Axiomes de l'infini
(version chantier)

Marc SAGE

20 septembre 2007

Table des matières

MIse en garde sur les entiers usuels et naturels. À stade où on est, on ne peut pas parler d'entier mathématiques (pas encore définis) et donc impossible de quantifier sur eux. Mais on peut parler des entiers usuels que l'on sait lister : un, deux, trois, quatre..., mille quarante-et-un, mille quarante-deux,... Par ***entier usuel*** on entend un concept de la vie usuelle, sans beson de préciser les limites de ce concept. Ce qui les caratérisera dans notre discours, c'est que

dans une liste $0, 1, 2, ..., n$ *on pourra expliciter les "...".*

(eg $0, 1, 2...10$ signifiera $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$)

1 Équivalence des "infinis premiers"

Idée : entiers code notre *action*. Action illimité <–> pas d'obstcle à l'action <-> on peut toujours agir. On code donc l'infini par un ensemble stable par une action (et contenant un point de départ).

Soit o un objet (notre point de départ) et σ une fonctionnelle (la "fonction" σ généralise le successeur s) PARTOUT DEFINIE.

On abrégera par commodité

$$a' := \sigma(a)$$

L'axiome de l'infini de dépat o et de pas σ se formule :

$$\exists I,\ o \in I \text{ et } \forall i \in i,\ i' \in I.$$

VOyons pouquoir l'axiome usuel vaut autant que les autres de ce point de vue, sous de bonnes conditions à déterminer sur σ.

On utilisera extension, partie, remplacement (mais pas infini !).

Nous allons montrer (indépendmment de σ et o) où f est une fonctionnelle et ε quelconque.

$$Infini_o^\sigma \Longleftrightarrow Infini_\varepsilon^f.$$

1.1 Construction d'un plus petit ensemble où l'on peut agir indéfiniement, plan de bataille

1. *Montrer qu'il y a une partie de I contenant o stable par σ et minimale pour ces propriété.*
   On la notera N.
2. *Montrer le théorème de récurrence : pour tout 1-prédicat P, on a l'implication*
   $$(P_o \wedge [\forall n \in N,\ P_n \implies P_{n'}]) \implies (\forall n \in N,\ P_n).$$
3. *Montrer que tout entier $\neq o$ est successeur.*

DEM

1. L'ensemble des parties de S contenant o et stable par σ est non vide, appelons N son intersection. Alors N convient
2. $\{n \in N\ ; P_n\}$ est une partie de N contenant o et stable par σ, donc (par minimalité de N) qui contient N, ce qui conclut.
3. Par récurrence sur n :
   $$n \neq o \implies \exists a,\ n = a'.$$
   Pour $n = o$, c'est tautologique. Soit un n tq... On veut montrer l'implication
   $$n' \neq o \implies \exists a,\ n' = a'.$$
   Il s'agit d'un énoncé " ? implique vrai" (prendre $a := n$), donc vrai, *CQFD.*

Plan de bataille.

COmment procéder ? On va construire une suite e de départ N telle que $e_0 = \varepsilon$ et $e_{n'} = f(e_n)$. Ses premiers termes sont bien sûr $o, f(o), f(f(o)), f(f(f(o)))...$

Pour cela, on va construire e petit à petit, çàd à n fixé de o "jusqu'à" n (et pas au-delà) çàd sur des parties tq $\forall a \neq n,\ e_{a'} = f(e_a)$. Ces premières parties sont $\{o\}$, $\{o, o'\}$, $\{o, o', o''\}$, $\{o, o', o'', o'''\}$... et pour tout $\mathfrak{n}$ entier primitif $\left\{o, o', o'', o''', .., o^{\mathfrak{n}\text{sybmoles}\prime}\right\}$ (où les ... *peuvent* être substitués, tout comme les "$\mathfrak{n}$sybmoles$\prime$")

Une fois comprises les parties $\{o, o', o'', o''', ..., n\}$ pour n entier (pas forcément primitif), , il suffira d'une induction très facile (cf. 1.3), pour construire ces suites "partielles"

1.2 Construction des ensembles où l'on peut agir indéfiniement jusqu'à un certain point fixé à l'avance

Par opposition à un enesmble *in*fini d'itérés (N), comment coder un ensemble *fini* d'itérés ? Par les segments $\{o, 1, 2, ..., n-1, n\}$ (les "..." indiquent *exactement* une stabilité par σ et σ^{-1}).

de o jusqu'à n (et pas au-delà), donc $o, n \in S_n \not\ni n'$. Bien sûr S_n minimale : il ne s'agit pas juste de "sauter" n'. Si $S_n = \{o, o', o'', o''', .., n\}$ convient, alors observer que $\{o, o', o'', o''', .., n, n'\} = S_n \cup \{n'\}$ convient

1.2.1 Analyse (reverse mathematics) : ce que doit alors vérifier σ

Voyons tout d'abord ce que la donnée de tels segments impose sur σ.

Soit (S_n) une suite de $\mathfrak{P}(N)$ telle que $\forall n \in N$, $\begin{cases} o \in S_{n'} = S_n \amalg \{n'\} \\ a' \in S_n \Longrightarrow a \in S_n. \end{cases}$.

1. *Montrer que o n'est pas fixe par σ. En déduire que S_n contient o et n.*
2. *Montrer que o n'est pas image par σ.*
3. *Montrer que σ n'a aucun point fixe sur N.*
4. *Montrer que $S_o = \{o\}$.* **(optionnel)** *Montrer l'unicité d'une telle suite.*
5. On veut montrer que σ est injective (sur N).
   (a) *Montrer $a \in S_n \Longrightarrow S_a \subset S_n$.*
   (b) *Montrer $S_{a'} = S_{b'} \Longrightarrow S_a = S_b$.*
   (c) *Montrer $S_a = S_b \Longrightarrow a = b$.*
   (d) *Conclure.*
6. **(sens)** *Interpréter les trois conditions trouvées sur σ en termes de boucles.*
7. **(indépendance)** *Montrer que deux de ces conditions sont indépendantes et impliquent la troisième.*
8. **(exemples)** *Donner trois exemples de σ qui marchent.*

DEM

1. Supp $o = o'$. Alors $S_o = S_{o'} = S_o \amalg \{o'\} \supsetneq S_o$, abs. Donc $o \in S_{o'} \backslash \{o'\} = S_o$.
   Soit $n \neq o$. C'est un m', donc $S_n = S_{m'}$ contient o et $S_n = S_{m'} = S_m \cup \{m'\}$ contient $m' = n$.
2. Supposons $o = m'$. Alors $S_m \not\ni m' = o \in S_m$, absurde.
3. Supposons $n = n'$. On obtient alors $S_n \not\ni n' = n \in S_n$, absurde.
4. Abrégeons $1 := o'$ (qui est $\neq o$). On sait déjà $o \in S_o$. il suffit de montrer que $V := S_o \backslash \{o\}$ est vide. Puisque $1 \notin S_o$, il suffit de montrer par récurrence que $n \in V \Longrightarrow 1 \in S_o$. L'initailisation est tautologique ($\mathbb{F} \Longrightarrow ?$). Soit ensuite n tq... Supposons $n' \in V$. Puisque $n' \in S_o$, on sait que $n \in S_o$. On veut $n \in V$ (alors HR conclut $1 \in S_o$), çàd $n \neq o$ (or $n = o$ impùlique $1 = o' = n' \in V \subset S_o$, ce qui est faux).

   Soit (T_n) une autre suite vérifiant les conditions de S_n. Montrons $\forall a \in S_n,\ T_a = S_a$ par récurrence sur n (on en déduira, en remplçaant a par n, l'égalité $T_n = S_n$). Le paragraphe précédent montre que $T_o = \{o\} = S_o$. Soit n tq... Soit $a \in S_{n'}$. Si $a \in S_n$, l'HR donne directement $T_a = S_a$, sinon on a $T_a = T_{n'} = T_n \amalg \{n'\} \overset{HR}{=} S_n \amalg \{n'\} = S_{n'} = S_a$.
5.

(a) Soit $n \in N$. Montrons $a \in S_n \Longrightarrow S_a \subset S_n$ par récurrence sur a.

La conclusions $S_o \subset S_n$ se réécrit $o \in S_n$, ce qui toujours vraie, donc l'implication est tautologique.

Soit a tq... Supposons $a' \in S_n$. Alors $a \in S_n$, donc (HT) $S_a \subset S_n$, d'où $S_a \cup \{a'\} \subset S_n$, cqfd.

(b) Supp $S_{a'} = S_{b'}$. Alors $a \neq b'$ (sinon $a' \in S_{a'} = S_{b'} \overset{a=b'}{=} S_a \not\ni a'$, absurde), donc $a \in S_a \setminus \{b'\} \subset S_{a'} \setminus \{b'\} = S_{b'} \setminus \{b'\} = S_b$, d 'où $S_a \subset S_b$. Idem pour l'autre sens.

(c) Montrons $\forall a, b \in N,\ S_a = S_b \Longrightarrow a = b$ par récurrence sur b.

Soit a tel que $S_a = S_o$. Alors $a \in S_a = S_o = \{o\}$, çàd $a = o$.

Soit b tq $\forall a$... Soit a tel que $S_a = S_{b'}$. Alors $a \neq o$ (cf initial), donc est un successuer α' : on obtient $S_{\alpha'} = S_{b'}$, donc $S_\alpha = S_b$, d'où (HR) $\alpha = b$ puis $a = \alpha' = b'$.

(d) Soient enfin a et b dans N tels que $a' = b'$. On en déduit $S_{a'} = S_{b'}$, d'où $S_a = S_b$, çàd $a = b$.

6. Si σ fixe o, alors l'action de σ est *immobile*, il n'y a pas d'action, donc pas d'infini (ni d'ailleurs de fini "aussi loin que voulu").

   L'autre problème à éviter est celui des *boucles* (qui font tourner l'action en rond, empêchant d'aller vers l'infini). Si les itérés de σ bouclent "en arrière", le point de bouclage est ou bien o, ce pourquoi on exclut le cas o sucesseur, ou bien un point qui aura deux antécédents (l'un sur la boucle, l'autre juste avant de s'engager dessus), ce pourquoi on impose l'injectivité de σ sur N.

7. Montrons les deux conditions de "non-bouclage" sont indépendantes et impliquent la condition de "non-immobilité".

   (a) Définir $\sigma : a \mapsto \mathfrak{P}(a)$ sauf en $\mathfrak{P}(\emptyset) \mapsto \emptyset$ crée une boucle sur $\emptyset$. C'est une injection sans point fixe mais $\emptyset$ est successeur.

   (b) Définir $\sigma : a \mapsto \{a\}$ sauf en $\{\{\emptyset\}\} \mapsto \{\emptyset\}$ crée une boucle sur $\{\emptyset\}$. L'injectivité est mise en défaut, bien que $\emptyset$ ne soit pas successeur et qu'aucun point ne soit fixe.

   (c) Supposons σ injective sur N et n'atteignant pas o : montrons qu'elle n'a pas de point fixe. On montre par récurrence que $n' = n \Longrightarrow o = o'$. L'initialisation est tautologique. Soit n tq.. Supposons $n'' = n'$. Par inj, on a $n' = n$, d'où (HR) $o' = o$.

8. Posons $\sigma : a \mapsto \{a\}$. Son injectivité exprime l'axiome d'extensionalité.

   Posons $a \mapsto s(a)$. Montrons son injectivité. Soient par l'absurde $a \neq b$ tq $a' = b'$. Alors $a \setminus b$ (par exemple) est non vide. Puisque $a \setminus b \subset a' \setminus b = b' \setminus b = \{b\}$, on a l'égalité $a \setminus b = \{b\}$, d'où $b \in a$. Mais alors a ne peut appartenir ni à b (par fondation) ni à $\{b\}$ (car $a \neq b$), ce qui contredit $a \in a' = b'$.

   Posons $a \mapsto \mathfrak{P}(a)$. Montrons son injectivité. Soient a, b tels que $\mathfrak{P}(a) = \mathfrak{P}(b)$. On a alors $a \subset a \Longleftrightarrow a \in \mathfrak{P}(a) \Longleftrightarrow a \in \mathfrak{P}(b) \Longleftrightarrow a \subset b$, de même en échangeant a et b, d'où l'égalité $a = b$. (Remarque : l'axiome de l'union donne directement l'antécédent, vu l'égalité $\cup\mathfrak{P}(a) = a$.)

   Dans les trois exemples ci-dessus, toutes les images contiennent quelque chose (leur antécédent), donc $\emptyset$ n'est pas atteint. De plus, un éventuel point fixe impliquerait une appartenance $a \in a'$, ce qu'exclut l'axiome de fondation.

1.2.2 Synthèse : construction

Synthèse. Les question précédentes nous incitent à supposer[1] σ injective et n'atteignant pas o (çàd $\sigma : N \widetilde{\longrightarrow} N \setminus \{o\}$ bijective). On sait alors que σ ne fixe aucun $n \in N$.

1. *Montrer pour tout n l'existence d'une partie S de N contenant o, n mais pas n' et telle que pour tout $a \in N$ on ait l'équivalence $\forall a \neq n,\ a \in S \Longleftrightarrow a' \in S$.*
2. *Montrer l'unicité d'un tel S (que l'on notera $[o, n]$ ou S_n)*
3. *Décrire $[o, n']$ à l'aide de $[o, n]$.*
4. *Justifier la notation enomplyée en décrivant $[o, n]$ lorsque (dans langage usuel) $o = 0$ et $\sigma = (+1)$ et n entier primitif.*

[1] On retrouve ainsi les deux axiomes de Peano nous disant que *successeur* n'est pas injective et n'atteint pas 0.

DEM

1. Récurrence sur n.

La partie $[o,o] := \{o\}$ convient (le $\forall$ s'exrime $\forall a \neq o,\ a = o \iff a' = o$ çàd faux<=>faux ; si $o' \in [o,o]$, alors $o = o'$, çàd $o \in \operatorname{Fix}\sigma$ qui est vide).

Soit $n \in N$ tel que ...Soit I une partie convenant pour n. Montrons que $I \amalg \{n'\}$ convient pour n'. On renvoit à la question 3.

2. Montrons l'unicité (d'une autre manière que ci-dessus). Soient I et J deux parties convenant (à n fixé). Montrons par récurrence $a \in I \iff a \in J$.

Vu que I et J contiennent o, l'initialisation est tautologique.

Soient $a \in N$ tq $a \in I \iff a \in J$. Si $a \neq n$, on a les éq $a' \in I \overset{\text{prop de } I}{\iff} a \in I \overset{\text{HR}}{\iff} a \in J \overset{\text{prop de } J}{\iff} a' \in J$. Sinon, vu que ni I ni J ne contient n', l'équavalenc est tautologique.

3. Soit n. Notons $S := S_n$. Montrons que $T := S \amalg \{n'\}$ convient. Alors $n' \in T$ et $o \in S \subset T$. Supp abs $n'' \in T$: puisque $n' \neq n$, on a l'éq $\underbrace{n' \in S}_{\text{faux}} \iff n'' \in S$, d'où $n'' \in T \setminus S = \{n'\}$, çàd $n'' = n'$, d'où $n' \in \operatorname{Fix}\sigma$, absurde. Soit enfin $a \neq n'$. Si $a = n$, l'éq vouloue $a \in T \iff a' \in T$ s'écrit $n \in S \amalg \{n'\} \iff n' \in S \amalg \{n'\}$, çàd vrai<=> vrai. Sinon, on a $a \in S \amalg \{n'\} \overset{a \neq n'}{\iff} a \in S \overset{a \neq n}{\iff} a' \in S \overset{a' \neq n'}{\iff} a' \in S \amalg \{n'\}$.

4. $[o,n]$ est le segment $[0,n] = \{0,1,2,...,n-1,n\}$.

1.3 Construction d'ensembles où l'on peut agir indéfiniement jusqu'à un certain point fixé à l'avance, sur un autre objet avec une autre action

Soit E un ensemble contenant un élément ε et stable par une application f.

1. *Soit $n \in N$. Montrer qu'il y a une unique suite $e : [o,n] \longrightarrow E$ tq $e_o = \varepsilon$ et $e_{a'} = f(e_a)$ pour tout $a \in [o,n]$ autre que n. (optionnel) Décrier où sont intervenues toutes les propriétés étudiés des S_n.*
2. *En déduire qu'il y a une unique suite $e : N \longrightarrow E$ tq $e_o = \varepsilon$ et $e_{a'} = f(e_a)$ pour tout $a \in N$.*
3. *Décrire des obstacles à la conclusion $Infini_{\emptyset}^{s}$.*

1.

   (a) Montrons l'existence par récurrence sur n

   Sur $[o,o] = \{o\}$, la suite $o \mapsto \varepsilon$ convient.

   Soit n tel que.. Soit $e : [o,n] \longrightarrow E$ convenant. On prolonge par $n' \mapsto f(e_n)$ Alors cela convient.

   (b) Montrons l'unicité. Soient e et d deux suites convenant. Mq $a \in [o,n] \Longrightarrow e_a = d_a$ par rec sur a.

   On a $e_o = \varepsilon = d_o$.

   Soit ensuite $a \in N$ tel que... Supposons $a' \in [o,n]$. Alors $a \neq n$ (sinon $n' = a' \in S_n$), donc $a \in [o,n]$, ce qui permet d'utilier HR : $e_{a'} = f(e_a) = f(d_a) = d_{a'}$.

   (c) tout hypoh ? ? ? ?

2. Pour tout $n \in N$, notons e^n l'unique suite de $E^{[o,n]}$ tq... Remarquer que, par unicité, $e^{n'}$ coïncide avec e^n sur $[o,n]$, en partitculier en n, d'où $e_n^{n'} = e_n^n$. De même, pour l'unicité, une telle suite doit coïncider sur $[o,n]$ avec e^n. Existence : définissons $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & e_n^n \end{array} \right.$. On a alors $\varphi_o = e_o^o = \varepsilon$ et $\varphi_{n'} = e_{n'}^{n'} = f\left(e_n^{n'}\right) = f(e_n^n) = f(\varphi_n)$.

3. Pour conclure, on aimerait appliquer cela en remplaçant ε par $\emptyset$ et f par s, mais que choisir pour E ? Nous allons donc remplacer l'application f (avec son ensemble d'arrivée) par une correspondance univoque et utiliser remplacement depuis N.

Rq : si on se donne un N et suite (S_n) de parteies de N vérifie la question 1 pour tout n, E, ε, f, alors on peut montrer que ces S_n vérifient les conditions desquelles découlent σ inj et blabla (*cf mémoire dédekind*)

Rq : si on se donne un N donnant sens et vérifiant la quesion 2 pour tout E, ε, f, alors on peut montrer que N cotient o, que σ stabilise N, n'ateitn pas 0 et est injective (*cf mémoire Dedekind*).

1.4 Construction d'ensembles où l'on peut agir indéfiniement, sur un autre objet avec une autre action

On généralise au cas où la calsse des valeur de f n'est plus forcément un ensemble. On codera alors les suite e par leur *graphe*, ie par des ensembles de couples. Pour tout graphe univoque G, on notera $b = \gamma^G(a)$ pour dire $\langle a, b\rangle \in G$. On rappelle que le domaine d'un graphe est la classe des a tq $\exists b, \langle a, b\rangle \in G$.

Soit P un 2prédicat univoque (on continue de noter $b = f(a)$ pour dire que $\langle a, b\rangle$ vérifie P). Soit $n \in N$.
Montrer qu'il y a un unique graphe G univoque de domaine $[o, n]$ tel que $\gamma^G(o) = \varepsilon$ et tq $\gamma^G(a') = f\left(\gamma^G(a)\right)$ pour tout $a \in [o, n]$ autre que n.
Conclure $Infini_\varepsilon^f$

On reprend la démo en adaptant les notations.

1. Le graphe $\{\langle o, \varepsilon\rangle\}$ convient pour initilaiser.
   Soit $n \in N$ tel que ...Soit G un rgaphe convenant. Alors $G \amalg \left\{\left\langle n', f\left(\gamma^G(n)\right)\right\rangle\right\}$ convient pour n'.
2. Soit (à n fixé) H un autre graphe. Mq rec $a \in [o, n] \implies \gamma^G(a) = \gamma^H(a)$.
   initl pareil.
   Soit $a \in N$ tq... Suppos $a' \in [o, n]$. Alors $a \in [o, n]$ ce qui permet d'utiliser HR dans $\gamma^G(a') = f\left(\gamma^G(a)\right) = f\left(\gamma^H(a)\right) = \gamma^H(a')$.
3. Remplacment donne une application $\left\{\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & ? \\ n & \longmapsto & G_n \end{array}\right.$, ou mieux $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & \gamma^{G_n}(n) \end{array}\right.$ (l'existence de E est précisément donnée par remplacement). On a alors $\varphi_o = \gamma^{G_o}(o) = \varepsilon$ et $\varphi_{n'} = \gamma^{G_{n'}}(n')) = f\left(\gamma^{G_{n'}}(n)\right) = f\left(\gamma^{G_n}(n)\right) = f(\varphi_n)$ par unicité.
4. E contient $\varphi(o) = \varepsilon$ et est stable par f : soit $e \in E$, soit $n \in N$ tq $e = \varphi(n)$, alors $f(e) = f(\varphi(n)) = \varphi(n') \in E$.

2 DEux Modèles de ZFC sans infini

On prend V_ω comme univers. A VERIFIR!!
(parallèle $V_{\omega+\omega}$ modèle de ZFC moins remplacement)

On prend **N** comme univers.
On pose $n \widehat{\in} x$ si le n-ième bit de x est 1 :

$$n \widehat{\in} \sum a_i 2^i \iff a_n = 1$$

Ainsi deux entiers sont $\widehat{}$égaux (au sens de la double inclusion) ssi ils ont les mêmes bits, donc ssi ils sont égaux ausens usuel.

On a les deux propriétés $n \widehat{\in} 2^n$, et $n \widehat{\in} a \implies 2^n \leq a$. On voit alors que le vide $\widehat{\emptyset}$ est l'entier 0 (car $n \widehat{\in} 0 \implies 2^n \leq 0$, absurde)

Un entier n est consitiué des positions de ses bits, soit son support. Ainsi, les$\widehat{}$éléments de $a := \sum_{i \geq 0} a_i 2^i$ sont les éléments de $\operatorname{Supp} a$. En particulier, si les k_i sont des eniers **disticnts**, les élément du support de l$\widehat{}$entier $\widehat{\{k_1, ..., k_n\}}$ sont les$\widehat{}$élément de $\widehat{\{k_1, ..., k_n\}}$, ie les k_i, d'où l'égalité $\widehat{\{k_1, ..., k_n\}} \widehat{=} 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_1}$. Du coup la paire $\widehat{\{a, b\}}$ est $2^a + 2^b$ si $a \neq b$ et $\widehat{\{a\}} \widehat{=} 2^a$ sinon.

On voit que $n \widehat{\in} a \widehat{\cup} b$ ssi $n \widehat{\in} a$ ou $n \widehat{\in} b$ ie ssi $n \in \operatorname{Supp} a$ ou $n \in \operatorname{Supp} b$. Ainsi l$\widehat{}$union de deux entiers est l'entier formé de l'union de leur supports. En particulier, $\widehat{\cup}$ se traduit par l'addition (pour les distincts).

Ainsi, le sucesseur de n est $n \widehat{\cup} \widehat{\{n\}} = n \widehat{\cup} 2^n = n + 2^n$

Pour l'inclusion, $\sum a_i 2^i \subset \sum b_i 2^i$ ssi $\forall n,\ a_n = 1 \implies b_n = 1$, soit encore $\forall n, a_n \leq b_n$. Donc c'est l'inclusion des supports ou l'ordre produit des bits :

$$a \widehat{\subset} b \iff \operatorname{Supp} a \subset \operatorname{Supp} b \iff (a_i) \leq (b_i).$$

On en déduit

$$\widehat{\mathfrak{P}}(a) \widehat{=} \left\{\sum k_i 2^i \ ; \ \forall i, k_i \leq a_i\right\}.$$

pour fondation : si $k = \min \operatorname{Supp} a$, alors $k \in a$ (donc $a \geq 2^k$) : si $x \widehat{\in} k \widehat{\cap} a$, on a $x \widehat{\in} k \implies k \geq 2^x$, et $x \widehat{\in} a \implies x \in \operatorname{Supp} a \geq k$, d'où $x \geq k \geq 2^x$, absurde.

Pour séparation, il suffit de séparer dans ZF :-p

Pour remplacement, un$\widehat{\ }$ensemble est fini donc son "image" par une "application" est fini, donc est bien un entier

RQ : pas possible de munir $\mathbb{R}$ d'un $\in$ astucieux, ou me^me n'importe quel ensemble, de façon à vérifier ZF, sinon ZF (supposé consistant) proverait sa consistance en exhiabant un modèle de ZF, ce qui est interdit par Godel.