Relations binaires
(version chantier)

Marc SAGE

18 octobre 2007

Table des matières

Faire une prépa scienfique n'est pas une excuse pour être inculte en latin : les pluriels de maximum, minimum et extremum sont respectivement maxim**a**, minim**a** et extrem**a** (pas de s).

Bon, le TLF dit extremums est toléré (cf quel dico ? ? ?)

nouveaux usages terminologiques

ensemble muni d'une relation : ensemble ***relié***

morphisme d'ensemble reliés : $f : A \longrightarrow B$ tel que $aRa' \implies f(a)\,T f(a')$.

pour affirmer $a \leq b$, rq SB : "venir avant" pluôt que "être plus petit que". Donc pas ~~inégalité~~, idéalement ***ordination*** (sans doute ***comparaison*** en pratique)

1 Relations d'ordre

def

not : $a \leq b, c, d$ pour dire a plus petit que b, c et d.

élémens comparables, ordres total/partiel

exemple :

$\leq$ usuels sur N, Z, Q, R (total)

$|$ sur N, N^*, Z (partiel)

$\subset$ sur $P(E)$ (partiel sauf si E a un ou zéro élément) (notation $\subseteq$? plus cohérente, mais $\subset$ au sens strict bien moins utilisé (le concept, pas la notation)). Si on parle d'ordre directe (on rajoute juste un élément), on obtient un cube (un bit de différence au niveua des fonctionas carac)

correpsondance ordre strict/large

prolongement sur $\text{Fonc}(A, B)$

ordres produit : toujours partiels.

cas particulier : si E ordonné, E^X ordonné partiellement (sauf si X a un ou zéro éléments). Eg : $\subset$ est ordre produit transporté par χ.

ordre lexicogrpahique : intere^t : pourvoi se servir d'un dicotionnaire

EXO : *si E ordonné, $P(E)$ privé de $\emptyset$ est ordonné par $A < B \iff a < b\ \forall a \in A, \forall b \in B$*

EXO : *Mq les parties finies d'un ordre rdonnées par $\exists \hookrightarrow \geq Id$ forment un ordre.*

DEM : réfl (Id, et c'est le seul), transt (composer : $g \circ f \geq f \geq Id$), antisym : si $f : A \hookrightarrow B$ et $g : B \hookrightarrow A$, alors $g \circ f$ est un inj$\geq Id$, donc vaut Id_A, d'où $a = g(f(a)) \geq f(a) \geq a$, ce qui montre $f = Id$ et $A = B$.

(rq : antiref se disait *aliorelatif* chez Russell)

1.1 monotonie

histoire : pente de corde de graphe de foctions donne sens de variations. Ainsi, f croît ssi f préserve l'ordre. On garde cela comme définition.

Soit $f : E \longrightarrow F$ ordonnés. On dit que f est croissante (ou est un morphismes d'ensemble ordonnées) si ...

monotno si...

Exmple :

Id_E stricmtent pour $\leq$

complémentaire dans $P(A)$

partie entière croissante

$\cap$ et $\cup$ croissent de $P(A)^2$ dans $P(A)$ (pas Δ !)

$\times$ croît sur $P(E)^2$.

χ croît de $P(E)$ vers F_2^E (sttt car bij)

ordre de R est algèbrque -> morphismes addtifis croissant ?

sttt croisst $\iff$ croissant et inj (pour $\implies$ il faut ordre total)

eg : bij entre partie à n élméent et n-uplet striment croissants.

f, g mono de mêm sens => fg croît

f, g mono de sens contraire => fg décroît

f mono bij => f^{-1} mono de meme sens

Attention : $f < g$ n'eest pas la ngatin de $f \leq g$! C'est l'ordre produit induit par $<$.

Mmemonique : le sens de croissance d'une composée de monotone est déterminée par la règle des signes en associant $+1$ à la croissance et -1 à la décroissance.

1.2 majorant, minorant, max min

Définir tous les truc bas de $\leq$ par les trucs haut de l'ordre inverse $\geq$.

employer les notation $x \leq A$ pour s'habituer à remplacer mentalement un ensemble par ses éléments (c'est déjà le cas pour des relation ponctuelles de fonctions !)
maj pas unique du tout.
Si le max existe, c'est un majjorant. Si un majroant est dedans, c'est le max.
Le vide est majoré et minoré par tout le monde.

max/min notino intrinsque : pas besoin de sortir de son trou !

Rq : pour ensmble fini, trouver un max/min revient à en trouver pour une parttion puis à en prendre le min/max. On le montre en corollaire des sup.

1.3 sup inf

unique si exsite car min ou max
exemple : $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$.
inf $\leq$ sup (si non vide !) (premier raisonnent où on fixe une variable pour prendre un sup)
exemple : Dans E, les majorant et minorant de $\emptyset$ sont E, d'où $\begin{matrix} \sup \emptyset = \min E \\ \inf \emptyset = \max E \end{matrix}$ si ces derniers existent. Dans R : pour que inf et sup existe toujours, on peut rajouter $\pm\infty$ –> exemple des degré et valuation

le max est atteint : $\max \{a_i\} = a_{i_0}$, pas forcément le sup : $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{x \in Q \ ; \ x^2 \leq 2\right\}$, $\left\{a^2 + b^2 \leq 1\right\}$ pour ordre produit. Dans ces exemple, deux comportement : le sup "adhère" à l'ensebme, ou alors il a carrément un grand saut entre.
Caractérsation :
$s = \sup A \iff \begin{matrix} s \geq A \\ \forall s' < s, \ \neg(s' \geq A) \end{matrix} \overset{\leq \text{ total}}{\iff} \begin{matrix} s \geq A \\ \forall s' < s, \ \exists a, \ s' < a \end{matrix} \iff \begin{matrix} s \geq A \\ \forall s' < s, \ \exists a, \ s' < a \leq s \end{matrix}$. Pour se souvenir des inégalités, prendre $[0, 1] \cup \{2\}$ (la seconde partie nie "je suis un majorant")
cas réel (important : caracrétérisatin séqanuetielle) : $s = \sup A \iff s \geq A$ *et* $\exists (s_n) \longrightarrow s$ en croissant, stirecment si le sup n'est pas atteint

max existe ssi sup atteint, et alors max = sup.
Attention, sup d'un nombre fini d'élément nest pas forcément un max, car $\sup \{A, B\} = A \cup B$ dans $P(E)$. Mais valalbe si ordre est total, par récurrence sur le cardinal (anticipation sur cours combi)

Intérêt : faire sauter une dépendance (écrire s pour $\sup A$).
exo *: pour A partie de R, mq $d(A, \cdot)$ est 1-lipschizienne.*
exo : *montrer que* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ ($a + b \leq \sup A + \sup B$, donc $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$. De plus, $a + b \leq \sup(A + B)$, d'où $a \leq \sup(A + B) - b$, donc $\sup A \leq \sup(A + B) - b$, ie $b \leq \sup(A + B) - \sup A$, d'où $\sup B \leq \sup(A + B) - \sup A$)
exo : *mq si A^+ admet un inf, c'est un min (et donc A a un sup)* (soit $i = \inf A^+$; pour $a \in A$ et $m \in A^+$, on a $a \leq m$, d'où $a \leq \inf m = i$, donc $i \in A^+$)
Exo : *mq toute partie admet un inf ssi toute partie admet un sup* (soit $A \subset O$ et A^+ ses majorants ; il admet un inf i ; qui est un min d'après exo, d'où le sup ; pour la réciproqe, on appliqu ce qui rpécède à l'ordre inverse)

Atteentiont à "on prend le sup" : ca veut dire ttrouver un majorant, puis dire que le sup est le plus peti d'entre eux. Eg : montrer que $\sup(r^n \ ; \ r^n \text{ bornée}) = 1$.

PROP (associttivé du sup) *Soient A_i des parties d'un ordre admettant un sup. Alors $\bigcup A_i$ a un sup ssi $\{\sup A_i\}$ en a un et alors ils coïndent.*

DEM on mq les majorants sont les mêmes. Soit $m \geq \{\sup A_i\}$. Pour $a \in \bigcup A_i$, disons $a \in A_i$, on a $m \geq \sup A_i \geq a$, donc $m \geq \bigcup A_i$. Soit $m \geq \bigcup A_i$: pour $a \in A_i$, $m \geq a$, donc $m \geq \sup A_i$, donc $m \geq \{\sup A_i\}$.

COR (associativé (finie) du min) : *une partie a un min ssi il y a une partition finie en parts admettant chacue un min*

DEM : => prendre partition à une part. <= appliquer ce qui précède, un ensemble fini admettant toujours un min.

intervserinos $\sup\sup$: reparitionne domaine de sup (intuitino cas fini avec max)
on a aussi $\sup \bigcup A_i = \sup \sup A_i$.

sup inf d'une applcion ?

Rq important : si on veut de la marge, on peut dire $\exists \varepsilon > 0, \forall a \in A, a \geq \varepsilon$, mais cela est dire plus simplement $\inf A > 0$! ! ! Exemple de la moyenne géométriqe avec trois variables.

de même, dire $\max A \geq \alpha$ c'ets dire $\exists a \in A,\ a \geq \alpha$. Exemple : soit a_i des complexes. Montrer qu'il y a un complexe unitaire tq $\prod A_i M \geq 1$. C'est dire $\exists M \in S_1, |P(z)| \geq 1$, ou encore $\sup P \geq 1$, et ce sup est un max car S_1 compact.

1.4 familles

$\sup(a_i) := \sup\{a_i\}$.

Fixons (a_i) famille d'élémetns de E ordonné. Alors $\left\{\begin{array}{ccc} P(I) & \longrightarrow & E \\ J & \longmapsto & \sup_J a_j \end{array}\right.$ croît et $\left\{\begin{array}{ccc} P(I) & \longrightarrow & E \\ J & \longmapsto & \inf_J a_j \end{array}\right.$ décroît : dessin de segment emboités.

Cor important : (prendre $(a_i) = (e)_{e \in E}$) : dans $P(E)$, sup croît (on rajoute des élémenst, a fortiori vers le haut, donc le sup ne peut qu'agemnter) et inf décroit (si on rajoute des élémtns, on en rajoute en bas, donc l'inf décroit

$\left\{\begin{array}{ccc} E^I & \longrightarrow & E \\ (a_i) & \longmapsto & \sup a_i \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} E^I & \longrightarrow & E \\ (a_i) & \longmapsto & \inf a_i \end{array}\right.$ sont croissante : faire un dessin por $R^{[0,1]} \longrightarrow R$.

1.5 éléments maximaux minimaux

Si ordre total, notion coincdeitn
Attention : ce n'est pas parce qu'il y a un unique minimal qu'il est min $\{i\} \cup R^{++}$ produuit
minimaux de $N^{\geq 2}$ pour $|$ sont les premiers
minimaux de $P(A) \backslash \{\emptyset\}$ sont les singletons
dans $\mathrm{Func}(A, B)$, min=applicaiton vide, max = appliacaion de B^A.

Attention : min tq P n'est pas max tq non$P$ (même à ± 1 près) : il peut y avoir des trous (prendre 0 et $[3, \infty]$: 0 est le min dedans, mais 2 est le max pas dedans)

1.6 Du préodre à l'ordre

Soit $\leq$ un préordre sur un ensemble E. Est-ce que la relation passe au quotient de E par $a \sim b \iff a \leq b \leq a$? En d'autres termes, peut-on définir

$$\overline{a} \leq \overline{b} \iff a \leq b\,?$$

Il faut vérifier que $\left\{\begin{array}{l} a \sim a' \\ b \sim b' \end{array}\right. \implies (a \leq b \iff a' \leq b')$. Soient donc a, a', b, b' tels que $a' \sim a \leq b \sim b'$. On a donc $a' \leq a \leq b \leq b'$, d'où $a' \leq b'$, et de même dans l'autre sens.

1.7 Bons ordre

se donner les moyens d'ordonner les ensembles

exemple de N, se transportant sur tout ensemble dénombrble (attention, ordre induit pas nécesasirmen le meme, penser à Q), permettant de choisir sans AC

2 Relations d'équivalence

RQ : Si aucun élément n'est isolé, *réf est impliquée par sym et trans* (soit a, $\exists b$ tq aRb ou bRa, d'où les deux par symétrie et aRa par trans). Evidemment, pour mmontrer qu'un élément n'est pas isolé, on dit souvent qu'il est relié à lui-même, ce qui retire l'utilité de ce critère.

Z/nZ, Z, Q, $P^1(R)$, vecteurs comme classe de bipoints modulo avoir meme milieu, reca à une application (noter que $f^{-1}(\{b\}) = \overline{f}^{-1}(b)$, donc tout ça pourra être abusivment noté $f^{-1}(b)$), orientation de $\mathbb{R}^3$, signe de $\mathbb{R}^*$, angle dans $\mathbb{R}^2$, écrasement d'une partie ($x \sim y$ ssi $x, y \in A$ ou $x = y$)

Les classes partionnent **si l'ensemble de départ est non vide**

Une application $f : E \longrightarrow F$ préservant les re (çad un morphisme d'ensembles reliés) passe au quotient, et c'est une CNS pour que $f : {}^{E}/_{\sim} \longrightarrow {}^{F}/_{\sim}$ soit bien définie.

Eg : mod 6 => mod 2.

Un iso rigolo : dans $A \times B$, on voit A te B ; montrer ${}^{A\times B}/_{B} \simeq A$ et ${}^{A\times B}/_{A} \simeq B$. La notation du quotient prend du sens.

2.1 transformer un relation en une re

cf exo pour aller plus loin

A partir d'une relation R, construire la plus petit re contenant R.
Réflexivation : $R \longmapsto R \cup \{(a,a)\,;\ a \in A\}$
Symétrisation : $aR^{\natural}b$ ssi aRb ou bRa
Transitivation : $aR^{\longrightarrow}b$ si il y a $a = x_0$, x_1, ..., $x_n = b$ avec x_iRx_{i+1}

eg : si R ordre total, la re engendrée est tout $P(A)$

2.2 re produit

Soit $(E_i, \sim_i)$ une famille d'ensembles munis chacun d'une relation d'équivalence. On définit une relation binaire sur $\prod E_i$ par

$$(a_i) \sim (b_i) \iff \forall i,\ a_i \sim_i b_i.$$

C'est une relation réflexive, symétrique, transitive, donc une relation d'équivalence, appelé re **produit**.

L'application $\begin{array}{ccc} {}^{(\prod E_i)}/_{\sim} & \longrightarrow & \prod {}^{E_i}/_{\sim_i} \\ \overline{(a_i)} & \longmapsto & (\overline{a_i}) \end{array}$ est alors bien définie, injective, clairement surjective, donc est une bijection.

Si tous les $\sim_i$ sont les mêmes, la relation s'écrit dans E^X :$f = g \iff \forall x \in X,\ f(x) \sim g(x)$. Exemple : avoir même signe : la binjection dit que choisir le signe d'un fonction en tout point, c'est se donner une fontion qui donne le signe de chaque point.