,n} (b-1)^a - \sum_{i<j} (b-2)^a + ... + (-1)^{b-1} (b-b)^a,$$

d'où le nombre de surjections de $\{1, ..., a\}$ dans $\{1, ..., b\}$:

$$s_{a,b} := b^a - \binom{b}{1}(b-1)^a + \binom{b}{2}(b-2)^a - ... + (-1)^b \binom{b}{b}(b-b)^a.$$

7 Des p'tits pions, des p'tits pions...

Soit un échiquier de taille 1985 *impaire. On dispose des pions identiques sur les cases de l'échiquier, éventuellement plusieurs pions sur une même case.*

Trouver le plus petit nombre possible de pions mis sur l'échiquier telle que la propriété suivante soit vérifiée : pour toute case vide (i, j)*, le nombre de pions sur la* i*-ième ligne ou la* j*-ième colonne vaut au moins* 1985*.*

Solution proposée.

Évidemment 1985 ne joue aucun rôle précis, c'est juste l'année de naissance de celui que vous lisez ;-).

Prenons plutôt une arête a complètement quelconque – néanmoins entière... – et soit p le nombre de pions d'une configuration satisfaisant la propriété de l'énoncé. On va chercher à minorer p puis à montrer que l'inégalité obtenue est optimale (*i. e.* que le cas d'égalité est atteint).

En notant l_i le nombre de pions sur la i-ième ligne et c_j le nombre de pions sur la j-ième colonne, on a par hypothèse

$$a \leq l_i + c_j \text{ pour toute case vide } (i, j).$$

On somme ces inégalités :

$$\#\{\text{cases vides}\}\, a \leq \sum_{(i,j) \text{ case vide}} l_i + c_j.$$

La quantité de droite compte avec multiplicité les couples (pion, case vide) qui sont sur une même ligne ou colonne (en fixant la case vide). En fixant cette fois le pion (on intervertit deux signes $\sum$ sans le dire), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \text{ case vide}} l_i + c_j &= \sum_{(i,j) \text{ pion}} \#\{\text{cases vides } (i, j') \text{ ou } (i', j)\} \\
&= \sum_{(i,j) \text{ pion}} (a - l_i) + (a - c_j) \\
&= 2ap - \sum_{i=1,...,a} \sum_{(i,j) \text{ pion}} l_i - \sum_{j=1,...,a} \sum_{(i,j) \text{ pion}} c_j \\
&= 2ap - \sum_{i=1,...,a} l_i \sum_{(i,j) \text{ pion}} 1 - \sum_{j=1,...,a} c_j \sum_{(i,j) \text{ pion}} 1 \\
&= 2ap - \sum_{i=1,...,a} l_i^2 - \sum_{j=1,...,a} c_j^2.
\end{aligned}$$

On veut une majoration, donc il faut minorer $\sum l_i^2$, ce que l'on fait par Cauchy-Schwarz (ici l'inégalité arithmético-quadratique suffit). Cela tombe bien : $\sum l_i$ et $\sum c_j$ comptent exactement le nombre de pions !

$$\begin{aligned} 2ap - \sum_{i=1,\dots,a} l_i^2 - \sum_{j=1,\dots,a} c_j^2 &\leq 2ap - \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1,\dots,a} l_i\right)^2 - \frac{1}{a}\left(\sum_{j=1,\dots,a} c_j\right)^2 \\ &= 2ap - \frac{1}{a}p^2 - \frac{1}{a}p^2. \end{aligned}$$

On en déduit les inégalités

$$\begin{aligned} \#\{\text{cases vides}\}\, a &\leq 2ap - \frac{1}{a}p^2 - \frac{1}{a}p^2 \\ \left(a^2 - p\right) a^2 &\leq 2a^2p - 2p^2 \\ a^4 - 3pa^2 + 2p^2 &\leq 0 \\ \left(a^2 - p\right)\left(a^2 - 2p\right) &\leq 0. \end{aligned}$$

On a donc le choix entre les conditions $\begin{cases} a^2 - p \geq 0 \\ a^2 - 2p \leq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a^2 - p \leq 0 \\ a^2 - 2p \geq 0 \end{cases}$, *i. e.* $\frac{a^2}{2} \leq p \leq a^2$ ou $a^2 \leq p \leq \frac{a^2}{2}$; on peut raisonnablement rejeter le second cas (sinon $a = 0$), d'où la minoration souhaitée

$$p \geq \left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil.$$

Il s'agit à présent de trouver une configuration vérifiant le cas d'égalité. Si cela est possible, les l_i d'une part et les c_j d'autre part doivent être tous égaux (cas d'égalité pour la moyenne arithmético-quadratique). Par ailleurs, les sommes $\sum l_i$ et $\sum c_j$ sont égales à p, donc ces deux valeurs communes doivent coïncider et valoir $\frac{p}{a}$. Mais il faut également le cas d'égalité dans la propriété de l'énoncé qui impose $l_i + c_j = a$, d'où $\frac{p}{a} + \frac{p}{a} = a$ et $p = \frac{a^2}{2}$ (ce que l'on peut lire dans la dernière égalité centrée). On consate avec horreur que $a = 1985$ est impair...

Essayons d'y remédier en collant au plus près du cas d'égalité analysé ci-dessus. En posant $a = 2b + 1$, on dispose les pions selon deux carrés $b \times b$ et $(b+1) \times (b+1)$ avec un pion par case :

$$\boxed{\begin{array}{cc} b \times b & \text{vide} \\ \text{vide} & (b+1) \times (b+1) \end{array}}.$$

On a bien $l_i + b_j = 2b + 1$ pour tout case vide comme souhaité. De plus, le nombre de pions est $b^2 + (b+1)^2$, et nous aimerions en avoir

$$\left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{4b^2 + 4b + 1}{2} \right\rceil = 2b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2 + b^2 \text{ : magnifique !}$$

Remarque. On peut reformuler cet énoncé en termes purement matriciels :

Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ vérifiant

$$a_{i,j} = 0 \implies \sum_{l=1,\dots,n} a_{i,l} + \sum_{k=1,\dots,n} a_{k,j} \geq n.$$

Montrer que $\sum_{i,j} a_{i,j} \geq \frac{n^2}{2}$.

On propose une autre solution à cet excercice, à mon goût bien plus jolie et méritoire, mais qui nécessite une succession de remarques pertinentes.

Déjà, pour minorer la somme $\sum_{i,j} a_{i,j}$, on va la "développer" selon une ligne ou une colonne où il y a beaucoup de zéros, ce afin d'utiliser au maximum l'hypothèse de minoration. On est ainsi amené à considérer une ligne/colonne dont la somme S des termes est minimale. L'hypothèse de travail se conservant par transposition de la matrice et par échange de lignes, on peut supposer que $S := \sum_{j=1,\dots,n} a_{1,j}$ est minimale sur la première ligne.

Maintenant, soit Z (comme "**z**éro") les indices des colonnes correspondant aux termes $a_{1,j}$ nuls, et soit z son cardinal. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} a_{i,j} &= \sum_{j\in Z} \underbrace{\sum_{i=1,\ldots,n} a_{i,j}}_{\text{ici, } a_{1,j}=0} + \sum_{j\notin Z} \sum_{i=1,\ldots,n} a_{i,j} \\ &\geq \sum_{j\in Z} \left(n - \sum_{k=1,\ldots,n} a_{1,k}\right) + \sum_{j\notin Z} S \\ &= \sum_{j\in Z} (n-S) + (n-z)\, S \\ &= z\,(n-S) + (n-z)\, S.\end{aligned}$$

On veut comparer à $\frac{n^2}{2}$, alors on fait apparaître ce dernier :

$$\begin{aligned} z\,(n-S) + (n-z)\, S &= \frac{n^2}{2} + zn - 2zS + nS - \frac{n^2}{2} \\ &= \frac{n^2}{2} + \left(z - \frac{n}{2}\right)(n-2S)\,. \end{aligned}$$

Le résultat sera donc prouvé si $\left(z - \frac{n}{2}\right)(n-2S)$ sont de même signe. Or, si $n - 2S \leq 0$, le résultat tombe sans effort vu que les n lignes auront pour somme $\sum_j a_{i,j} \geq S \geq \frac{n}{2}$. Dans le cas contraire, on $S < \frac{n}{2}$ et l'on veut $z \geq \frac{n}{2}$. Mais A est à coefficients entiers (on ne l'a pas encore utilisé), donc ses coefficients non nuls sont ≥ 1 (on est dans $\mathbb{N}$!), d'où

$$S = \sum_{j\notin Z} a_{1,j} \geq \sum_{j\notin Z} 1 = n - z.$$

On en déduit $z \geq n - S > \frac{n}{2}$ comme souhaité.

8 Nombre total d'inversions dans $\mathfrak{S}_n$

Étant donnée un permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $I(\sigma)$ son nombre d'inversions, *i. e.* le nombre de couples (i,j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

En notant $I_n := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ le nombre total d'inversions dans $\mathfrak{S}_n$, montrer l'identité combinatoire

$$I_n = nI_{n-1} + n!\frac{n-1}{2}$$

et en déduire la valeur de I_n. Interpréter.

Solution proposée.

L'identité souhaitée appelle clairement à un raisonnement par récurrence. Pour pouvoir bien contrôler les inversions d'une permutation privée d'un point, on va privilégier le point d'image n (car ce dernier est plus grand que tous les autres). Soit donc $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $k := \sigma^{-1}(n)$. On associe naturellement une permutation $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}$ en retirant la correspondance (k,n) :

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i < k \\ \sigma(i+1) & \text{si } i \geq k \end{cases}.$$

À k fixé, il clair que choisir σ envoyant k sur n revient à se donner un $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}$. Pour comparer les inversions, on remarque que σ a exactement $n-k$ inversions en plus que σ', celles induites par les couples (k,i) pour $i > k$ (les couples où n'intervient pas k gardent les mêmes inversions). En sommant à k constant, il en résulte

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} I(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma(k)=n} I(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_{n-1}} \left(I(\sigma') + n - k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_{n-1}} I(\sigma') + \sum_{k=1}^{n} (n-k) \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_{n-1}} 1 = I_{n-1} \sum_{k=1}^{n} 1 + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= nI_{n-1} + (n-1)!\frac{n(n-1)}{2} = nI_{n-1} + n!\frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Pour obtenir la valeur de I_n, on rend la formule de récurrence plus jolie :

$$\frac{I_n}{n!} = \frac{n-1}{2} + \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} = ... = \frac{(n-1)+(n-2)+...+1}{2} + \underbrace{\frac{I_1}{1!}}_{=0} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

Le nombre moyen d'inversions est donc $\frac{n(n-1)}{4}$, qui est exactement la moitié du nombre couples $(i < j)$ considérés. Cela traduit le fait qu'une permutation prise au hasard inverse en moyenne la moitié de ses éléments.

9 Une identité combinatoire (tirée du Concours Général)

On demande de montrer l'identité suivante où a et b sont des entiers positifs :

$$\sum_{0\leq i\leq a} \frac{1}{2^{b+i}}\binom{b+i}{i} + \sum_{0\leq i\leq b} \frac{1}{2^{a+i}}\binom{a+i}{i} = 2.$$

Solution proposée.

• Multiplions l'identité voulue par 2^{a+b} pour n'avoir que des entiers, et opérons une réindexation pour rendre les choses plus jolies :

$$\begin{aligned}
2^{a+b+1} &\overset{?}{=} \sum_{0\leq i\leq a} 2^{a-i}\binom{b+i}{i} + \sum_{0\leq i\leq b} 2^{b-i}\binom{a+i}{i} \\
&\overset{?}{=} \sum_{0\leq i\leq a} 2^{i}\binom{a+b-i}{a-i} + \sum_{0\leq i\leq b} 2^{i}\binom{a+b-i}{b-i} \\
&\overset{?}{=} \sum_{0\leq i\leq a} 2^{i}\binom{a+b-i}{b} + \sum_{0\leq i\leq b} 2^{i}\binom{a+b-i}{a}.
\end{aligned}$$

Le terme de gauche s'interprête comme le cardinal de $\{0,1\}^{a+b+1}$. On va donc partitionner ce dernier en deux ensembles dont les cardinaux seront les deux termes de droite. Pour cela, cherchons un interprétation combinatoire de $\sum_{0\leq i\leq a} 2^i\binom{n-i}{b}$ où l'on a noté $n := a+b$ par commodité.

À i fixé, on interprète le $2^i\binom{n-i}{b}$ comme le choix libre des bits de i éléments (c'est le 2^i) et le choix de b éléments parmi $n-i$ éléments (le $\binom{n-i}{b}$) dont les bits seront imposés. En marquant la $(n-i)$-ième coordonnée d'un $(n+1)$-uplet de $\{0,1\}^{\{0,1,...,n\}}$, il s'agit donc d'**imposer** la valeur commune de b bits **avant** cette marque (les autres bits avant étant alors déterminés par complémentaire) et de **laisser libre** les i bits **après** cette marque. Notre terme $2^i\binom{n-i}{b}$ compte par conséquent le nombre de n-uplets ayant au moins $b+1$ bits nuls, le $(b+1)$-ième étant situé à la place $n-i$. En sommant sur tous les i, on trouve tous les $(n+1)$-uplets dont au moins $b+1$ bits sont nuls.

En remarquant qu'un $(n+1)$-uplet a nécessairement au moins $a+1$ ou $b+1$ bits nuls, ces cas étant en outre exclusifs, on a notre partition recherchée. Ploum.

10 Et on permute...

Soit $n > 1$ un entier impair et $a_1, ..., a_n$ des entiers donnés. À toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on associe la quantité

$$S(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma(i).$$

Montrer qu'il y a deux permutations distinctes σ et τ telles que $n!$ divise la différence $S(\sigma) - S(\tau)$.

Solution proposée.

Supposons par l'absurde que les restes modulo $n!$ des $S(\sigma)$ soient tous distincts lorsque σ décrit $\mathfrak{S}_n$. En particulier, l'ensemble de ces restes est précisément $\{1, ..., n!\}$, d'où (modulo $n!$)

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} S(\sigma) \equiv \sum_{k=1}^{n!} k = \frac{n!(n!+1)}{2}.$$

Par ailleurs, cette même somme vaut

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sum_{i=1}^{n} a_i\sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma(i).$$

Il s'agit de voir quelles valeurs peut prendre l'image d'un point i donné par un σ décrivant $\mathfrak{S}_n$. On peut toujours compter σ selon l'image de ce point : il y en a $(n-1)!$ car σ induit une permutation sur les $(n-1)$ points restant. Ceci montre que

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma(i) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma(i)=k} \sigma(i) = \sum_{\sigma(i)=k} \sum_{k=1}^{n} k = (n-1)!(1+2+..+n) = (n-1)!\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)!}{2}.$$

En notant A la somme des a_i, on dispose par conséquent d'un certain multiple de $n!$:

$$\frac{n!(n!+1)}{2} - \frac{(n+1)!}{2}A = kn!$$

Mais en simplifiant par $\frac{n!}{2}$ on doit avoir

$$n!+1 = 2k + (n+1)A,$$

ce qui contredit l'imparité de n.

11 Nombre total de point fixes dans $\mathfrak{S}_n$

En notant $\operatorname{Fix} f$ *l'ensemble des points fixes d'une application* f*, montrer l'identité*

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} |\operatorname{Fix}\sigma| = n!.$$

Solution proposée.

La quantité de gauche compte le nombre total de points fixes dans $\mathfrak{S}_n$ en raisonnant à permutation fixée. On peut tout aussi bien raisonner à nombre de points fixes donné : en introduisant $p_n(k)$ le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant exactement k points fixes, une interversion de signes $\sum$ donne

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} |\operatorname{Fix}\sigma| = \sum_{k=0}^{n} kp_n(k).$$

Pour obtenir une permutation fixant k points, on choisit ces k points puis on dérange les $n-k$ points restants, d'où

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p_{n-k}(0).$$

En multipliant par k, on peut se débarasser d'une dépendance en k en écrivant subtilement

$$kp_n(k) = n\binom{n-1}{k-1} p_{(n-1)-(k-1)}(0) = np_{n-1}(k-1).$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^{n} kp_n(k) = n\sum_{k=1}^{n} p_{n-1}(k-1) = n\sum_{i=0}^{n-1} p_{n-1}(i).$$

La somme $\sum_{i=0}^{n-1} p_{n-1}(i)$ comptant les permutations de $\mathfrak{S}_{n-1}$ selon leur nombre de points fixes, elle vaut $(n-1)!$, d'où le résultat.

Remarques. Le nombre moyen de points fixes valant 1, une permutation prise au hasard fixera en moyenne un point exactement.

Le lecteur connaissant les actions de groupes pourra prendre un peu de recul sur cet exercice et le voir comme une simple application de la formule de Burnside, qui s'obtient en comptant les couples (g, x) tels que $g \cdot x = x$, d'une part selon g, d'autre part selon x :

$$\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}\, g| = |G| \left| {}^{X}\!/_{G} \right|.$$

Ici, le groupe $G = \mathfrak{S}_n$ agit sur $X = \{1, ..., n\}$ de façon transitive ; le quotient ${}^{X}\!/_{G}$ ne contient donc qu'une seule orbite, d'où le résultat.

12 Sur les partitions d'entiers

Étant donnés deux entiers $n \geq 0$ et $0 \geq 1$, on appelle *partition* de n en p parts la donnée d'un p-uplet $\overrightarrow{n} \in \mathbb{N}^p$ telle que $n_1 + ... + n_p = n$.

On souhaite dénombrer les partitions d'un entier n donné à nombre de parts fixé. Notons $\Pi_n(p)$ leur ensemble et $\pi_n(p)$ leur nombre.

On appellera *sous-partition* d'un entier n en p parts tout p-uplet $\overrightarrow{n} \in \mathbb{N}^p$ tel que $n_1 + ... + n_p < n$. Leur ensemble sera noté $\Pi_n^-(p)$ et son cardinal $\pi_n^-(p)$.

Noter que $\Pi_n^-(0)$ est bien défini pour tout $n \geq 0$ et ne contient que le 0-uplet vide, d'où $\pi_n^-(0) = 1$. De même, le nombre $\pi_n(0)$ est nul sauf pour $n = 0$ auquel cas $\pi_0(0) = 1$.

1. *Donner une relation entre π_n, π_n^- et π_{n-1}^- pour $n \geq 1$.*
2. *Montrer que $\pi_n(p) = \pi_n^-(p-1)$ pour tout $p \geq 1$.*
3. *Intuiter et trouver $\pi_n^-(p)$.*
4. *En déduire $\pi_n(p)$, puis le nombre $\pi_n^*(p)$ de partitions à p parts **non nulles**.*
5. *Retrouver le résultat précédent par un argument direct de dénombrement.*
6. *En déduire l'identité*
$$\binom{n+p-1}{n} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n-1}{n-k}.$$

Solution proposée.

1. La condition $\sum n_i \leq n$ est équivalente à la disjonction des deux conditions (disjointes) $\sum n_i = n$ ou $\sum n_i \leq n-1$, ce qui s'écrit (en passant aux cardinaux)
$$\pi_n^- = \pi_n + \pi_{n-1}^- \text{ (pour tout } n \geq 1).$$
2. Il s'agit mettre en bijection $\Pi_n(p)$ avec $\Pi_n^-(p-1)$, *i. e.* de relier un p-uplet de somme n à un $(p-1)$-uplet de somme $\leq n$. On rajoute tout simplement le complémentaire à n, ce qui définit une application
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \Pi_n^-(p-1) & \longrightarrow & \Pi_n(p) \\ (n_1, ..., n_{p-1}) & \longmapsto & (n_1, ..., n_{p-1}, n - n_1 - ... - n_{p-1}) \end{array} \right. .$$
f est clairement bien définie et injective, tandis que toute partition $\overrightarrow{n}$ de $\Pi_n(p)$ est l'image de sa restriction à ses $p-1$ premiers termes, ce qui montre la surjectivité de f. Finalement f est bijective, d'où le résultat sur les cardinaux.

3. Les deux questions précédentes permettent d'écrire

$$\pi_n^-(p) = \pi_n^-(p-1) + \pi_{n-1}^-(p)$$

Cette relation de récurrence, valable pour tous $n, p \geq 1$, est suffisante pour déterminer $\pi_n^-(p)$, sachant que les premiers termes s'obtiennent aisément :

$$\pi_0^-(p) = 1 \text{ et } \pi_n^-(0) = 1.$$

Pour intuiter $\pi_n^-(p)$, on voit que la relation de récurrence ressemble à celle du triangle de Pascal. Essayer $\pi_n^-(p) = \binom{n}{p}$ serait trop simple ; en revanche, en cherchant un peu, on constate que $\pi_n^-(p) = \binom{n+p}{p}$ fonctionne :

$$\binom{n+(p-1)}{(p-1)} + \binom{(n-1)+p}{p} = \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p}{p}.$$

Comme d'autre part ce binomial coïncide avec $\pi_n^-(p)$ sur les valeurs initiales p ou $n=0$, on a gagné :

$$\pi_n^-(p) = \binom{n+p}{p}.$$

4. Finalement, on trouve le nombre de partitions à nombre de parts $p \geq 1$ fixé :

$$\pi_n(p) = \pi_n^-(p-1) = \binom{n+p-1}{p-1} = \binom{n+p-1}{n},$$

formule qui reste valable pour $p = 0$.

Pour passer d'une partition en parts > 0 à une partition à parts ≥ 0, on retire 1 à toutes les parts. On obtient ainsi une bijection entre $\Pi_n^*(p)$ et $\Pi_{n-p}(p)$, d'où

$$\pi_n^*(p) = \pi_{n-p}(p) = \binom{n-1}{p-1}.$$

5. Pour retrouver la formule qui précède, on peut remarquer qu'une partition d'un paquets de n bâtons alignés en p paquets non vides revient à marquer les derniers bâtons de chaque part sauf la dernière (on sait bien qui est le dernier bâton). Formellement, cela se traduit par la bijection

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Pi_n^*(p) & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} (p-1)\text{-uplets strictement croissants} \\ \text{à valeurs dans } \{1, ..., n-1\} \end{array} \right\} \\ (n_1, ..., n_p) & \longmapsto & (n_1, n_1+n_2, n_1+n_2+n_3, ..., n_1+...+n_{p-1}) \end{array} \right.$$

(c'est la condition $n_p \geq 1$ qui permet de majorer à l'arrivée par $n-1$) d'inverse

$$(k_1, ..., k_{p-1}) \longmapsto (k_1, k_2-k_1, k_3-k_2, ..., k_{p-1}-k_{p-2}, n-k_{p-1}).$$

Maintenant, les x-uplets strictement croissants sont en bijection avec les parties à x éléments, d'où le résultat.

6. Une partition de n en p parts s'obtient en choisissant un certain nombre k de zéros parmi les p parts, la place de ces zéros dans la partition, puis une partition de n en $p-k$ parts non nulles. On en déduit la formule

$$\pi_n(p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \pi_n^*(p-k) \overset{k \leftarrow p-k}{=} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \pi_n^*(k), \textit{ CQFD.}$$

Remarque. Pour le pendant "séries génératrices" de cet exercice, on se reportera à la feuille des séries entières. La digression ci-dessous devrait (on l'espère) éclairer l'intervention de cet outil analytique.

Digresssion.
Le lecteur ne doit pas se leurrer : la question de connaître le nombre de partitions d'un entier donné n'est pas si simple. Dans notre démarche, nous avons en effet compté avec ordre, répétant ainsi des partitions comme $1+1+2 = 2+1+1$ que l'on n'a pas envie de différencier.

Pour éviter ces répétitions, la bonne définition d'une partition en p parts est celle d'un p-uplets **monotone**. On le représente généralement sous la forme d'un *tableau de Young*, par exemple

$$\begin{array}{llllll} \blacksquare & & & & & \\ \blacksquare & & & & & \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & & & \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{array} \qquad \text{pour } 4+2+2+1+1+1=13.$$

Les symétries des tableaux de Young amènent à de nombreuses identités combinatoires sur les partitions. Par exemples, en exploitant la symétrie par rapport à la "diagonale", on voit que le nombre de partitions en moins de p parts est le même que celui des partitions en parts toutes $\leq p$.

Pour faire le lien avec les séries génératrices, en notant p_n le nombre de partitions de n en parts non nulles croissantes, il est aisé de voir que p_n est le coefficient du développement en série entière du produit infini $\frac{1}{\prod_1^\infty (1-x^i)}$. En effet, lorsque l'on développe le produit

$$\sum_{k_1 \geq 0} x^{k_1} \sum_{k_2 \geq 0} x^{2k_2} \sum_{k_3 \geq 0} x^{3k_3} ...,$$

pour former un x^n, on va piocher un x^{ik_i} dans chaque facteur, ce qui forme un x puissance

$$k_1 + k_2 2 + k_3 3 + ... = n,$$

i. e. une partition de n, où la part i apparaît k_i fois.

Il y a bien sûr des variantes. Si l'on veut utiliser des parts bornées par p, on développera plutôt $\frac{1}{\prod_1^p (1-x^i)}$, qui correspond aussi aux partitions en moins de p parts d'après la remarque sur la symétrie diagonale des tableaux de Young. De même, les partitions en parts impaires sont comptées par $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)...}$, tandis que les partitions en parts toutes distinctes sont codées par le produit $(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)...$ Si le lecteur a suivi jusqu'ici, il pourra se rendre compte que les deux séries précédentes sont égales en calculant le quotient des deux :

$$\begin{aligned} & (1-x)\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right) ... \times (1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right) ... \\ = \quad & (1-x) \prod_{n \geq 0} \left(1+x^{2^n}\right) \times \left(1-x^3\right) \prod_{n \geq 0} \left(1+x^{2^n 3}\right) \times \left(1-x^3\right) \prod_{n \geq 0} \left(1+x^{2^n 5}\right) \times ... \end{aligned}$$

En effet, chacun des facteurs $(1-y) \prod_{n \geq 0} \left(1+y^{2^n}\right)$ se "télescoscope" selon

$$\begin{aligned} (1-y)(1+y) \prod_{n \geq 1} \left(1+y^{2^n}\right) & = \left(1-y^2\right) \prod_{n \geq 1} \left(1+y^{2^n}\right) = \left(1-y^2\right)\left(1+y^2\right) \prod_{n \geq 2} \left(1+y^{2^n}\right) \\ & = \left(1-y^4\right) \prod_{n \geq 2} \left(1+y^{2^n}\right) = ... = 1. \end{aligned}$$

Nous espérons que le lecteur aura été convaincu de la puissance du calcul formel pour faire de la combinatoire, et *surtout* (même si c'est dire la même chose) que les calculs ne sont qu'au fond une simple histoire de combinatoire.

13 Cardinal de $SO_2(\mathbb{F}_p)$

Étant donné un premier p, dénombrer les matrices de $SO_2(\mathbb{F}_p)$ où $\mathbb{F}_p$ désigne le corps à p éléments.

Solution proposée.

Une matrice de rotation s'écrit $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2=1$, de sorte que l'on cherche le cardinal de l'ensemble

$$\left\{(a,b) \in \mathbb{F}_p^2 \ ; \ a^2+b^2=1\right\}$$

que l'on a envie d'appeler "cercle".

Dans le cas réel, on peut paramétrer le cercle à l'aide des fonctions trigonométriques, ce qui ne sera pas très utile ici (quel sens donner à $\cos x$ pour x élément d'un corps quelconque autre que $\mathbb{C}$?). On pense plutôt au paramétrage rationnel valable dans tout corps

$$a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } b = \frac{2t}{1+t^2}$$

qui décrit bijectivement (dans le cas réel) le cercle privé du point -1. Il s'agit de voir, pour le corps $\mathbb{F}_p$, si ce paramétrage reste bijectif (pour pouvoir dénombrer). On voit (en regardant le dénominateur) que le caractère quadratique de -1 va jouer un rôle.

Le cas $p = 2$ est trivial : le cercle est réduit aux deux points $(0, 1)$ et $(1, 0)$. On regarde à présent le cas d'un premier p impair.

Si -1 n'est pas un carré, on vérifie que le paramétrage est bien injectif d'image le cercle privé de $(-1, 0)$. Partir de $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ amène à $t^2 = u^2$, d'où, en réinjectant dans $\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2u}{1+t^2}$, l'égalité $2t = 2u$. Puisque la caractéristique p est impaire, 2 est inversible, d'où l'injectivité recherchée. Pour la surjectivité, on cherche à atteindre un point $(a, b) \neq (-1, 0)$. La condition sur l'abscisse s'écrit

$$a = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{ } i. \text{ } e. \text{ } t^2 = \frac{1-a}{1+a} \text{ (possible car } a \neq -1).$$

On réinjecte dans la condition sur l'ordonnée, d'où

$$b = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2t}{\frac{2}{1+a}}, \text{ } i. \text{ } e. \text{ } t = \frac{b}{1+a}.$$

On vérifie que cette valeur (nécessaire) de t fonctionne, utilisant la condition $a^2 + b^2 = 1$: on calcule déjà

$$\begin{aligned} 1 + t^2 &= \frac{\left(1 + 2a + a^2\right) + b^2}{(1+a)^2} = \frac{1 + 2a + 1}{(1+a)^2} = \frac{2}{1+a} \text{ et} \\ 1 - t^2 &= \frac{\left(1 + 2a + a^2\right) - b^2}{(1+a)^2} = \frac{a^2 + 2a + a^2}{(1+a)^2} = \frac{2a}{1+a}, \end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = a \text{ et } \frac{2t}{1+t^2} = \frac{\frac{2b}{1+a}}{\frac{2}{1+a}} = b.$$

Il en résulte que le cercle contient $p + 1$ points (on a rajouté le point -1 manquant)

Si -1 est un carré, notons $\pm i$ ses deux racines (qui sont bien distinctes vu que $2 \neq 0$). On considère le même paramétrage définie sur $\mathbb{F}_p$ privé de $\pm i$, qui reste bien sûr injectif. Mais l'analyse montre qu'il reste également surjectif, vu que le paramètre vérifie $t^2 = \frac{1-a}{1+a} \neq -1$. Finalement, on trouve $(p - 2) + 1$ élements sur le cercle.

Pour écrire de manière plus synthétique, pour p impair, on sait que -1 est un carré ssi $p \equiv 1$ modulo 4, d'où

$$\#SO_2(\mathbb{F}_p) = p + (-1)^{\frac{p+1}{2}} = \begin{cases} p & \text{si} \quad p \equiv 0 \ [4] \\ p - 1 & \text{si} \quad p \equiv 1 \ [4] \\ p + 1 & \text{si} \quad p \equiv -1 \ [4] \end{cases}.$$

14 Cardinal de GL_n et nombre d'involutions de M_n

Dénombrer le groupe linéaire sur un corps fini K à q éléments.

Trouver le nombre de matrices A à coefficients dans K telles que $A^2 = \mathrm{Id}$. *On supposera K de caractéristique différente de 2.*

Solution proposée.

• Compter les isomorphismes de K^n revient à compter les bases de K^n (les faire agir sur une base fixée). On a $q^n - 1$ choix pour le premier vecteur de base (il doit être non nul), ensuite on doit choisir un vecteur en dehors de la droite engendrée par le premier, ce qui fait $q^n - q$ choix, puis $q^n - q^2$, et ainsi de suite :

$$\begin{aligned} |GL_n(K)| &= (q^n - 1)(q^n - q) \ldots \left(q^n - q^{n-1}\right) \\ &= q^{0+1+\ldots+(n-1)} (q^n - 1)\left(q^{n-1} - 1\right) \ldots (q - 1) \\ &= q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1)\left(q^{n-1} - 1\right) \ldots (q - 1). \end{aligned}$$

• Une telle matrice est une symétrie par rapport à un espace parallèlement à un supplémentaire[1]. Observer que la donnée d'un couple (V, W) de sev supplémentaires donne en retour un involution : prendre Id sur V et $-\operatorname{Id}$ sur W. Le problème revient à dénombrer les tels couples.

Observons que tout tel couple (V, W) peut être obtenu en envoyant les $\dim V$ premiers vecteurs de la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de K^n sur une base de V et les autres sur une base de W, ce procédé étant en fait l'action d'un isomorphisme. On regarde donc naturellement l'application surjective (à d fixé)

$$\left\{ \begin{array}{ccc} GL_n & \longrightarrow & \{(V,W)\ ;\ V \oplus W = K^n \text{ et } \dim V = d\} \\ g & \longmapsto & (Kg(e_1) \oplus ... \oplus Kg(e_d), Kg(e_{d+1}) \oplus ... \oplus Kg(e_n)) \end{array} \right.$$

dont on cherche le cardinal de l'image. Pour cela, on regarde le nombre d'antécédents d'un couple $(g(V_0), g(W_0))$ fixé où l'on a noté (V_0, W_0) l'image de l'identité. On veut donc le nombre de $g' \in GL_n$ vérifiant

$$(g'(V_0), g'(W_0)) = (g(V_0), g(W_0)),\ i.\ e.\ g'g^{-1} \text{ stabilise } V_0 \text{ et } W_0.$$

Matriciellement, cela dit que $g'g^{-1}$ est, dans un base adaptée à (V_0, W_0), de la forme $\begin{pmatrix} P & \\ & Q \end{pmatrix}$ avec P et Q inversibles, d'où $|GL_d|\,|GL_{n-d}|$ choix pour $g'g^{-1}$, *a fortiori* pour g'. En appliquant le lemme du berger puis en sommant sur les dimensions, on trouve le résultat :

$$\begin{aligned} \sum_{d=0}^{n} \frac{|GL_n|}{|GL_d|\,|GL_{n-d}|} &= \sum_{d=0}^{n} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} (q^i - 1)}{q^{\frac{d(d-1)}{2}} \prod_{i=1}^{d} (q^i - 1)\, q^{\frac{(n-d)(n-d-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n-d} (q^i - 1)} \\ &= \sum_{d=0}^{n} q^{\frac{n^2 - \cancel{n} - \left(d^2 - \cancel{d} + (n-d)^2 - \left(\cancel{n} - \cancel{d}\right)\right)}{2}} \frac{\prod_{i>d} (q^i - 1)}{\prod_{i \leq n-d} (q^i - 1)} \\ &= \sum_{d=0}^{n} q^{d(n-d)} \frac{\prod_{i>d} (q^i - 1)}{\prod_{i \leq n-d} (q^i - 1)} \\ &= \sum_{d+d'=n} q^{dd'} \frac{\prod_{i>d} (q^i - 1)}{\prod_{i \leq d'} (q^i - 1)}. \end{aligned}$$

15 Lemme de Sperner et théorème de Brouwer

*On se donne un triangle $A_0A_1A_2$ que l'on subdivise en plein de petits triangles. On colorie tous les sommets avec trois couleurs différentes $0, 1, 2$. On suppose que l'arête $[A_i, A_{i+1}]$ ne contient pas de sommet coloriés $i - 1$ (modulo 3). Montrer que le nombre de triangles tricoles (*i. e.* dont les trois sommets sont coloriés avec des couleurs distinctes) est impair. On pourra tracer le graphe dual sur la sphère reliant deux triangles ssi ils ont une arête 12 en commun et invoquer des arguments de parité.*

*Plus généralement, soit $\Delta_n := \left\{ \begin{array}{c} x_1 + ... + x_n = 1 \\ x_1, ..., x_n \geq 0 \end{array} \right\}$ un simplexe de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (visualiser un tétraède dans $\mathbb{R}^3$: ses "faces" sont des sous-simplexes de dimension $n - 1$). On le "simplexifie" en plein de petits simplexes dont on colorie les sommets (y compris ceux du gros simplexe de départ) avec $n + 1$ couleurs $0, 1, ..., n$, la i-face du gros simplexe ne contenant pas de sommet colorié i. Montrer que Δ_n contient un nombre impair de petits simplexes omnicolores (*i. e.* coloriés avec exactement toutes les couleurs $0, 1, ..., n$).*

En déduire que toute application continue de la boule unité dans elle-même admet un point fixe. On pourra "simplexifier" de plus en plus finement.

Solution proposée.

Suivons l'énoncé. Les triangles 001 et 011 deviennent des "sommets" isolés, les triangles 112 et 122 des sommets de degré 2, tandis que les tricolores 012 deviennent les sommets simples, à l'exception du triangle ABC que constitue la face externe (on plonge le graphe sur la sphère !). Pour ce dernier, les seules arêtes 12 en

[1] On aurait aussi dire que A admet un polynôme annulateur $X^2 - 1$ qui est scindé simple par hypothèse sur la caractéristique $(1 \neq -1)$, donc est diagonalisable à spectre dans $\{-1, 1\}$, d'où un cassage de l'espace ambiant selon les deux sous-espaces propres. Ce serait oublier les rudiments de sup !

commun sont situées sur le côté $[A_1A_2]$; leur nombre mesure le nombre de changements de couleurs sur $[A_1A_2]$, donc est impair vu que A_1 et A_2 sont de couleur différente. Puisque la somme des degrés est paire (on compte deux fois chaque arête), il reste un nombre impair de triangles 012.

En dimension supérieure, on raisonne de manière analogue. On dualise en reliant les petits simplexes ayant une "face" en commun dont les sommets sont coloriés avec toutes les couleurs $1, ..., n$.

Un "sommet" de degré non nul possède nécessairement une "face" coloriée $1, ..., n$: si le dernier sommet du simplexe est colorié 0 (cas d'un simplexe omnicolore), ce dernier est de degré 1, sinon il est de degré 2. La somme des degrés étant pair, il suffit de montrer que le degré du sommet externe est impair (comme pour $n = 2$).

Or, ce dernier peut être vu comme un gros simplexe relié aux petits simplexes collés à la face 0 selon les n couleurs $1, ..., n$. Son degré est donc le nombre de "faces" coloriées exactement avec les couleurs $1, ..., n$. Or, ce dernier est impair d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la face 0. Pour pouvoir récurrer, on vérifie bien que l'"arête" i de la face 0 (définie comme intersection des faces 0 et i) ne contient ni la couleur i, ni la couleur 0.

Une boule étant homéomorphe à un simplexe $\Delta_n := \left\{ \begin{array}{c} x_0 + ... + x_n = 1 \\ x_0, ..., x_n \geq 0 \end{array} \right\}$, montrons Brouwer pour une applications continue f de Δ_n dans lui-même.

On choisit une "simplexification" de plus en plus fine, au sens où la taille du plus grand simplexe tend vers 0, dont on va colorier les sommets. Le lemme de Sperner nous alors donne pour chacune de ces simplexifications un simplexe omnicolore $A_0^k...A_n^k$ dont les sommets convergent – quitte à extraire par compacité – vers un point A. Notons $[M]_i$ la i-ième coordonée d'un point M.

Soit par l'absurde f sans point fixe. On colorie chacune comme suit : à un sommet S on associe la couleur

$$\min \{i \; ; \; [f(S)]_i < [S]_i\}.$$

Cela est possible, car la définition du complexe de base et l'hypothèse sur f se traduisent par

$$\sum [S]_i = 1 = \sum [f(S)]_i \text{ et } f(S) \neq S \implies \exists i, [f(S)]_i < [S]_i.$$

Les sommets des simplexes omnicolores vérifient alors $\left[f\left(A_i^k\right)\right]_i < \left[A_i^k\right]_i$, d'où en prenant la limite en k

$$[f(A)]_i \leq [A]_i \text{ pour tout } i.$$

Mais la condition $\sum [f(A)]_i = 1 = \sum [A]_i$ impose égalité, d'où $f(A) = A$, ce qui est une contradiction.