Polynômes

Marc SAGE

18 décembre 2005

Table des matières

Pour étudier les polynômes $\sum a_n x^n$ en une variable x , nous coderons ce dernier par la liste ordonnée de ses coefficients, ce qui a l'avantage de se libérer de la variable x et par là même de l'algèbre sous-jacente.

Plus généralement, on va mettre une structure d'algèbre sur les suites de scalaires $\rightarrow$ séries formelles dont les polynômes (support fini) en sont un sous-anneau

On se donne un ensemble A (non vide) muni de deux lois internes : un $+$ associatif et régulier et un $\times$.

On note de façon générique 0 tout neutre additif et 1 tout neutre multiplicatif.

On considère la réunion A^* des $A^n := A^{[0, n[}$ pour $n \geq 1$ munie de l'addition produit¹ et de la multiplication

$$\left\{ \begin{array}{l} A^u \times A^v \longrightarrow A^{u+v-1} \\ (f, g) \longmapsto f * g : \left\{ \begin{array}{ll} [0, u+v[& \longrightarrow A \\ n & \longmapsto \sum_{p=0, \dots, n} f(p) g(n-p) \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

On souhaite voir quelles propriétés remontent de A^* vers A .

1. Montrer que le produit de A^* est commutatif (resp. distributif) ssi celui de A l'est.
2. Soit $o \in A$. Montrer que les injections $\left\{ \begin{array}{ll} A & \hookrightarrow A^n \\ a & \longmapsto (a, o, o, \dots, o) \end{array} \right.$ sont des "morphismes multiplicatifs" ssi o est neutre additif et absorbant multiplicatif. Que récolte-on au passage ?
3. Montrer que A^* possède un absorbant ssi A possède un absorbant o dont les itérés ont des homothéties associées toutes constantes (à o). Préciser alors l'absorbant.
4. Montrer que A^* possède un neutre ssi A en possède un et si il possède un neutre additif qui est absorbant multiplicatif. Que vaut alors le neutre ?
5. Sous l'hypothèse de la question précédente ($0^2 = 0$), montrer que A^* est associatif ssi 0 est absorbant et $\times$ assoc et distrib sur AA et $+$ comm sur AAA . Quid quand A est unifère ?
6. On suppose que $\times_A$ possède un absorbant additivement neutre, ce qui permet de plonger A dans tous les A^n ainsi que ces derniers dans $A[X] := A^{(\mathbb{N})}$ à l'aide des morphismes évidents $A^p \xrightarrow{p \leq q} A^q \hookrightarrow A[X]$ (implicites à la question 2).
Définir le produit dans $A[X]$ suivant une condition raisonnable, puis passer en revue les points abordés ci-dessus : commutativité, distributivité, absorbant, neutre, associativité. Commenter.

1. prendre $u = v = 1$ donne le produit sur $A^1 \cong A$.
2. Le produit fait $(ab, ao + ob, ao + oo + ob, \dots)$, donc (termes 2 et 3) $3o^2 = o^2$, donc o^2 est neutre additif (simplifier $a + 3o^2 = a + 2o^2$), puis (terme 2) faire a ou $b = o$ donne $ao = ob = o$, en particulier $oo = o$.
le morphisme est alors de surcroît additif.
3. si O est absorbant, $OP = O$ donne ($n = 0$) $o_0 p_0 = o_0$ pour tout p_0 , puis $o_1 = o_0 p_1 + o_1 p_0 = o_0 + o_1 p_0$, donc $o_1 \cdot$ est constant (à o_0). Etc.
L'absorbant est alors $(o, 2o, 3o, \dots)$.

¹par exemple, la somme de (a, b, c, d, e) et (α, β) vaut $(a + \alpha, b + \beta, c, d, e)$

4. si U est neutre, alors $UP = P$ donne ($n = 0$) $u_0 p_0 = p_0$ pour tout p_0 , puis $p_1 = u_0 p_1 + u_1 p_0$, d'où $u_1 \cdot$ neutre additif (simplifier $a + u_1 \lambda + p_1 = a + p_1$) et u_1 neutre additif (évaluer en u_0), etc...

Le neutre est alors $(1, 0, 0, 0, \dots)$

5. faire $n = 0$ donne l'associativité de $\times_A$; faire $n = 1$ donne

$$ab\nu + (\lambda b + a\mu)c = \lambda bc + a(b\nu + \mu c);$$

ne garder que a donne $a0 + a00 = 0 + a0$, donc $a0 \equiv 0$, ne garder que c donne $0 + 0c = 0c + 00c$, d'où $0c \equiv 0$, donc 0 absorbant; alors tuer $\lambda = 0$ donne distrib à gauche, tuer ν donne distrib à droite; il reste alors $ab\nu + \lambda bc = \lambda bc + ab\nu$

Lorsque A possède un 1 , ces conditions reviennent tout simplement à la distributivité et l'associativité de $\times$ (la régularité de $+$ entraînant sa commutativité sur $AA \subset A1 = A$).

- 6.