

Variations axiomatiques sur un modèle des complexes

Marc SAGE

29 novembre 2010

On rappelle qu'une construction possible des nombres complexes est de coder un complexe $a + ib$ (où a et b sont des réels) par le couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$. L'addition complexe se traduit alors dans $\mathbb{R}^2$ par l'addition produit (coordonn, tandis que la multiplication complexe se traduit par la relation $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta \\ a\beta + \alpha b \end{pmatrix}$. On vérifie alors que le plan $\mathbb{R}^2$ muni de ces lois est un corps dans lequel $\mathbb{R}$ se plonge via le morphisme $a \mapsto \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$; noter que le couple $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ correspond au complexe i .

Considérons plus généralement un groupe abélien $(A, +)$ muni d'une loi $\times$. On se demande quelle structure possède le "plan" A^2 muni de l'addition produit et de la multiplication sus-définie (notée $\times_2$) et réciproquement comment la structure de A^2 influe sur celle de A .

(Les neutres et absorbants seront toujours multiplicatifs et, sauf mention contraire, bilatères. La distributivité concernera toujours la multiplication sur l'addition)

1. Considérons un élément $o \in A$. Montrer que l'application $\begin{cases} A & \longrightarrow & A^2 \\ a & \longmapsto & (a, o) \end{cases}$ est un morphisme multiplicatif ssi $o = 0$ et si ce dernier est absorbant. Que récolte-on alors de plus ?

On suppose par la suite que le neutre additif est un idempotent, i. e. $0^2 = 0$.

2. Montrer que A^2 possède un absorbant ssi 0 est absorbant dans A . Préciser alors l'absorbant de A^2 .
3. Montrer que A^2 possède un neutre ssi 0 est absorbant et si A possède un neutre. Préciser alors le neutre de A^2 .
4. Montrer que $\times_2$ est associatif ssi on a les deux égalités suivantes pour tous éléments a, b, u, v, x, y de A :

$$\begin{aligned} a(ux - vy) + (av + bu)y &= (au - bv)x + b(uy + vx), \\ a(uy + vx) + b(ux - vy) &= (au - bv)y + (av + bu)x. \end{aligned}$$

En déduire que l'associativité de $\times_2$ revient à celle de $\times$ combinée à la distributivité de $(AA, \times)$ sur $(A, +)$.

5. Les propriétés suivantes passent-elles de A à A^2 ?
 - (a) être un pseudo-anneau (resp. un anneau unifié);
 - (b) être un anneau intègre (resp. un corps);
 - (c) admettre un neutre (resp. un absorbant);
 - (d) l'associativité du produit (resp. sa distributivité).
6. Commentez l'étude ci-dessous.
7. (**question ouverte**) Peut-on trouver un produit sur A qui soit distributif sur AA mais pas¹ sur A ?

Solution proposée.

1. Supposons $t \mapsto (t, o)$ préserver la multiplication. Pour tous a et b dans A , on peut alors écrire

$$\begin{pmatrix} ab \\ o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - o^2 \\ ao + ob \end{pmatrix},$$

d'où $o^2 = 0$ en première coordonnée (+ est simplifiable) et $o = ao + ob$ en seconde. Prendre $a = b = o$ donne $o = o^2 + o^2 = 0 + 0 = 0$. Prendre $a = 0$ donne $0 = 0^2 + 0b = 0 + 0b = 0b$, d'où l'absorbance de 0 à gauche (de même à droite en échangeant les places de a et b).

On observera que, dès que $(\cdot, o)$ est un morphisme multiplicatif, c'est automatiquement un morphisme additif.

¹il est illusoire de chercher un tel A unifié puisqu'alors $AA \subset A1 = A$

2. Lorsque 0 est absorbant, l'élément $(0, 0)$ absorbe clairement tous les éléments de A^2 (c'est l'image de 0 par le morphisme de la question précédente). Nous savons donc à quoi nous attendre.

Supposons que A possède un absorbant $\begin{pmatrix} o \\ \theta \end{pmatrix}$. On a donc pour tous $a, b \in A$ les égalités

$$\begin{pmatrix} ao - b\theta \\ a\theta + bo \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} oa - \theta b \\ ob + \theta a \end{pmatrix}.$$

Prendre $b = \theta$ dans l'égalité $ao - b\theta = oa - \theta b$ montre que o centralise A ; on montre de même que θ est central (prendre $b = o$ dans l'égalité $a\theta + bo = ob + \theta a$). Ensuite, l'identité $ao - b\theta = o$ montre que les multiplications par o et θ sont constantes; puisqu'elles coïncident en la valeur $o\theta$, elles sont égales, mettons à o^2 . En réinjectant ci-dessus, on obtient $\begin{pmatrix} 0 \\ o^2 + o^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ \theta \end{pmatrix}$, d'où $o = 0 = \theta$. On en tire la constance des multiplications par $0 = o$, égales à $o^2 = 0^2 = 0$, d'où l'absorbance de 0.

3. Lorsque 0 est absorbant et A admet un neutre, alors l'élément $(1, 0)$ neutralise clairement tous les éléments de A^2 (c'est l'image du neutre de A par le morphisme de la première question). Nous savons encore à quoi nous attendre.

Soit (u, o) un neutre pour $\times_2$. On a donc pour tous $a, b \in A$ l'égalité

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au - bo \\ bu + ao \end{pmatrix}.$$

La première ligne montre que l'application $a \mapsto au - a$ est constante, mettons d , tandis que la seconde donne la constance du produit ao (mettons à p). En réinjectant, il vient $p = bo = au - a = d$ et $p = ao = b - au = -d$, d'où $2p = 0$. En raisonnant de même sur l'égalité

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ua - ob \\ ub + oa \end{pmatrix},$$

on montre que les différences $ua - a$ et les produits oa sont constants et égaux (nécessairement à o^2) de double nul. On en déduit $0^2 = uo - o = p - o = 0^2 - o$, d'où $o = 0$ et la valeur de la constante $o^2 = 0^2 = 0$. Cette dernière montre que 0 est absorbant et que u est neutre.

4. Écrire proprement pour tous a, b, u, v, x, y dans A

$$\begin{aligned} \text{d'une part, } \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} au - bv \\ av + bu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (au - bv)x - (av + bu)y \\ (au - bv)y + (av + bu)x \end{pmatrix}, \\ \text{d'autre part } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ux - vy \\ uy + vx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(ux - vy) - b(uy + vx) \\ a(uy + vx) + b(ux - vy) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui fournit les égalités demandées.

On aimerait bien récolter l'absorbance² de 0 pour pouvoir annuler plein de termes. Garder la variable a dans la première égalité et annuler toutes les autres donne $a0 + (a0)0 = (a0)0 + 0$, d'où $a0 \equiv 0$; ne garder que x donne $0(0x) + 0 = 0x + 0(0x)$, d'où $0x \equiv 0$. Ainsi, 0 est absorbant.

Prendre $v = y = 0$ dans la première égalité donne $a(ux) = (au)x$ pour tous a, u, x , d'où l'associativité de $\times$. Prendre $b = 0$ dans la seconde égalité donne alors $a(uy + vx) = auy + avx$ pour tous a, u, y, v, x , d'où la distributivité à gauche sur AA . On déduit de cette dernière la "règle des signes" $a(-vy) = -avy$ pour tous a, v, y . Enfin, prendre $x = 0$ dans la première égalité donne $a(-vy) + (av + bu)y = buy$, d'où la distributivité à droite sur AA .

Réciproquement, si $\times$ est distributive sur AA et associative, on a la règle des signes comme ci-dessus et les deux égalités caractérisant l'associativité de $\times_2$ sont toujours vérifiées.

5. L'addition de A^2 étant définie par une structure produit, il est immédiat que $(A^2, +)$ est un groupe abélien.

- (a) Supposons A pseudo-anneau. Puisque $\times$ est distributif, le zéro est absorbant, d'où l'associativité de $\times_2$ d'après la question 4. De plus, chaque coordonnée du produit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix}$ étant bilinéaire en $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (toujours en vertu de la distributivité de $\times$), la multiplication $\times_2$ est distributive sur l'addition produit. Ainsi, A^2 est un pseudo-anneau dès que A en est un. Si, de plus, A est unifié, alors la question 4 montre que A^2 l'est également.

² on sait qu'on doit l'obtenir puisque $\times$ doit être distributif d'après l'énoncé : $0a = 0(a + 0) = 0a + 0^2$ (idem de l'autre côté)

- (b) Dans le cas où A est le corps des réels, nous pouvons donner l'inverse $\frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ d'un élément $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul car la somme de deux carrés non tous nuls est toujours non nul ; on voit bien que cela n'a rien de général, comme le montre le contre-exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lorsque $A = \mathbb{C}$. Expliquons en quoi ce contre-exemple est le "seul" possible : on va montrer que A^2 est intègre ssi l'implication $a^2 + b^2 = 0 \implies a = b = 0$ est vérifiée³ pour tous $a, b \in A$.

Supposons A^2 non-intègre. Il y a donc deux vecteurs non nuls de produit nul, mettons $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-by \\ ay+bx \end{pmatrix}$. La première coordonnée montre la colinéarité des vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, mettons $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour un scalaire $\lambda \neq 0$ dans le corps des fractions de A . La seconde coordonnée donne alors $0 = \lambda(a^2 + b^2)$, d'où $a^2 + b^2 = 0$. Réciproquement, si A possède deux scalaires λ et μ non tous nuls de somme nulle, alors on aura $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, infirmant l'intégrité de A^2 .

Finalement, l'intégrité (ni le fait d'être un corps) ne passe pas de A à A^2 .

- (c) D'après la question 3, en supposant A muni d'un neutre, A^2 en sera muni ssi 0 est absorbant, ce qui peut être infirmé en prenant pour $\times$ l'addition de A (et ce dernier non nul).

D'après la question 2, la présence d'un absorbant dans A^2 équivaut à l'absorbance de 0 , mais qui nous dit qu'un absorbant est nécessairement nul ? C'est faux en général dans n'importe anneau non nul : piocher un élément $o \neq 0$ dedans, puis définir tous les produits contenant un o comme étant égaux à o et les autres à 0 . (Alors o est un absorbant distinct de 0 , donc 0 ne peut être absorbant.)

Pour terminer, vues les questions 2 et 3, les existences d'un neutre *et* d'un absorbant passeront de A à A^2 ssi 0 est absorbant, ce qui peut être évité dès que A est non nul : prendre un $o \neq 0$ dedans, définir $0a = a0 = a$ pour tout a et poser $ab = o$ si $0 \notin \{a, b\}$, de sorte que o est l'absorbant (bien vérifier qu'il absorbe 0).

Finalement, admettre un neutre (resp. un absorbant) (resp. les deux) ne passe pas de A à A^2 (dès que A est non nul).

- (d) D'après la question 4, l'associativité ne passera pas de A à A^2 si l'on n'a pas en plus la distributivité sur AA (prendre le même contre-exemple $\times = +$ que ci-dessus (avec $A \neq 0$), de sorte qu'une égalité $a(b+c) = ab+ac$ ne sera jamais vérifiée pour $a \neq 0$). En revanche, comme le montre la question 5.a, la distributivité, elle, passera, tout comme l'associativité *et* la distributivité à la fois.

6. Au vu de ce qui précède, il est plus que pratique que supposer l'absorbance de 0 , laquelle est automatique les (semi-)anneaux, avec ou sans unité.

Remarques pour insomniaques. Le lecteur féru de tétratomie pour lever l'hypothèse $0^2 = 0$ et regarder ce qui se passe. Il pourra montrer que

1. A^2 possède un absorbant ssi les multiplications par 0 et $0^2 + 0^2$ sont constantes et égales, l'absorbant étant alors $(0, 0^2 + 0^2)$;
2. A^2 possède un neutre ssi les trois conditions suivantes sont vérifiées :
 - (a) il y a un élément $u \in A$ tel que multiplier par u revient à additionner 0^2 ;
 - (b) les (deux) multiplications par 0 sont constantes ;
 - (c) $0^2 + 0^2 = 0$ (le neutre étant alors $(u, 0)$).

En guise de commentaire, on observera que : la présence d'un neutre implique toujours celle d'un absorbant ; si doubler est injectif, on retombe dans le cas $0^2 = 0$; si $\times$ est associative, la présence d'un neutre pour $\times_2$ impliquera celle d'un neutre pour $\times$.

Quant à l'associativité de A^2 , on peut montrer⁴, en notant $K := 0^2 + 0^2$, qu'elle implique que les doubles des multiples de 0 et de K sont tous égaux à K . Nous aimerions bien en déduire l'absorbance de 0 (ou du moins l'égalité $0^2 = 0$) mais n'y parvenons pas. Y aurait-il un contre-exemple ?

³on laisse le lecteur montrer que cela revient à l'inexistence de racines au polynôme $X^2 + 1$

⁴En prenant $(a, u, x) = (b, v, y)$ dans les deux égalités de la question 2, on obtient $a0 + (2au)x = 0x + a(2ux)$ et $a(2ux) + a0 = 0x + (2au)x$, d'où en sommant puis simplifiant par $(2au)x$ et $a(2ux)$ l'égalité $2(a0) = 2(0x)$. En prenant $u = 0$ dans les deux égalités qui précèdent (on a échangé les membres de la seconde), on en déduit $a0 + Kx = 0x + aK$ et $0x + Kx = aK + a0$, d'où en sommant puis simplifiant par $0x$ et $a0$ l'égalité $2Kx = 2aK$.