# Combinatoire
# (version chantier)

Marc SAGE

3 décembre 2006

## Table des matières

La *correspondance terme à terme* consitue une technique de première importance car elle permet d ecomparer des quantités que le simple regard ne permet pas de distinguer [...] En associant à chaque élément du premier ensemble un élément du second, on constitue un nouvel ensemble de couples. Il n'est pas nécessaire de savoir compter pour constater que [tel ensemble] est plus nombreux que [tel autre].

Bernard Duvillié, *l'emergence des mathématiques*, coll. Ellipses, p. 12-13

L'environnement et la culture ont été déterminant dans le choix des objets utilisés pour *compter*. Les tribus qui vivaient régulièrement au bord de la mer ont naturellement adopté les coquillages abondant sur les rivages. [...] En d'autres lieux, ce sont les osselets, des petits cailloux, des dents ou des griffes d'animaux qui ont servi d'unité de compte.

Une nouvelle étape est franchie avec l'avènement du langage oral. Des mots apparaissent pour désigner des groupements d'objets de même nature. Notre propre langue en offre de nombrux exemples : trimestre (trois mois), quadrupède (animal à quatre pattes), quintette (cinq musiciens), etc. LE nombre est encore inhérent à l'objet considéré. Au stade suivant, les mots numériques désignent les collections de coquillages, de cailloux ou les parties du corps qui interviennent pour exprimer les quantités dans le cadre de la correspondance terme à terme. Ils sont initialement peu nombreux, mais constituent un premier pas vers *l'énumération* et la *numération*. Ce sont probablement ces ensembles-types qui ont été à l'orgine de la désignation des premiers nombres.

CALCULER : maniupler des calculs=peitts cailloux, c'est donc COMBINER.

On notera indifféremment le cardinal d'un ensemble $A$ par

$$\operatorname{Card} A = \operatorname{card} A = \# A = |A|.$$

Insistons sur le sens de ***cardinalité*** à distinguer du cardinal : cela indique une *propriété*, à savoir de possèder tel cardinal. A proprement parler, la cardinalité 18 dénote la propriété "être de cardinal 18" tandis que le cardinal 18 dénote l'objet en commun que l'on peut attribuer aux objets posédant la cardinalité 18.

Pour des ensembles noté en extension avec $\{\}$, on évitera la notaion $||$.

notaion $|A|$ :comme valeur aboslue, on oublie tous sauf la taille.

Le complémentaire d'une partie $A$ dans un ensemble $E$ sera noté ${}^cA$ ou $\overline{A}$.

On rappelle également que la notation $\coprod$ signifie union disjointe, ce qui permet d'évaluer les cardinaux

$$\operatorname{Card} \coprod A_i = \sum \operatorname{Card} A_i.$$

$a_1, ..., a_n$ distincts $\iff \operatorname{Card} \{a_1, ..., a_n\} = n$

être fini, c'est être nuérotable. Or, numérotation = corresponance objets-numéro = bjection ensemble $[1, n]$.

# 1 Intro

lemmes débile : $[1, a] \simeq [1, b] \iff a = b$, $|A \setminus \{a\}| = |A| - 1$.
$\sum_{a \in A} 1 = A$

# 2 principes

formule sommes, bergers, et bij.

lemme bergers : c'est un corollaire de $A = \biguplus_{b \in B} f^{-1}(\{b\})$ (partition de la re canoniquement associée à $f$)
Expliquer avec des moutons!

crible : introduire les développemnt dans l'anneau $\mathbb{C}^X$ pour former les fonction symélémnentaires.

# 3 Formule du crible, formule de Poincaré ou principe d'inclusion-exclusion

## 3.1 Énoncé - démonstration

Nous savons tous que, si $A$ et $B$ sont deux ensemble finis, on peut écrire

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Si on applique cette formule à $A$ et $B \cup C$ où $C$ est un troisième ensemble fini, on trouve

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 \end{aligned}$$

où $\sigma_k$ est la somme des cardinaux des intersections de $k$ parties disjointes parmi $A, B, C$. On intuite ainsi une formule générale suivante

**Formule de Poincaré.**
*Pour $A_1, ..., A_n$ finis, le cardinal de l'intersection des $A_i$ est donné par la somme alternée des cardinaux des intersections de $k$ parties $A_i$ distinctes lorsque $k$ varie :*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{|I|=k} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < ... < i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap ... \cap A_n| \end{aligned}$$

*Noter l'analogie avec la proposition qui permet de développer le produit $\prod (1 + a_i)$.*

**Démonstration.**
On introduit les fonctions caractéristique des $A_i$ vues comme partie de leur réunion notée $E$. On va utiliser toutes les propriétés des $\chi_{A_i}$ :

$$\begin{aligned} 1 - \chi_{A_1 \cup ... \cup A_n} &= \chi_{\,^c(A_1 \cup ... \cup A_n)} = \chi_{\,^cA_1 \cap ... \cap \,^cA_n} = \chi_{\,^cA_1} ... \chi_{\,^cA_n} = \left(1 - \chi_{A_1}\right) ... \left(1 - \chi_{A_n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_k \left(\chi_{A_1}, ..., \chi_{A_n}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{|I|=k} \prod_{i \in I} \chi_{A_i} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{|I|=k} \chi_{\bigcap_{i \in I} Ai}. \end{aligned}$$

Sommer sur $E$ donne alors la formule voulue.

**Remarque.** Étant donné un ensemble $E$ fini, on appelle *mesure* sur $\mathfrak{P}(E)$ toute application $\mu : \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\mu(A \amalg B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour toutes parties disjointes $A$ et $B$ de $E$. On voit ainsi que l'application Card est une mesures sur $\mathfrak{P}(E)$. Elle possède en outre la propriété d'invariance sous l'action de $\mathfrak{S}_E$, à savoir $|A| = |\sigma(A)|$.pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$ et pour toute partie $A \subset E$. En fait, le cardinal est la seule mesure (à une constante multiplicative près) invariante sous l'action de $\mathfrak{S}_E$. En effet, l'invariance montre que tous les singletons ont même image (disons $C$), puis la propriété d'additivité montre que l'image d'une partie $\{a_1, ..., a_n\} = \{a_1\} \sqcup \{a_2\} \sqcup \cdots \sqcup \{a_n\}$ vaut $n$ fois $C$.

Donnons trois exemples pour illustrer l'utilité (incontestable) de cette formule

### 3.2 Calcul de l'indicatrice d'Euler

Soit $\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition d'un entier $n \geq 2$ en facteurs premiers. Rappelons que l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ compte le nombre d'entiers de $\{1, ..., n\}$ premiers avec $n$.

Pour compter ces derniers, on va dénombrer leur complémentaire. Être premier avec $n$ signifie être premier avec tous les $p_i$, donc ne pas être premier avec $n$ signifie être un multiple d'un des $p_i$. Comme on ne s'intéresse qu'aux entiers compris entre 1 et $n$, les ensembles $A_i$ des multiples de $p_i$ qui sont $\leq n$ ont pour réunion le complémentaire des nombres que l'on cherche à compter.

Il reste à appliquer la formule du crible. Observer d'une part que, être dans l'intersection de $A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}$ revient à être multiple de $p_{i_1}...p_{i_k}$ (et être $\leq n$), d'autre part que que le nombre de multiples d'un entier $a$ plus petits qu'un entier $M$ est $\left\lfloor \frac{M}{a} \right\rfloor$ (un tel multiple s'écrit $ak \leq M$ avec $k \leq \frac{M}{a}$). On peut donc écrire :

$$|A_1 \cup ... \cup A_r| = \sum_{i=1,...,r} \frac{n}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} + ... + (-1)^{r-1} \frac{n}{p_1 ... p_r},$$

d'où la formule recherchée

$$\varphi(n) = n \left( 1 - \sum_{i=1,...,r} \frac{1}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} + ... + (-1)^r \frac{1}{p_1 ... p_r} \right) = n \prod_{i=1}^{r} \left( 1 - \frac{1}{p_i} \right).$$

### 3.3 Nombre de dérangements

On appelle *dérangement* d'un ensemble $E$ tout application $E \longrightarrow E$ sans point fixe.

On regarde le cas $E = \{1, ..., n\}$. Comme précédemment, on compte les dérangement selon leur complémentaire. En effet, ne pas être un dérangement revient à fixer un certain élément, donc en notant $A_i$ les permutations fixant (au moins) le point $i$, on compte les éléments de $\mathfrak{S}_n$ privé de $A_1 \cup ... \cup A_n$.

Pour appliquer la formule du crible, on observe que être dans $A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}$ revient à fixer les $k$ points $i_1, ..., i_k$, ce qui laisse le choix pour permuter les $n-k$ points restants, d'où $|A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}| = (n-k)!$. Cela fournit

$$\begin{aligned} |A_1 \cup ... \cup A_n| &= \sum_{i=1,...,n} (n-1)! - \sum_{i<j} (n-2)! + ... + (-1)^{n-1} \\ &= \binom{n}{1} (n-1)! - \binom{n}{2} (n-2)! + ... + \binom{n}{n} (-1)^{n-1} \\ &= \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{n!}{n!}, \end{aligned}$$

d'où le nombre de dérangements

$$D_n = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

On en déduit la probabilité pour qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ prise au hasard soit un dérangement :

$$p_n = \frac{D_n}{|\mathfrak{S}_n|} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

On reconnaît le développement tronqué de $\exp(-1)$. Ainsi, si une infinité (dénombrable) de personnes viennent assister à une réunion en laissant leur parapluie au vestiaire et repartent en en reprenant un au hasard, la probabilité pour qu'aucun membre de notre infinité de personnes ne remparte avec son parapluie est

$$\lim p_n = \frac{1}{e} \simeq 0,368.$$

### 3.4 Nombre de surjections

On veut dénombrer les surjections de $\{1, ..., a\}$ vers $\{1, ..., b\}$ où $a$ et $b$ sont des entiers naturels.

Toujours comme précédement, ne pas être surjective revient à ne pas atteindre un point $i$ dans $\{1, ..., b\}$, d'où un ensemble $A_i$ associé. Ensuite, être dans $A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}$ revient à ne pas atteindre les $k$ points $i_1, ..., i_k$, ce qui fait $b - k$ choix pour chaque point au départ. Il en résulte

$$|A_1 \cup ... \cup A_b| = \sum_{i=1,...,n} (b-1)^a - \sum_{i<j} (b-2)^a + ... + (-1)^{b-1} (b-b)^a$$

d'où le nombre de surjections de $\{1, ..., a\}$ dans $\{1, ..., b\}$ :

$$s_{a,b} := b^a - \binom{b}{1} (b-1)^a + \binom{b}{2} (b-2)^a - ... + (-1)^b \binom{b}{b} (b-b)^a .$$

une interversion $\sum \sum$ revient à sommer sur deux partitions différentes du domaines, l'indice du premier $\sum$ paramètre le sous-domaine sur lequel on somme dans le second $\sum$ : si $D = \coprod D_i$, $\sum_i \sum_{D_i}$.

Pourquoi intervertir ? pour factoriser des choses différentes —> sommer à puissance constante. Faire le calule formel de $e^a e^b = e^{a+b}$ pour des nilpotents.

Number of partitions of a set of n labeled elements

Also the number of equivalence relations in (alternatively, or the number of partitions of) a set of n elements.

a(n+1) = the number of binary relations on an n-element set that are both symmetric and transitive. - Justin Witt (justinmwitt(AT)gmail.com), Jul 12 2005

$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}$[Dobinski] (EXO (cf fin cours) : s'arreter dès qu'on dépasse l'entier inférieur -> $2n$)

$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

# 4 Sur des bijections simples avec des espaces de fonctions

## 4.1 Fonctions caractéristiques

Soit $E$ un ensemble. On appelle *fonction caractéristique* d'une partie $A \subset E$ l'application

$$\chi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Remarquer par exemple que

$$\chi_E \equiv 1 \text{ et } \chi_\emptyset \equiv 0$$

(le symbole $\equiv$ veut dire "est constamment égal à"). La fonction caractéristique d'un singleton $\{a\}$ vaut 0 partout sauf en $a$ : on parle du *Dirac* en $a$ :

$$\chi_{\{a\}} = \text{Dirac en } a.$$

On observera également les propriétés

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B \text{ et } \chi_{\ ^cA} = 1 - \chi_A$$

où $^cA$ désigne le complémentaire de $A$. Enfin, le cardinal d'une partie $A$ s'exprime par

$$|A| = \sum_{x \in E} \chi_A(x) .$$

## 4.2 La bijection $\chi : \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \{0,1\}^E$

Rappelons que l'ensemble des applications de $A$ dans $B$ se note $B^A$ et a pour cardinal $|B|^{|A|}$ (cette formule devrait aider à ne pas intervertir $A$ et $B$).

Nous disposons d'une application qui à une partie $A$ de $E$ associe sa fonction caractéristique dans $\{0,1\}^E$ :

$$\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \chi_A \end{array} \right. .$$

Montrons que $\chi$ est en fait bijective.

**Propostion.**
*L'application* $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \chi_A \end{array} \right.$ *est une bijection d'inverse*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \{0,1\}^E & \longrightarrow & \mathfrak{P}(E) \\ f & \longmapsto & \{a \in E \ ; \ f(a) = 1\} \end{array} \right. .$$

**Démonstration.**
Notons $\phi$ l'application ci-dessus et vérifions que $\left\{ \begin{array}{c} \phi \circ \chi = \mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(E)} \\ \chi \circ \phi = \mathrm{Id}_{\{0,1\}^E} \end{array} \right.$, ce qui concluera.

Soit $A$ une partie de $E$ : on a

$$\phi \circ \chi(A) = \phi(\chi_A) = \{a \in E \ ; \ \chi_A(a) = 1\} = A.$$

Ceci tenant pour tout $A \subset E$, on a montré $\phi \circ \chi = \mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(E)}$.

Soit maintenant $f$ une application de $\{0,1\}^E$ : pour un $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} [\chi \circ \phi(f)](x) &= \chi_{\{a \in E \ ; \ f(a)=1\}}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in \{a \in E \ ; \ f(a) = 1\} \\ 0 \text{ si } x \notin \{a \in E \ ; \ f(a) = 1\} \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } f(x) = 1 \\ 0 \text{ si } f(x) \neq 1 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } f(x) = 1 \\ 0 \text{ si } f(x) = 0 \end{array} \right. = f(x). \end{aligned}$$

Ceci tenant pour tout $x \in E$, on a montré $\chi \circ \phi(f) = f$, et ceci pour tout $f \in \{0,1\}^E$, d'où $\chi \circ \phi = \mathrm{Id}_{\{0,1\}^E}$.

**Corollaire.**
*Si $E$ est fini, alors* $|\mathfrak{P}(E)| = 2^{|E|}$.

**Démonstration.**
D'après le théorème précédent, $\mathfrak{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$ sont en bijection, donc ont même cardinaux, d'où

$$|\mathfrak{P}(E)| = \mathrm{Card}\left(\{0,1\}^E\right) = (\mathrm{Card}\,\{0,1\})^{\mathrm{Card}\,E} = 2^{|E|}.$$

La fonction Card devient $\sum_{x \in E} \langle \cdot, x \rangle$ où $f(x)$ ets noté $\langle f, x \rangle$

Cette bijection transporte le $+$ et $\times$ de $\{0,1\}^E$ vers $P(E)$ en $\Delta$ et $\cap$, transporant la structure avec.

## 4.3 Le point de vue des unions disjointes

Une partie de $E$ peut être vue comme une union disjointe ${}^cA \sqcup A = E$, de sorte que la bijection ci-dessus devient

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \left\{(A,B) \in \mathfrak{P}(E)^2 \ ; \ A \sqcup B = E\right\} & \xrightarrow{\sim} & \{1,2\}^E \\ (A,B) & \longmapsto & x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 2 \text{ si } x \in B \end{array} \right. \\ \left(f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{2\})\right) & \longleftarrow & f \end{array} \right. .$$

Présenté sous cet angle, il devient aisé de généraliser à une union disjointe d'un nombre quelconque de parties

$$\begin{cases} \{(A_1, A_2, ..., A_n) \in \mathfrak{P}(E)^n \ ; \ A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n = E\} & \xrightarrow{\sim} & \{1, 2, ..., n\}^E \\ (A_1, A_2, ..., A_n) & \longmapsto & x \mapsto \text{le } i \text{ tel que } x \in A_i \\ \left(f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{2\}), ..., f^{-1}(\{n\})\right) & \longleftarrow & f \end{cases}$$

et même à une union disjointes indexée par n'importe quel ensemble $I$

$$\begin{cases} \left\{(A_i) \in \mathfrak{P}(E)^I \ ; \ \bigsqcup_{i \in I} A_i = E\right\} & \xrightarrow{\sim} & I^E \\ (A_i) & \longmapsto & x \mapsto \text{le } i \text{ tel que } x \in A_i \\ \left(f^{-1}(\{i\})\right)_{i \in I} & \longleftarrow & f \end{cases}.$$

Ainsi tombe, pour $E$ et $I$ finis, le nombre d'unions disjointes de $E$ en $|I|$ parts : $|I|^{|E|}$ (intuitivment, chaque élément de $E$ a $|I|$choix pour sa part)

## 4.4 Sur les recouvrements

Se donner un recouvrement en $p$ parts $A_i$ revient à se donner une union disjointe de $2^p - 1$ parts : on récupère les parts formées des éléments appartenant à un $A_i$ exactement ($p$ choix), puis à deux $A_i$ exactement ($\frac{p(p-1)}{2}$ choix), etc., ce qui donne $\binom{p}{1} + \cdots + \binom{p}{p} = 2^p - 1$ choix. Formellement :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{recouvrements à } p \text{ parts}\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{union disjointe en } 2^p - 1 \text{ parts}\} \\ (A_1, ..., A_p) & \longmapsto & \left(\bigcap_{i \in I} A_i \Big\backslash \bigcup_{i \notin I} A_i\right)_{\emptyset \subsetneq I \subset [1,p]} \\ \left(\bigcup_{1 \in I} B_I, \bigcup_{2 \in I} B_I, ..., \bigcup_{p \in I} B_I\right) & \longleftarrow & (B_I)_{\emptyset \subsetneq I \subset [1,p]} \end{array}$$

# 5 nombre bijection, injecstion, surections, projecters, parties

triangle Pascal : déjà connu avant des arabes ; Ibn Mun$^c$im (XII-XIIIe). Son successeur Ibn al-Bannā explicite les binomiaux ;

Introduire la notation $n^{\downarrow k} := \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}_{k \text{ termes}}$.

POur les binomiaux, on pose pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \geq 0$ $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{\downarrow n}}{n!}$, prononcé $n$ parmi $\alpha$ (en haut on fait le produit de $n$ termes).

Il faut connaire $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{1} = \alpha$, $\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$.

Lorsque $\alpha \in N$, $\binom{\alpha}{n}$ compte le nomvre de partie à $n$ éléments choisis parmi $\alpha$. Ainsi, il est nul pour $n > \alpha$.

On peut écrire $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ comme intermédiaire de calcul (et seulement pour $0 \leq p \leq n$), mais jamais pour calculer effectivmen (on a rajouté plein de termes !). Exemple $\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 12 \cdot 66$.

Pour $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$, formule récurrence, et $\sum \binom{n}{p} = 2^n$, deux démo à chaque fois : calcul puis combi (faire aussi Vandermonde !)

Rappeler bij entre partie finis et $n$-uplet ordonnés.

eg : chemins de Dyck.

Pour le nombre $S_{p,n} := \#\left\{E_p \twoheadrightarrow E_n\right\}$, on montre que

$$S_{p,n} = n\left(S_{p-1,n} + S_{p-1,n-1}\right).$$

Le terme $S_{p-1,n}$ correspondent au cas où toutes les fibres sont de card $> 1$, le $S_{p-1,n}$ au cas où il y a un antécédent tout seul.

#surj par crible

idempotent : choisir l'image (où on vaut Id), puis chosir l'iamge du reste dans cette image : $\sum_0^n \binom{n}{k} k^{n-k}$

# 6 Pour le cardinal des puissances

Lemme.

$$\left\{\begin{array}{l} A \overset{f}{\simeq} A' \\ B \overset{g}{\simeq} B' \end{array}\right. \implies B^A \simeq B'^{A'}.$$

Dem.

Considérer l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} B^A & \longrightarrow & B'^{A'} \\ u & \longmapsto & g \circ u \circ f^{-1} \end{array}\right. .$$

Proposition.

Soient $A$ et $B$ deux ensembles finis. On a

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|}.$$

Dem.

Si $A = \emptyset$, alors $B^A$ contient uniquement l'application vide à valeurs dans $B$, d'où

$$\left|B^A\right| = 1 = |B|^0 = |B|^{|A|}.$$

Si $B = \emptyset$ et $A \neq \emptyset$, alors $B^A = \emptyset$ et

$$\left|B^A\right| = 0 = 0^{|A|} = |B|^{|A|}.$$

Notons $p := |A|$ et $q := |B|$. On suppose à présent $p \geq 1$.

D'après le lemme, il suffit de montrer que Card $\left([0, q[^{[1,p]}\right) = q^p$. On considère pour cela l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} [0, q[^{[1,p]} & \longrightarrow & [0, q^p[ \\ \overrightarrow{n} & \longmapsto & \sum_{i=1}^p n_i q^{i-1} \end{array}\right. .$$

Comme tous les $n_i$ tombent dans $[0, q[$, on obtient une décomposition en base $q$, qui est unique, d'où l'injectivité. Pour la surjectivité, tout entier $k \in [0, q^p[$ se décompose en base $q$ sous la forme $k = \sum_{i \geq 1} n_i q^{i-1}$. Pour montrer que les termes d'indices $i > p$ sont nuls, il suffit d'observer les implications

$$n_i \neq 0 \implies k \geq q^{i-1} \implies q^p > k \geq q^{i-1} \implies q^p > q^{i-1} \implies p > i-1 \implies i \leq p.$$

bcp + joli : on fait $|A \times B| = |\coprod \{a\} \times B| = \sum_{a \in A} |B| = |A|\,|B|$, puis bijection $\left\{\begin{array}{ccc} B^A & \longrightarrow & B^{|A|} \\ f & \longmapsto & \left(f\left(a_1\right), ..., f\left(a_p\right)\right) \end{array}\right.$, puis récurrence.

# 7 Dirichlet

Si $|E| > |F|$, une appliation $f : E \longrightarrow F$ n'est jamais injective
–> exemple dans solutions d'experts, cours francinou, autres...

# 8 Dénombrabilité

Enumérable
$A$ au plus dénombrable ssi $A \hookrightarrow \mathbb{N}$ ssi $\mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ (gaffe $A \neq \emptyset$) ssi équipotent à une partie de $N$
$A$ infni est dénombrable ssi $A \hookrightarrow \mathbb{N}$
$Z$ dénombrable : recoller les bijection $n \longmapsto 2n$ et $-n \longmapsto 2n+1$. Ou alors envoyer $n \longmapsto 2^n$ et $-n \longmapsto 3^n$.
$N \times N$ dénombrable : bijection $(a,b) \longmapsto a + T_{a+b}$ (où $T_n = \binom{n+1}{2} = n^{\text{e}}$ nb triangulaire $m : 0, 1, 3, 6, 10...$). Composée de $(a,b) \longmapsto (a, a+b)$ et $(a,s) \longmapsto a + T_s$. La première est clairement bijec sur $\{(a,s)\ ;\ a \leq s\}$, montrons la bij de la seconde (réciproque : $n \in [T_s, T_{s+1}[ \mapsto (n - T_s, s)$). Si $s < s'$, on aura $a + T_s \leq s + T_s = f(s+1)??? \leq f(s') = T_{s'} \leq a' + T_{s'}$, et à $s$ fixé l'injectivité est claire. PLus rapide : $(a,b) \longmapsto 2^a(2b+1)$.
AUTRE DEM (pas d'exposant) : Montrons que $i := \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a,b) & \longmapsto & a + (a-b)^2 \end{cases}$ est injective. Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$ tels que $i\binom{a}{b} = i\binom{\alpha}{\beta}$, ce qui se réécrit $(a-b)^2 = \delta(\delta+1)$ en notant $\delta := \alpha - \beta$. Les entiers $\delta$ et $\delta+1$ ont alors pour produit un carré et sont premiers entre eux, donc chacun d'eux est un carré ; les seuls carrés consécutifs étant 0 et 1, on en déduit $\{\delta, \delta+1\} = \{0,1\}$, d'où d'une part $\delta = 0$ (çed $\alpha = \beta$), d'autre part $(a-b)^2 = 0 \cdot 1$ (çed $a = b$).

Surpirse : Q dénom : $Q = (r_n)_{n \in N}$. On peut dessine une salve $Z$ pour les dénom =1, une salve de pas motité pour les dénom =2, une salve de pas tiers pour les denom =3, etc...
Application : pas besion de AC sur $Q$, on prend le plus petit rationnel au sens du bon ordre de $N$ transporté.
–> ordre dans raisonnements divins
Traiter $R \simeq P(N)$ pour parler de l'hypothèse du continu ?

Et pour montrer que $Q$ est dénombrable, il te faut au moins AC_dén, non ?
Mais comment peux-tu avoir des idées aussi saugrenues ? Tu arrives bien à énumérer $Q$ explicitement, non ? Et si c'est explicite, c'est que ça n'utilise pas d'axiome du choix...

il me semble qu'un message récent de David me signalait que pour montrer qu'une partie infinie s'injectant dans N était dénombrable, il fallait au moins du $AC_{dén}$
Non (et David n'a certainement pas dit ca). Si $X$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, il y a une unique bijection croissante de $X$ avec $\mathbb{N}$, et pas besoin de choix pour montrer ca bien sur.

$R$ n'est pas dénombrable. MOntrons que l'ensemble $A$ des réels de $[0,1]$ dont un développement en base 3 ne contient que 0 ou 1 (si base 2, il n'y pas unicité) n'est pas dénombrable. Si $\exists f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$, notons $f(n) = 0, a_1^n a_2^n...$ et posons $a := 0, \overline{a_1^1 a_2^2}...$ où la barre échange 0 et 1. Alors $a$ ne peut être atteint.

# 9 Divers

On se donne deux entiers naturels $k$ et $n$. En développant $(n+1)^k$, donner un moyen de calculer $1^k + 2^k + ... + n^k$ par récurrence –> trouver pour $k = 1, 2, 3$.

Notons $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ le nombre de partitions (sans ordre) d'un ensemble à $n$ éléments en $k$ classes (nombre de Striling de deuxième espèce, la notation est due à Karamata). oN peut montrer que

$$\begin{Bmatrix} n+1 \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

en comptant les partiions contenant ou pas un élément fixé.On a clairement, $\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1$.

En dénombrant les applicatino de $[1, n]$ dans $[1, k]$ selon le cardinal de l'image, on trouve $k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} i! \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}$, d'où par Pascal

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

En sommant les $k^n$, on trouve :

$$\begin{aligned} 1^k + 2^k + ... + n^k &= \sum_{p=0}^{n} p^k = \sum_{p=0}^{n} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} i! \begin{Bmatrix} k \\ i \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n} i! \begin{Bmatrix} k \\ i \end{Bmatrix} \underbrace{\sum_{p=i}^{n} \binom{p}{i}}_{= \binom{n+1}{i+1}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i+1} i! \begin{Bmatrix} k \\ i \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Plus rapide : EN comptant $\# \left\{ \overrightarrow{a} \in [0, n]^k \ ; \ a_0 > \max a_i \right\}$ à $a_0$ fixé, on trouve $1^k + 2^k + ... + n^k$. à $\# \{a_1, ..., a_k\}$ fixé, il faut choisir ces $i$ éléments ainsi que $a_0$, ce qui se fait en $\binom{n+1}{i+1}$ choix, ensuite une partitions (ordonnée) de $[0, k[$ en $i$ parts nous dit qui va où. Finalement :

$$1^k + 2^k + ... + n^k = \sum_{i=1}^{k} \binom{n+1}{i+1} i! \begin{Bmatrix} k \\ i \end{Bmatrix}.$$

Pourquoi la somme ne va pas jusuq'au même indice ? Ben les $i > k, n$ apportent une contribution nulle.

(rq : rien de sert de remplacer $\begin{Bmatrix} k \\ i \end{Bmatrix}$ par la somme explicite, car les deux formeles mélangée viennent d'une seule : on la somme ou on la pascalise)

En fait, on a une formule explicite à l'aide des nombres de Bernoulli due à Faulbaher :

$$1^{k-1} + 2^{k-1} + ... + (n-1)^{k-1} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} B_{k-i} \binom{k}{i} n^i.$$

Bijection entre suites entières croissnates et stt coirssantes : faire $+\mathrm{Id}$

calcul effectifif des nombrse de Bell par $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n>0} \frac{n^k}{n!}$. Puisque le résultat est entier, il suffit de tronquer la série assez loin. On montre que $2k$ valeurs suffisent :

$$B_k = \left\lceil \frac{1}{e} \left( \frac{1^k}{1!} + \frac{2^k}{2!} + \cdots + \frac{(2k)^k}{(2k)!} \right) \right\rceil.$$

Posons $u_n := \frac{n^k}{n!}$ et $N := 2k$. Mq $\frac{1}{e} \sum_{n \geq N} u_n < 1$.
On a $\frac{u_{N+p}}{u_N} = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^k \frac{1}{(N+p)^{\downarrow p}} \leq \frac{\left(1+\frac{p}{n}\right)^k}{N^p} \leq \frac{\left(1+\frac{p}{n}\right)^N}{N^p} \leq \frac{e^p}{N^p} = \left(\frac{e}{N}\right)^p$.
Donc $\sum_N^{N+x} u_n = u_N \sum_{p=0}^{x} \frac{u_{N+p}}{u_N} \leq \frac{u_N}{1-\frac{e}{N}} \overset{?}{<} e$ ssi $\frac{N^k}{n!} \overset{?}{<} e - \frac{e^2}{N}$. Or,

$$\frac{N^k}{N!} = \frac{2^k}{k!} \frac{k^k}{(k+1)^{\uparrow k}} < \frac{2^k}{k!} < \frac{2^k}{2^k} = 1 \overset{?}{<} e - \frac{e^2}{N}$$

ok si $2,5 - \frac{9}{n} \overset{?}{>} 1$ ssi $1,5 \geq \frac{9}{N}$ ssi $N \geq \frac{9}{3/2} = 6$, ok car $k \geq 3$.

# 10 Vers les cardinaux infinis

on écrit $|A| = |B|$ si $A$ et $B$ sont en bijection. Cohérent avec le cas finis.

On prolonge les relations

$$\begin{aligned} |A| + |B| &: = \mathrm{Card}\left[(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})\right] \\ |A|\,|B| &: = |A \times B| \\ |B|^{|A|} &: = \left|B^A\right| \end{aligned}$$

il faut vérifier les trucs cons comme $A \simeq A'$ et $B \simeq B'$ implique $A \times B \simeq A' \times B'$.

On met un ordre $\hookrightarrow$, qui est antiref par cantor Bernstein, total par Zorn.

On peut alors définir les ensembles finis commes les ensembles $A$ tq $|A| < |A| + 1$