Ensembles & applications
(version chantier)

Marc SAGE

20 septembre 2007

Table des matières

[1] On observera que l'adjectif *cartésien* a tout autant de raisons de prendre un h que son père *Descartes*.

objet, ensemble, famille, $a \in A \in \mathcal{A}$

Les patates (Venn), c'est bien, mais dangeureux.

INtro de téhroei Naive des ensembles.

Les ensembles décrit par compréhesion le sont par $\{x \ ; \ P(x)\}$ mais peuvent l'etre aussi de la forme $\{x\}_{P(x)}$

Rappel des cosntructions :

l'union $A \cup B$, l'intersction : $A \cap B = \{a \in A \ ; \ a \in A \text{ et } a \in B\}$, la différence $A \backslash B = \{a \in A \ ; \ a \notin B\}$, le complémentaire. Tout est associatif, distribuif et vérifie les lomis usuelles comme les connecteurss logiques : parallèle avec $\vee$, $\wedge$, $\neg$.

Calcul avec $\cap$ et $\cup$: remplacer par $+$ et $\times$

exzmples de complémentaires :

$C \backslash R$: les imaginaires non réels

$R \backslash Q$ les irrationnels

$N \backslash 2N$ les impairs

$Z \backslash N$ les entiers strictement négatifs

dire que le symbole \ peut être vu comme un couperet qui élage la partie qui ne nous intéresse pas. Pour le sens, c'est jsute que / est réservée aux quotients.

(2-)**correspondance** : classe de couples, donné par un (2-)prédicat

correpondance **réciproque**, classe **domaine** & **image**

univoque/fonctionnelle, **injective** (si <= univoque), **surjective**, **RST AS**

graphe : corresp intersecté avec un produit cartésien (donc partie d'un produit cartésien)

(graphe réciproque, dom, im)

relation entre E et F : $\langle\langle E, F\rangle, \mathcal{G}\rangle$ où $\mathcal{G} \subset E \times F$

1 Couples et relations

On appelle ***couple*** tout symbole de loi C binaire tel que

$$\forall^4 a, b, \alpha, \beta, \ C\binom{a}{b} = C\binom{\alpha}{\beta} \iff \binom{a=\alpha}{b=\beta}.$$

La théorie des ensemble permet de "modéliser" la notion de couple.

1.1 Couples et produit ensembliste

Définition.

On appelle ***couple***[2] ***ensembliste*** *(ou* ***couple****) un ensemble du type*

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

On le note $\langle a, b\rangle$.

On appelle ***produit ensembliste*** *de deux ensembles A et B l'ensemble des couples $\langle a, b\rangle$ avec $a \in A$ et $b \in B$. On le note*

$$A * B := \{\langle a, b\rangle\}_{\substack{a \in A \\ b \in B}}$$

Ces notations $\langle \ , \ \rangle$ et $*$ sont provisoires.

[2] Cette construction est dû à Kuratowski ; il y a en d'autres. De toute façon, toutes aboutissent à la seule propriété digne d'être retenue, à savoir $\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle$ ssi $a = a'$ et $b = b'$.

Remarque. On observera que
$$\langle a,b\rangle \in \mathfrak{P}\left(\mathfrak{P}\left(a\cup b\right)\right),$$
ce qui permet de montrer l'existence de $A*B$ en séparant dans $\mathfrak{P}\left(\mathfrak{P}\left(a\cup b\right)\right)$ les éléments c qui s'écrivent sous la forme $\langle a,b\rangle$: on pose

$$\begin{aligned} A*B &= \left\{c\in\mathfrak{P}\left(\mathfrak{P}\left(A\cup B\right)\right)\ ;\ \exists a\in A,\ \exists b\in B,\ c=\langle a,b\rangle\right\} \\ &= \left\{\langle a,b\rangle\right\}_{b\in B}^{a\in A}, \end{aligned}$$

la dernière écriture étant abusive mais néanmoins bien plus parlante.

Remarque. Il nous sera utile de récupérer, à partir d'un couple $c:=\langle a,b\rangle$, les ensembles a et b qui ont servi à le construire.

Observons tout d'abord que l'union de $\langle a,b\rangle$ est la paire $\{a,b\}$ (ou le singleton $\{a\}$ si $a=b$). Cela va permettre de séparer a et b dans l'ensemble $\cup c$. Il nous faut pour cela deux propriétés caractérisant l'une a et l'autre b. Par exemple, a est le seul à appartenir aux deux éléments $\{a\}$ et $\{a,b\}$ de c, tandis que b est le seul à appartenir à exactement un de ces éléments. Ces caractérisations restent valables pour $a=b$.

On peut ainsi récupérer

$$\begin{aligned} a &= \cup\left\{x\in\cup\langle a,b\rangle\ ,\ \forall X\in\langle a,b\rangle,\ x\in X\right\} \text{ et} \\ b &= \cup\left\{x\in\cup\langle a,b\rangle\ ,\ \exists! X\in\langle a,b\rangle,\ x\in X\right\}. \end{aligned}$$

EXO : mq $\{a,\{a,b\}\}$ et $\{\{a,\emptyset\},b\}$ sont aussi candidat.

Corollaire (intérêt pratique du couple).
Soit A et B deux ensembles. Pour tous $a,a'\in A$ et $b,b'\in B$, on a l'équivalence

$$\langle a,b\rangle=\langle a',b'\rangle \iff \left\{\begin{array}{c} a=a' \\ b=b' \end{array}\right. .$$

Démonstration.
D'après les constructions précédentes, en notant $\alpha(c)$ et $\beta(c)$ les première et seconde coordonnées d'un couple c, on aura
$$a=\alpha\left(\langle a,b\rangle\right)=\alpha\left(\langle a',b'\rangle\right)=a' \text{ et de même pour } b.$$

Ainis, l'ordre est primodial : un couple $\langle a,b\rangle$ n'est égal à son ***opposé*** $\langle b,a\rangle$ que si $a=b$.
Pathologie : $\langle a,a\rangle=\{\{a\}\}$. On s'en fout !

Visualiser le produit cartésien !! Le rectangle $(A\cup X)\times(B\cup Y)$ contient les dexu carré $(A\times B)\cup(X\times Y)$.

Si l'on veut généraliser à trois éléments, on peut poser $\langle a,b,c\rangle=(a,(b,c))$ ou $((a,b),c)$ qui vérifient tous deux la propriété attendue. Les ensembles $A*(B*C)=(A*B)*C$ bien que différents possèdent donc la même "structure". On dit qu'ils sont ***isomorphes*** et que les correspondances $(a,(b,c))\longleftrightarrow((a,b),c)$ sont des ***isomorphismes***. Afin d'éviter de devoir faire un choix entre ces deux possibilités de contruire les triplets $\langle a,b,c\rangle$, nous passerons de suite aux applications.

1.2 Relations binaires

Nous allons maintenant introduire le langages des relations afin de définir les fonctions et les applications.

De manière intuitive, une relation sur un ensemble $\{a_1, ..., a_p\}$ vers un ensemble $\{b_1, ..., b_q\}$ consiste en un tableau de q lignes par p colonnes où l'on a coché la case située à l'intersection de la i-ième colonne et de la j-ième ligne si a_i et b_j sont en relation. Par exemple, la relation d'égalité se traduira par une diagonale de croix dans le tableau. Autre exemple : si les croix remplissent tout le taleau, alors n'importe quel a_i est en relation avec n'importe quel b_j.

Suivant cette approche, qu'est-ce qu'une fonction ? Un souvenir de lycée nous vient à l'esprit : on représentait une fonction réelle f par une courbe dans le plan telle que toute droite verticale ne la coupe qu'au plus une fois. Le domaine de f était le lieu des abscisses x au-dessus desquelles on pouvait placer le point d'abcisse x et d'ordonnée $f(x)$. L'image de f était l'ensemble des valeurs que prenait la fonction f, *i. e.* le lieu des ordonnées $f(x)$ pour x décrivant le domaine, ou encore les ordonnées y_0 telles que la droite d'équation $y = y_0$ coupe le graphe. Lorsque f était bijective, le graphe de sa réciproque f^{-1} s'obtenait en prenant le symétrique du graphe par rapport à la première bissectrice.

Aidons-nous de ces souvenirs de lycée pour comprendre les définitions qui suivent.

Définition (relation, domaine, image, réciproque).

*Soit A et B deux ensembles. On appelle **relation** (ou **graphe**) de A dans B (ou vers B) tout partie* R *de $A * B$. On notera*

$$a\mathcal{R}b \text{ pour dire } \langle a, b\rangle \in \mathcal{R}$$

*et on dira que a **est en relation**[3] **avec** b.*

*A est dit **ensemble de départ** (ou **source** ou **initial**), B est dit **ensemble d'arrivée** (ou **but** ou **final**).*

*Le **domaine** de $\mathcal{R}$ est l'ensemble des $a \in A$ au départ qui sont en relation avec un élément de B à l'arrivée :*

$$\operatorname{Dom} \mathcal{R} := \{a \in A \; ; \; \exists b \in B, \; a\mathcal{R}b\}.$$

*L'**image** de $\mathcal{R}$ est l'ensemble des $b \in B$ à l'arrivée qui admettent un $a \in A$ au départ en relation avec eux :*

$$\operatorname{Im} \mathcal{R} := \{b \in B \; ; \; \exists a \in A, \; a\mathcal{R}b\}.$$

*La **réciproque** d'une relation $\mathcal{R}$ de A* dans *B est la relation $\mathcal{R}^{-1}$* de *B* vers *A définie par*

$$b\mathcal{R}^{-1}a \overset{\text{déf.}}{\iff} a\mathcal{R}b.$$

On observera que $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{Im} \mathcal{R}^{-1} = \operatorname{Dom} \mathcal{R} \\ \operatorname{Dom} \mathcal{R}^{-1} = \operatorname{Im} \mathcal{R} \end{array}\right.$, de sorte que le graphe $\mathcal{R}^{-1}$ s'obtient bien en symétrisant celui de $\mathcal{R}$.

On peut aussi décrire l'image de $\mathcal{R}$ comme l'image (par $\mathcal{R}$) de l'ensemble de départ, et de même le domaine de $\mathcal{R}$ est la préimage de l'ensemble d'arrivée :

$$\left\{\begin{array}{c} \operatorname{Im} \mathcal{R} = \mathcal{R}(A) \\ \operatorname{Dom} \mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}(B) \end{array}\right. .$$

Exemples ! $=$, $\leq$, divise, inclus

2 Fonctions & applications

Le mot ***fonction*** remonte à Leibniz (1690 et quelque) comme il est écrit à peu près partout, cf. Wikipédia : le mot fonction lui-même signifie accomplissement, exécution, rôle d'un élément d'un ensemble.

Ce n'est pas clair comment c'est devenu : relation entre deux choses, d'où l'expression «en fonction de», et de manière générale, variation d'une quantité en fonction d'une autre. A priori j'ai cru comprendre que c'était le sens mathématique qui précédait le passage dans le vocabulaire scientifique puis courant.

Le mot ***application***, emprunté au latin, désigne le fait de s'appliquer, de s'attacher. Il désigne donc assez naturellement le fait d'affecter des valeurs aux éléments d'un ensemble. Je n'ai pas vraimennt trouvé de précisions historiques.

[3] le nom de la relation $\mathcal{R}$ étant généralement sous-entendu

Le terme anglais mapping insiste peut-etre plus sur l'aspect de l'action d'appliquer sur, de paramétrer, d'être une carte (voir les cartes locales de la géo diff, "local charts").

Noter que les mots *map* et *chart* de l'anglais proviennent du français, les dictionnaires indiquent que *map* provient du français mappemonde, issu du latin médiéval *mappa mundi*, mais l'origine de *mappa* est peu claire, c'est peut-être sémitique.

Le mot *chart* provient de l'ancien français charte, du latin charta, du grec [redacted]η[redacted] : feuille de papyrus. En français, le h a disparu, mais l'anglais a conservé l'orthographe ancienne.

Euler représentait déjà les fonction par leur graphe. Dirichlet donnait une fonction très général mais encore selon une "règle", puis Riemann premier à s'en affrfanchir complètement.

Précisons à présent quelles vont êtres les relations dites *fonctionnelles*. On veut que leur graphe G ne puisse pas recouper plus d'une fois une droite verticale donnée. Or, se fixer une droite verticale dans un repère revient à se fixer une abcisse a. On souhaite donc qu'il n'y ait pas plus d'un point d'abcisse a qui soit sur le graphe G. Supposons cette condition vérifiée. Alors, si un tel point existe, il sera alors unique et son ordonnée sera l'image de a par notre fonction.

Formalisons.

2.1 Fonctions

Citons G. Frege dans *Qu'est-ce qu'une fonction ?* (1904) où il critique le terme de ***variable*** employé par M. E. Czuber : « Appelant la totalité des valeurs que peut prendre une variable son ***domaine*** [*Bereich*]»

Citons-le deux quelques pages plus loin : « le signe d'une fonction n'est pas saturé, il demande à être complété par un signe numérique que nous appelons signe d'***argument***. »

À la fin de son article : Lorsqu'une fonction – complétée par un nombre – donne un nombre, nous appelons ce dernier : ***valeur*** de la fonction dont le premier nombre est l'argument. On a l'habitude de lire l'équation « y = f(x) » « y est une fonction de x ». **C'est commettre une double faute**. Premièrement, on traduit le signe l'égalité par la copule ; deuxièmement, on confond la fonction avec sa valeur de pour un argument. Ces fautes ont fait naître l'opinion que la fonction est un nombre, dût-il être un nombre variable ou indéterminé. Nous avons vu que de tels nombres n'existent pas, et que les fonctions sont fondamentalement différentes des nombres.

Définition (fonctionnelle, fonction, graphe, domaine, point, image, valeur, antécédent, argument).

Soient A et B deux ensembles. Une relation $\mathcal{R}$ de A dans B est dite ***fonctionnelle*** *si*

$$\forall a,\ \forall b, b',\ \left\{ \begin{array}{l} a\mathcal{R}b \\ a\mathcal{R}b' \end{array} \right. \implies b = b'$$

(un point de A a au plus *une image dans B).*

On appelle ***fonction*** *de A vers B (ou dans B) tout ensemble f du type*

$$f = \langle \langle A, B \rangle, \mathcal{G} \rangle$$

où G *est une relation fonctionnelle de A vers B, appelé* ***graphe*** *de f. On écrit plutôt*

$$f : A \longrightarrow B$$

pour dire que f est une fonction de A vers B. L'ensemble des fonctions de A dans B sera noté $\mathrm{Fonc}(A, B)$ *ou* $\mathrm{Func}(A, B)$.

Le ***domaine (de définition)*** *d'une fonction $f \in \mathrm{Func}(A, B)$ est le domaine de son graphe*[4]

$$\mathrm{Dom}\, f = \{a \in A\ ;\ \exists b \in B,\ \langle a, b \rangle \in \mathcal{G}\}.$$

[4] Observer que la donnée de f, vu comme couple, permet automatiquement de récupérer les ensembles A et B ainsi que le graphe G en extrayant les coordonnées correspondantes.

*Pour un élément $a \in \operatorname{Dom} f$, on note $f(a)$ l'unique $b \in B$ tel que $\langle a, b\rangle \in \mathcal{G}$ et on dit que $f(a)$ est l'**image** de a par f ou la **valeur** de f en a. On écrit alors*

$$a \overset{f}{\longmapsto} f(a) \text{ ou même } a \mapsto f(a) \text{ si la fonction } f \text{ est implicite.}$$

*Si $f(a) = b$, on dit aussi que a est un **antécédent** de b par f. On retiendra le vocabulaire suivant :*

$$\begin{array}{c} a \mapsto b \\ a \text{ donne } b \\ a \text{ est envoyé sur } b \\ b \text{ est l'image de } a \\ b \text{ est la valeur de } f \text{ en } a \\ a \text{ est un}^5 \text{ antécédent de } b \end{array}.$$

*Dans l'écriture $f(a)$, on dit aussi que a est l'**argument** de la fonction f.*

*L'**image** d'une fonction f est l'image de son graphe,* i. e. *l'ensemble des images des $a \in A$ au départ :*

$$\operatorname{Im} f := \{b \in B \; ; \; \exists a \in A, \; b = f(a)\} = \{f(a)\}_{a \in A}{}^{6}.$$

*Le **graphe** de f est alors une partie de $\operatorname{Dom} f \times \operatorname{Im} f$ qui s'exprime par*

$$\mathcal{G} = \{(a, f(a))\}_{a \in \operatorname{Dom} f}.$$

*Les éléments de $\operatorname{Dom} f$ seront appelés **points**, ceux de $\operatorname{Im} f$ **valeurs**. Ainsi,*

$$\begin{aligned} \text{pour dire « } b &= f(a) \text{ », on dira aussi} \\ & \text{« } b \text{ est la valeur de } f \text{ au point } a \text{ ».} \end{aligned}$$

On parle aussi de l'ensemble des $f(a)$ lorsque a ***décrit* / *varie dans*** A.

Rq : une fonction n'ets pas forcément donnée par une formule : si n pair, si n iimpair, weistrasas, AC...
On définit la fonction $x \mapsto f(x)$: « qui à x associe $f(x)$ » ou « x donne $f(x)$ »
eg : 0, *id*, ln, $\sqrt{\cdot - 1}$.

RQ : si image dépend condition logique, comment formaliser ? ce n'est pas d'abord on prend un x puis on se pose une question. D'abord on trie la condition puis on donne alors l'image : donner le graphe partionné selon la condition $\coprod_{P(x)} \{(x, fx)\} \amalg \coprod_{\neg P(x)} \{(x, fx)\}$

ATTEION : $f(x)$ est deux choses : c'est un tout insécable désigant un éléméent, mais c'est aussi à lire en deux bout, le f ne faisant alors sens qu'après que le tout sus-cité ait un sens (tricky....)

Frege cité dans intro de Imbert : *Si dans une expression [. . .] un signe simple ou composé a une ou plusieurs occurrences, et si l'on pense que ce signe, en toutes ou en quelques-unes de ses occurrences, peut être remplacé par un autre, pourvu que le signe substitué soit toujours le même, alors la partie stable de l'expression est appelée fonction et la partie soumise à substitution est appelée argument de la fonction.*

rq : on peut distinguer trois points de vue intimement liés (et hop, un trinagle) pour décrire une appliation :
1/ défition des images $f(x) = ...$
2/ défintion par équation $y = f(x)$ (implicitement on va trcare les (x, y))
3/ définie par graphe (x, y)

Lanage de l'***action*** : une fontion ***agit*** sur un ensemble. Connotations sympas
Eg : **point fixe**

J'ai remarqué qu'un bon test pour savoir si la notion de fonction est comprise, c'est de faire un tout petit exo sur l'image directe et l'image inverse d'un ensemble. Rien qu'avec la fonction $x \mapsto x^2$ et que des segments de droite, c'est terrifiant !

[5] Attention à ne pas écrire « a est **l'**antécédent de b » car cela présupposerai l'unicité d'un tel b. Pour un contre-exempe, si f est une fonction constante sur A, mettons $\forall a \in A, \; f(a) = b_0$, alors tout élément de A est un antécédent de b_0. L'unicité de l'antécédent correspond à la notion d'*injectivité* – développée ci-après.

2.2 Applications

Selon Jean-Pierre Belna (*Histoire de la théorie des ensembles*), Dedekind aurait précisé cette notion.

Définition.
*Une **application** $f : A \longrightarrow B$ est une fonction définie partout,* i. e. *telle que* $\operatorname{Dom} f = A$*. On écrit alors*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array} \right. .$$

L'ensemble des applications de A vers B sera noté[7] B^A.

Remarque.
Si $A = \emptyset$, le graphe d'une application $\emptyset$ vers B est une partie de $\emptyset \times B = \emptyset$, donc est nécessairement réduit au graphe vide $\emptyset$, de sorte que $B^\emptyset$ est réduit à une unique application :

$$\langle \langle \emptyset, B \rangle, \emptyset \rangle = \left\{ \begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & B \\ & \longmapsto & \end{array} \right. ,$$

par conséquent appelée ***application vide*** (à valeurs dans B). On observera que l'image de l'application vide est l'ensemble vide :

$$\operatorname{Im} f = \left\{ b \in B \ ; \ \underbrace{\exists a \in \emptyset}_{\text{absurde}}, \ b = f(a) \right\} = \emptyset.$$

Si $A \neq \emptyset$, il n'y a pas d'application de A dans $B = \emptyset$:

$$A \neq \emptyset \implies \emptyset^A = \emptyset.$$

Le lecteur douteux vérifiera que $\emptyset^\emptyset$ n'est pas vide (cela rentre dans le premier cas).

Si l'on voit $\emptyset$ comme l'entier 0, on vient de montrer que n'importe quoi puissance 0 ne contient qu'un seul élément (en quelque sorte : $b^0 = 1$), et que 0 puissance n'importe quoi de non nul fait 0, *i. e.* que $0^a = 0$ pour $a \neq 0$. Cela explique en partie pourquoi on note B^A au lieu de A^B : on retrouve les lois de l'arithmétique ordinale usuelle.

On montrera plus tard la relation $\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$ pour A et B deux ensembles finis[8], ce qui est encore un avantage en faveur de la notation B^A au lieu de A^B. Pour le voir, donnons-nous des abricots en nombre $a := |A|$ que l'on cherche à ranger dans $b := |B|$ barquettes. Une application $A \longrightarrow B$ est alors une manière de mettre chaque abricot dans une certaine barquette. Chaque abricot peut aller dans n'importe quelle des b barquettes disponibles[9], ce qui fait b choix, tous indépendants les uns les autres, d'où au total

$$\underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{\text{autant de choix que d'abricots}} = b^a \text{ façon de ranger les abricots.}$$

Autre avantage de la notation : on a des isomorphismes canoniques $\left(A^B\right)^C \simeq A^{B \times C} \simeq A^{C \times B} \simeq \left(A^C\right)^B$.

Appliation bien définie : $x^2 \mapsto x$, $\begin{array}{c} E \longrightarrow E \\ a + b \mapsto a \end{array}$ (ok si $E = A \oplus B$), $f(x) \mapsto x$ (ok si f bij)

Définir la ***fibre*** au-dessus d'un point, avec exmple du cylindre le projetant sur le cercle unité, puis $\mathbb{R}$ enroulé tout pareil.

RQ : les fibres sont les classes d'équivalence pour la re canoniquement associée à une application.

EXO **(codage)** *: mq* $B^A \subset \mathfrak{PPPPP}(A \cup B)$*. (cf axiome parties pour interprétation)*
DEM :

[7] on rencontre aussi la notation ${}^A B$ qui a l'avantage de garder l'ordre d'abord A puis B
[8] on a noté $|X|$ le nombre d'éléments d'un ensemble X fini
[9] On suppose les barquettes assez grandes pour pouvoir contenir tous les abricots.

on a vu que $\langle a,b\rangle \in \mathfrak{PP}(\{a,b\}) \subset \mathfrak{PP}(A\cup B)$ d'où $A*B \subset \mathfrak{PP}(A\cup B)$: un graphe de A vers B, étant une partie de $A*B$, est un élément de $\mathfrak{PPP}(A\cup B)$.

De plus, A et B sont $\subset A\cup B$, ied $\{A,B\}\subset \mathfrak{P}(A\cup B)$, d'où $\langle A,B\rangle \in \mathfrak{PP}(\{A,B\}) \subset \mathfrak{PPP}(A\cup B)$.

Ainsi, une application $\langle\langle A,B\rangle, G\rangle$ a ses deux coordonnée dans $\mathfrak{PPP}(A\cup B)$, donc est un élément de $\mathfrak{PP}(\mathfrak{PPP}(A\cup B))$.

EXO (version catégorielle de l'exponentielle)

SOit A,B. On note $\acute{e}$: $\begin{array}{ccc} B^A\times A & \longrightarrow & B \\ (f,a) & \longrightarrow & f(a)\end{array}$ l'évaluation.

Montrer que pour tout $\varepsilon : E\times A \longrightarrow B$ il y a un unique $\varphi : E\longrightarrow B^A$ commutativcsant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E\times A & \longrightarrow & {\scriptstyle\varphi\times i_A} & \longrightarrow & B^A\times A \\ & \searrow\varepsilon & & \swarrow\acute{e} & \\ & & B & & \end{array}$$

DEM

Soit un tel ε. Alors $\varphi(e) : a\mapsto \varphi(e)(a) = \acute{e}(\varphi(e),a) = [\acute{e}\circ(\varphi\times i_A)](e,a) = \varepsilon(e,a)$, d'où l'uniité, qui fonctionne.

2.3 Composition

Frege, *2e recherche logique*

Les expressions imagées apportent quelque lumière, si l'on en use avec prudence. Je comparerai ces éléments qui ont besoin d'être complétés [à savoir tout opérateur unaire] à un voile. Ce voile, telle une robe, ne peut tenir droite par ses propres forces ; il faut que quelqu'un le revête. Une personne déjà voilée peut revêtir un autre voile, un manteau par exemple. Les deux voiles s'unissent alors en un seul voile. Une double interprétation est possible. On peut dire que l'individu déjà vêtu d'une robe revêt un second voile, un manteau, ou qu'il porte un vêtement composé de deux voiles – robe et manteau. Ces interprétations ont exactement la même légitimité. Le voile qu'on pose sur un autre ne manque pas de s'unir à lui, ensemble ils forment un voile nouveau. On n'oubliera pas que ces vêtures successives sont des accidents temporels, tandis que ce qui leur correspond dans le domaine de la pensée est intemporel

Notation. crochets pour les applitions, différencier parenthèse pour argumen : plus clair $[P(f)](x)$ que $(P(f))(x)$

Définition (composée de relations).

*La **composée** de deux relations $\mathcal{R}\subset A\times B$ et $\mathcal{S}\subset C\times D$ est définie par*

$$a[\mathcal{S}\circ\mathcal{R}]d \iff \exists x,\ a\mathcal{R}x \text{ et } x\mathcal{S}d$$

Un tel x est nécesairmeent dans $\operatorname{Im} f\cap \operatorname{Dom} g$.

interpration en termes de graphes colorés ? ? ?

PROP *la composée de deux relations fonctionnelles est fonctionnelle.*

DEM Supp $a[\mathcal{S}\circ\mathcal{R}]d$ et $a[\mathcal{S}\circ\mathcal{R}]d'$. Il y a un x et un x' tq $a\mathcal{R}x\mathcal{S}d$ et $a\mathcal{R}x'\mathcal{S}d$. Puisque $\mathcal{R}$ est onctionnelle, on a $x=x'$, puis puisque $\mathcal{S}$ est fonctinnel on a $d=d'$.

Définition (composée de fonctions).

*La **composée** de deux fonctions $f=\langle\langle A,B\rangle,\mathcal{G}\rangle$ et $g=\langle\langle C,D\rangle,\mathcal{H}\rangle$ est définie par $g\circ f := \langle\langle A,D\rangle,\mathcal{H}\circ\mathcal{G}\rangle$.*

PROP **(le domaine rétrécit par composition)** *on a toujours* $\operatorname{Dom}(g\circ f)\subset \operatorname{Dom} f$

DEM : soit $a\in\operatorname{Dom}(g\circ f)$:il y a un $d\in D$ tq $a\ \mathcal{H}\circ\mathcal{G}\ d$, ie $\exists x,\ a\mathcal{G}x$ (et $x\mathcal{H}d$) d'où $a\in\operatorname{Dom} f$.

PROP **(où la composée est bien définie)** : $\operatorname{Dom}(g\circ f)=\operatorname{Dom} f$ ssi $\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Dom} g$

DEM : <= soit $a\in\operatorname{Dom} f$: il y a un b tq $a\mathcal{G}b$, donc $b\in\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Dom} g$, donc il ya un d tq $b\mathcal{H}d$, d'où $a[\mathcal{H}\circ\mathcal{G}]d$ et $a\in\operatorname{Dom} g\circ f$.

=> soit b dans $\operatorname{Im} f$: il y a un $a\mathcal{G}b$, donc $a \in \operatorname{Dom} f \subset \operatorname{Dom} g \circ f$, donc il y a un d tq $a\left[\mathcal{H} \circ \mathcal{G}\right]d$, d'où un x tq $a\mathcal{G}x$ et $x\mathcal{H}d$. Or a n'a qu'un image par f, d'où $b = x \in \operatorname{Dom} g$.

COR : *la composition d'applications* $A \xrightarrow{f} B$ *et* $E \xrightarrow{g} F$ *est une application ssi* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Dom} g$. (on peut supposer g fonction).

On retiendra

$$[g \circ f](a) = g(f(a))$$

2.4 Fonction réciproque, injectivité

Attention ! la notation G^{-1} désigne bien une relation, mais rien ne permet de dire qu'il s'agit d'une relation fonctionnelle (considérer pour s'en convaincre le graphe d'une application constante). On prendre par conséquent à ne pas parler de la *fonction* f^{-1}.

exemple : fonction passant modulo truc.

Définition (injection, fonction réciproque).
Une fonction f de graphe G est dite ***injective*** *si elle préserve la différence,* i. e. *si*

$$\forall^2 a, a' \in \operatorname{Dom} f,\ f(a) = f(a') \implies a = a'.$$

La relation G^{-1} est alors fonctionnelle, et on définit la ***fonction réciproque*** *de f par*

$$f^{-1} := \left\langle \langle B, A\rangle, G^{-1}\right\rangle.$$

Une ***injection*** *est une fonction injective.*

Une injection est une application qui préserve la différence (le fait d'être distinct) (Dedekind parlait d'une application semblable)

exemple : ***injection canonique***.

injectivité : $\iff$ invesrible à gauche (défintion de rétraction)$\iff$ simplifiabl à gauche (formellement, et pratiquement !), c'est le point de vue ***catégoriel*** :

EXO (injections & monomorphismes) f mono si $\forall X \overset{\forall\varphi,\psi}{\rightrightarrows} A \xrightarrow{f} B$, $f\varphi = f\psi \implies \varphi = \psi$

DEM Clair que inj => mono (simplfier). Soit f mono et $f(a) = f(a')$. On prend $\varphi \equiv a$ et $\psi \equiv a'$. Alors $f\varphi = f\psi$ donc $\psi = \varphi$, cQFD.

Remarque.
On a les propriétés immédiate pour f injective :

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} f^{-1} &= \operatorname{Im} f \\ \operatorname{Im} f^{-1} &= \operatorname{Dom} f. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la préimage $f^{-1}(Y)$ de Y par f correspond exactement à l'image $f^{-1}(Y)$ de Y par f^{-1}, ce qui lève l'ambiguité de la notation.

Trouver l'ensemble de défintion d'une fonction est le même problème que troiver son image.

Donc « bien définie » même problème que « injective ».

Si $\mathcal{R}$ est une relation que l'on souahite être une fonction, on dit qu'elle est ***bien définie*** si c'est le cas.

Une injection $A \longrightarrow B$ est à voir comme une inclusion $f(A) \subset B$ où $f(A)$ est une copie de A injectée avec un seringue dans A. C'est pourquoi on utilisera la notation $A \hookrightarrow B$ (concaténation de $\subset$ et $\longrightarrow$). On parle aussi de ***plongement*** et on dit que A se ***plonge*** dans B (attention à ne pas parler de *plongeon)*

Exemples :

L'application vide est toujours injective (tautologique)

une applciation constante de domaine Aest injective ssi A est un singleton (ou vide)

Id, injection canonique, fonction caractéristique (avec propriétés : χ_{C_A}, $\chi_{A\cap B}$, $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A\Delta B}$, $\chi_{A\setminus B}$), Kronecker

exemple de A^n, $M_{p,q}(A)$ qui rajoute une dimnesion aux n-uplets, $\mathfrak{S}(A)$ pour des représentations diverses du graphe.

2.5 Surjections

si $f : A \longrightarrow B$ est une application, on dit que f va de A ***dans*** B (en anglais : ***into***) et non de A ***sur*** B (***onto***), cette dernière préposition étant exclusivement réservée aux applications **sur**jectives (noter que ***sur*** se traduit par **on**).

De même, une surjection sera notée $A \twoheadrightarrow B$, le nombre multiples de flèches évoquant la multiplicité des antécédents.

Une surjection est aussi appelée ***paramétrage***.

pourquoi projection ? ? ?

surjectif = inversible à droite (définiton de **section**) simplfiable à droite : c'est le point de vue ***catégoriel***

EXO (surjection et épimorphisme) f épi si $A \xrightarrow{f} B \overset{\forall\varphi,\psi}{\rightrightarrows} \forall X, \varphi f = \psi f \implies \varphi = \psi$.

DEM Si f surj, clar que épi. SUppo f épi. Si pas surj, soit b hors de $\operatorname{Im} f$. On définit $\psi = 0$ et $\varphi = \delta_b^{\cdot}$. Alors $\varphi f = \psi f$ absrude.

C'est même équivalence que pour inj, en renversant le sens des flèches –> dualité inj / surj,

PROP (AC) $A \hookrightarrow B \iff B \twoheadrightarrow A$

Plus genréalement, cf DM.

Eg :

l'application vide est surjective ssi $B = \emptyset$.

une application constante est surjective ssi B est un singleton

projection sur les coordonées

mauvaise questio : "est-ce que f est surjective". bonne question : déterminer l'image de f.

2.6 Bijections, involutions, puissances

Def. : bij = exhiber un inverse, procédé aller et retour

CEG : $A = \{a\}$ $B = \{b, b'\}$, $f = b$, $g \equiv a$, alors $g \circ f = \operatorname{Id}_A$ mais $f \circ g(b') = b \neq b'$

exemple :

Id

complémentaire (ou toute involution) (ou toute racine de Id)

$(x \mapsto x^2)_{|\mathbb{R}^+}$

ln

$\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

$d \mapsto \frac{n}{d}$

$P(A) \overset{\chi}{\simeq} \{0,1\}^A$

$n \mapsto n+1$ (ensemble en bijection avec partie stricte –> Dedekind infini)

Th : bij = inj + surj

(en fait, on reconstruit l'inverse en montrant inj+surj)

Commentaire alors sur : bijection, inj, surj <-> uniité, existence de solution à une équation (ex : carré, th)

une injection induit toujours une bijcetion sur son image.

On prend l'habitude d'identifier deux ensemblre canoniquemnt équipotents : $E \cong E \times \{a\}$, $R^n \cong M_{n,1} \cong M_{1,n}$, si $A \cong B$ alors $\mathfrak{P}(A) \cong \mathfrak{P}(B)$ et $A^X \cong B^X$ et $X^A \cong X^B$.

on dispose de jolies identités pour l'exponentiation :

$(A \times B)^X \cong A^X \times B^X$

$A^{X \uplus Y} \cong A^X \times A^Y$

$(A^X)^Y \cong A^{X \times Y} \cong A^{Y \times X} \cong (A^Y)^X$

EN déduire $P(A \sqcup B) \cong P(A) \times P(B)$ et $P(A \times B) \cong P(A)^B \cong P(B)^A$ (écrire $P(E) \cong \{0,1\}^E$)

involutions : complémetnaire dans $P(E)$, oposé dans R, inverse dans Q^*, complémetnair dans $[0,n]$, conjugaison dans C, $d \mapsto \frac{n}{d}$,

puissance, équipotent, isomorphisme $A \simeq B$
Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (1895) I § a
« Tout agrégat a une *puissance* définie qu'on appellera aussi son nombre cardinal »

Différentes notions d'infinis...

Lorsque nous parlons d'ensembles (sans structure additionnelle), la notion d'isomorphisme d'ensembles revient à celle d'existence d'une bijection de A sur B. On notera alors $A \simeq B$.

2.7 (co)prolongements et (co)restrictions

Des fois l'image est appelé ***codomaine***
Restreindre ou ***corestrindre*** une app ne change pas son **action** !
La restriction d'un application injective reste injective.
on peut recoller deux inj/bijections ssi leur images sont disjointes ! (ceg $x \mapsto x^2$).

Si on diminue l'ensemble d'arrivée, on parle de ***corestricion.*** Ainsi, une injection corestreinte à son image est une bijection.
Il est important de voir que l'on peut toujours coprolonger à n'importe quoi contenant l'image : c'est le plus petit ensemble pertinent à l'arrivée. Au contraire, on cherche au départ le plus grand domaine possible !

2.8 Images directes & réciproques, parties stables, itération

*L'**image directe** (par f) d'une partie $X \subset A$ au départ est l'image de la restriction de f à cette partie :*

$$f(X) = f^{\rightarrow}(X) := \operatorname{Im}\left(f_{|X}\right) = \{f(x)\}_{x \in X}.$$

*La **préimage** ou **image réciproque** (par f) d'une partie $Y \subset B$ à l'arrivée est l'ensemble des $a \in A$ au départ qui sont envoyés (par f) sur un élément de Y :*

$$f^{-1}(Y) = f^{\leftarrow}(Y) := \{a \in A\}_{f(a) \in Y}.$$

Attention : ce ne sont pas des notations fonctionnelles !
On peut ainsi décrire l'image de f comme l'image (par f) de l'ensemble de départ, et de même le domaine de f est la préimage de l'ensemble d'arrivée :

$$\left\{ \begin{array}{c} \operatorname{Im} f = f(A) \\ \operatorname{Dom} f = f^{-1}(B) \end{array} \right. .$$

parties ***stables***, ***invariantes***, points ***fixes***, applications ***stabilisant*** *:* –> pb agent / cible ?
Lorque f agit sur la boite A en tapant dessus avec un marteau, la boîte résiste, elle reste stable.
stabilité pour $\cap\cup$et complémentaire : ok pour préimage. Pour image, seul union ok (et $\cap$ si inj, retrouve avec parabole et segment disjoints symétiques)

$a = b \implies f(a) = f(b)$ (pour simpliifer par f, il faut injectivité)
$a \in A \implies f(a) \in f(A)$ (on fait comme si on applique f des deux côtés)
$A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$ (on fait comme si on applique f des deux côtés)

$f(a) \in B \iff a \in f^{-1}(B)$ (on fait comme si on applique / simplifie par f des deux côtés)
$B \subset B' \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$

$[g \circ f](A) = g(f(A))$
$[g \circ f]^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$
(si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$)

comportement des images directes et réciproques par rapporte aux lois $\cap \cup\ ^c \setminus \Delta$ ($f(^cA) \subset^c f(A)$ si inj et $\supset$ si surj)

Itération si on a pour tout naturel n un ensemble X_n et un élément $a \in X_0$et pour tout n une application $f_n : X_n \longrightarrow X_{n+1}$ alors il existe une unique suite u_n telle que $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f_n(u_n)$ pour tout n. Démonstration semblable

3 Familles

Le problème de nos ensembles est qu'ils ne permettent de voir ni un élément répété, ni un ordre souhaité. Les familles vont nous permettre de pallier ce problème.

Définition.
Soit A un ensemble. On appelle ***famille*** *d'éléments de A une application à valeurs dans A*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & A \\ i & \longmapsto & a_i \end{array} \right.$$

où I est un ensemble appelé ***ensemble d'indexation***[10]*. On dit alors que f est une* ***famille indexée par*** *I.*
On la note généralement $(a_i)_{i\in I}$ ou (a_i) lorsque I est implicite. L'INDICE EST MUET!!!!
Lorsque $I = \emptyset$, on parle de (la) ***famille vide*** *(à valeurs dans A).*
Une ***sous-famille*** *de (a_i) est une famille $(a_j)_{j\in J}$ avec $J \subset I$ (autement dit, une sous-famille est, vue en tant qu'application, une restriction)*
Une ***famille de parties*** *de A est une famille de $\mathfrak{P}(A)$.*

Exempel : ***famille canoniquement associée*** à un ensemble A : c'est $(a)_{a\in A}$; en termes d'applications, c'est l'identié de A. .

3.1 Ensemble canoniquement associée à une famille

*L'****ensemble canoniquement associé*** *à la famille $(a_i)_{i\in I}$ est la partie de A définie par*

$$\bigcup_{i\in I} \{a_i\} \quad : \quad = \{x \in A \ ; \ \exists i \in I, \ x = a_i\}$$

également noté $\{a_i\}_{i\in I}$.

Quand $I = \{1, ..., n\}$, on trouve

$$\bigcup_{i=1,...,n} \{a_i\} = \{a_1, ..., a_n\}.$$

Permet de tuer l'ordre et la repet.

[10] Rappelons à ce sujet que le verbe « *indicer* » et ses dérivées ne sont pas français. Le terme correct est « ***indexer*** ».

3.2 Réunion, intersection et produit cartésien[11] d'une famille d'ensembles

On généralise ici les notions $A \cup B$, $A \cap B$, et $A * B$.

Définition.
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ i & \longmapsto & A_i \end{array} \right.$ *une famille* (A_i) *d'ensembles. Puisque* $A_i \in \mathcal{A}$*, tous les* A_i *sont inclus dans* $A := \cup \mathcal{A}$*.*

La ***réunion*** *et l'****intersection*** *des ensembles* A_i *sont respectivement définies par*

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i \quad &: \quad = \{a \in A \ ; \ (\exists i \in I, \ a \in A_i)\} \text{ et} \\ \bigcap_{i \in I} A_i \quad &: \quad = \{a \in A \ ; \ (\forall i \in I, \ a \in A_i)\}. \end{aligned}$$

On appelle ***produit cartésien***[12] *des ensembles* A_i *l'ensemble des familles* $(a_i)_{i \in I}$ *à valeurs dans* A *telles que* $a_i \in A_i$ *pour tout* i*. On le note*

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i) \ ; \ \forall i, \ a_i \in A_i\}.$$

Quand tous les A_i *sont égaux, disons* $A_i = A$*, on retrouve*

$$\prod_{i \in I} A = A^I$$

(cela incite encore à favoriser la notation B^A *à* A^B*).*

Remarque. En pratique, on se fiche éperdumement du $\cup \mathcal{A}$ pour définir $\bigcup A_i$ ou $\bigcap A_i$ ou $\prod A_i$ mais il fallait en parler pour exhiber un ensemble d'arrivée à l'application « famille » et ainsi pouvoir séparer les éléments de l'union et de l'intersection. Il peut arriver que l'on dispose pour tout indice $i \in I$ d'un ensemble A_i (défini comme l'unique ensemble vérifiant une propriété donnée). Pour considérer l'union ou le produit des A_i, il faut pouvoir parler de la *famille* des A_i. Cela nous est possible grâce aux axiomes de remplacement[13].

Remarque. Pour l'intersection, pas besoin de remplacement. On vérifie à la main que l'ensemble séparé $A^k := \{a \in A_k \ ; \ (\forall i \in I, \ a \in A_i)\}$ ne dépend pas de k (écrire $A_k = A_k \cap A_l$).

Remarque. On notera la ressemblance graphique entre les symboles $\cap$ et $\wedge$, qui s'éclairera (on espère) au vu des relations

$$[x \in A \cap B] \iff [(x \in A) \wedge (x \in B)]$$

et

$$\left[x \in \bigcap_{i \in I} A_i \right] \iff \left[\bigwedge_{i \in I} (x \in A_i) \right].$$

Si $I = \{1, ..., n\}$*, on le note également*

$$\bigcap_{i=1,\ldots,n} A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n.$$

rq : dire $E \subset A \cap B$, c'est dire $E \subset A \wedge B$: lire E inclus dans A **et** B.

Associativité : si $I = \bigsqcup_{x \in I} I_x$, alors $\bigodot_{i \in I} A_i = \bigodot_{x \in X} \bigodot_{i \in I_x} A_x$ pour $\bigodot \in \{\cap, \cup\}$.

Propositions.
Une famille stable par union admet un max
Une famille stable par inter admet un min

[11] On observera que l'adjectif *cartésien* a tout autant de raisons de prendre un h que son père *Descartes*.
[12] Relatif à *Descartes*, l'adjetif ***cartésien*** ne prend pas de « h » : on bannira donc les formes dérivées de « carthésien ».
[13] C'est d'ailleurs la seule application des axiomes de remplacement que nous serons (peut-être) amenés à utiliser.

Tétratomie : Réninon d'une famille d'ensemble dont ne donne que le graphe $= \{(i, A_i)\}$? $\cup\cup\mathcal{G} = \bigcup \{i, A_i\}$, donc (séparation) l'ensemble des A dans $\cup\cup G$tq il y a un i ddans $\cup\cup G$ tq $(i, A) \in G$ est l'esnebmel des $A_i$puis il suffit de prednre sa réunion.

Réunion d'un ensemble d'ensembles ? Aucun problème : c'est l'axiome de l'union !

rq : intersection rapetisse, union agandit, d'où $\forall i_0 \in I$

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} A_i.$$

produit cartésien d'application : si $f_i : E_i \longrightarrow F_i$, alors $\prod f_i : \prod E_i \longrightarrow \prod F_i$.
EG :
$(\mathrm{Re}, \mathrm{Im}) : \left\{ \begin{array}{ccc} C \times C & \longrightarrow & R \times R \\ (a, b) & \mapsto & (\mathrm{Re}\, a, \mathrm{Im}\, b) \end{array} \right.$

Exo (version catégorielle).
On se donne A et B et on note $\left\{ \begin{array}{ccc} (a, b) & \longmapsto & a \\ A \times B & \xrightarrow{\pi_A} & A \\ & \xrightarrow{\pi_B} & B \\ (a, b) & \longmapsto & b \end{array} \right.$.
MOntre que pour tout $\left\{ \begin{array}{l} \alpha : P \longrightarrow A \\ \beta : P \longrightarrow B \end{array} \right.$ *il y a une unique application* $\varphi : P \longrightarrow A \times B$ *commutativsaint le diagramme :*

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \longleftarrow & P & \longrightarrow & \beta \\ \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \\ \downarrow & & A \times B & & \downarrow \\ \downarrow & \swarrow \pi_A & & \searrow \pi_B & \downarrow \\ A & & & & B \end{array}.$$

DEM. Soit un tel (P, α, β). FIxons un $p \in P$. Son image par φ est un couple (a_p, b_p), d'où en composant par π_A, π_B : $\varphi(p) = (\pi_A(\varphi(p)), \pi_B(\varphi(p))) = (\alpha(p), \beta(p))$, d'où l'unicité de φ. Cette dernière expression fonctionne.

3.3 Listes, n-uplets, suites

Définition (suite).
Pour $I = \{1, ..., n\}$, *on note*

$$\prod_{i=1,\ldots,n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$$

et on parle alors de n-***uplets*** *ou de* ***liste*** *à* n *éléments. On les note*

$$(a_i)_{i=1,\ldots,n} = \overrightarrow{a} = a = (a_1, ..., a_n)$$

et on a la propriété fondamentale

$$(a_1, ..., a_n) = (b_1, ..., b_n) \iff (a_1 = b_1 \text{ et } ... \text{ et } a_n = b_n).$$

Lorsque tous les A_i *sont égaux, on note usuellement*

$$\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}} = A^{\{1,\ldots,n\}} =: A^n.$$

Naturellement, A^0 *est réduit au singleton « liste vide à valeurs dans* A *».*
Pour $I = \mathbb{N}$, *on parle de* ***suites*** *à valeurs dans* A. *Les éléments* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $A^{\mathbb{N}}$ *sont souvent notés*

$$(a_n) = (a_0, a_1, a_2, ...) = \overrightarrow{a}.$$

Remarque. Pour les petites valeurs de n, les n-uplets portent des noms plus standards :

$$\left\{\begin{array}{lcc} n=0 & \longrightarrow & \textbf{\textit{liste vide}} \\ n=2 & \longrightarrow & \textbf{\textit{couple}} \\ n=3 & \longrightarrow & \textbf{\textit{triplet}} \\ n=4 & \longrightarrow & \textbf{\textit{quadruplet}} \\ n=5 & \longrightarrow & \textbf{\textit{quintuplet}} \end{array}\right. .$$

On retrouve le terme de ***couple*** que l'on avait définit plus haut comme

$$\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}.$$

Cela est normal, vu que les couples $\langle a,b\rangle$ et (a,b) jouissent de la même propriété

$$(a,b)=(a',b') \iff \left\{\begin{array}{c} a=a' \\ b=b' \end{array}\right.$$

– et, en fait, en pratique seule compte la propriété ci-dessus. Vu que les n-uplets généralisent cette propriété[14], lorsqu'on parlera de couple, il s'agira toujours des (a,b), les $\langle a,b\rangle$ étant juste un intermédiaire de construction. On laissera également de côté le produit $A*B$ au profit du produit cartésien $A\times B$.

Qu'est-ce qu'un vecteur injectif ? un vecteur dont toutes les composantes sont distinctes.

3.4 Différences entres ensembles et familles

On prendra par ailleurs garde à ne pas confondre le n-uplet $(a_1,...,a_n)$ avec l'ensemble $\{a_1,...,a_n\}$. En effet, le n-uplet possède d'une part un *ordre* que n'a pas l'ensemble $\{a_1,...,a_n\}$ (il faut voir ce dernier comme un sac chaotique où sont mélangés les a_i dans le désordre le plus total) : pour deux éléments a et b distincts, on a les relations

$$\left\{\begin{array}{c} (a,b)\neq(b,a) \\ \{a,b\}=\{b,a\} \end{array}\right. .$$

D'autre part, le n-uplet $(a_1,...,a_n)$ permet de *répéter* plusieurs fois le même a_i tandis que cela est illusoire pour l'ensemble $\{a_1,...,a_n\}$: il suffit d'observer que

$$\left\{\begin{array}{c} \{a,a\}=\{a\} \\ (a,a)\neq(a) \end{array}\right. .$$

Dans le même ordre d'idée, une famille $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas du tout – moralement – le même objet que son ensemble canoniquement associé (e. c. a.) $\bigcup_{i\in I}\{a_i\}$.

Déjà, il peut y avoir réduction de la taille si plusieurs éléments sont répétés : l'e. c. a. à la famille (a,a) est le singleton $\{a\}$.

Ensuite, connaissant l'e. c. a.R à une famille (a_i), on dispose automatiquement d'une famille $(r)_{r\in R}$ dont l'e. c. a.vaut R, mais rien ne nous assure que l'on retombe sur la famille de départ : il y a la question de l'indexation (ou étiquetage) des éléments R. Pour reprendre les mêmes exemples, si $R=\{a,b\}$ où $a\neq b$, l'élément a peut indifféremment être choisi comme premier ou second élément de la famille, ce qui donnera respectivement les familles (a,b) et (b,a). Dans ces deux derniers cas, l'ensemble d'indexation est $\{1,2\}$ (quoi de plus naturel pour indexer deux éléments ?), mais on pourrait le remplacer par tout ensemble à deux éléments, par exemple $\{a,b\}=R$ lui-même : cela donnerait les deux familles $\left\{\begin{array}{c} a\mapsto a \\ b\mapsto b \end{array}\right.$ (c'est la famille $(r)_{r\in R}$ évoquée plus haut) et $\left\{\begin{array}{c} a\mapsto b \\ b\mapsto a \end{array}\right.$.

Si on a un *ensemble* de parties de A, on peut définir sa ***réunion***, son ***intersection*** et son ***produit cartésien*** comme ceux de la famille canoniquement associée à notre ensemble. Vérifier que l'on obeitnet bien ce qu'on attend.

[14] Il aurait été tenant de définir

$$(a,b,c)=\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\},$$

mais cela ne nous permettrait pas de faire la différence entre les triplets (a,a,b) et (a,b,a).

3.5 Vers les multi-ensembles

Faison un tableau récapitulatif :

répétition \ ordre	oui	non
oui	famille	2
non	1	ensemble

Commen compléter ?

Case 1 : elle correspond à tirer des boules d'une urnes sans remise. Il s'agit donc des familles injectives.[15]

Case 2 : si l'on souhaite considérer plusieurs copies d'un même objet dans un ensemble (non ordonné), on peut y parvenir à l'aide de l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur les familles qui va oublier l'ordre. On notera alors

$$[a_1, a_2, ..., a_n]$$

la classe d'un n-uplet $(a_1, ..., a_n)$ modulo l'action de $\mathfrak{S}_n$, et on l'appellera ***multi-ensemble***. Cet objet est particulièrement bien adapté pour décrire les racines d'un polynôme avec multiplicités, ou encore le spectre d'un endomorphisme.

Finalement, on obtient

répétition \ ordre	oui	non
oui	famille	multi-ensemble
non	famille injective	ensemble

3.6 Non vacuité du produit cartésien

Propriété.
Un produit cartésien fini est vide ssi l'un des facteurs est vide :

$$[A_1 \times \cdots \times A_n = \emptyset] \iff [\exists i,\ A_i = \emptyset].$$

Théorème (AC).
Un produit cartésien d'ensembles non vide est non vide :

$$[\forall i,\ A_i \neq \emptyset] \implies \left[\prod A_i \neq \emptyset\right].$$

Parler de AC dénomb.
Réciproque claire.

3.7 Partitions & unions disjointes

A et B sont complémentaires ssi ${}^cA = B$ ou ${}^cB = A$.
parties ***complémentaires***
partition est famille de parites complémentaires *non vides*

Réunion disjionte : on peut avoir envie de se souvnir d'où vient un élément : il suuffit de lui coller une étiqette. On définit la notation

$$\bigsqcup E_i := \bigcup (E_i \times \{i\})$$

[15] Comment parler d'ordre sur des ensembles qui n'en sont pas naturellement muni ? AC permet cela, et est même équivalent à l'énoncé "tout ensemble est bien ordonnable".

définissant l'***union disjointe*** d'une famille d'ensembles E_i. Chaque E_i s'identifie alors à son image $E_i \times \{i\}$ et est par conséquent disjoint (dans $\bigsqcup E_i$) des autres $E_{j\neq i}$ puisque les secondes coordonnées sont toujours différentes.

Lorsque les E_i sont déjà disjoints, les deux réunions sont en bij. (union disjiot ***interne*** et ***externe***)

Si A et B sont dijsoint, on note

$$A \sqcup B$$

la réunion $A \cup B$. Ainsi, écrire $A \sqcup B$ c'est écrire un ensemble $(A \cup B)$ en sous-entnedant une propriét (la disjointin). Pexemple, écrire $A \cup B = A \sqcup B$ signie tout simplement que A et B sont disointes.

On note aussi $+$ et on parle de ***somme*** , ce qui permet d'écrire des iso sympa

$$A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C) \qquad A^{B+C} \cong A^B \times A^C.$$

Pb : ca fera ambiguité avec loi produit $A + B := \{a + b\}_{a\in A}^{b\in B}$. On pourra donc utiliser le mélange

$$A \uplus B.$$

La somme directe est la notation ***duale*** du produit cartésien (en terme catégoriels, *cf.* exo). On les notera donc Π et $\amalg$.

Exo (version catégorielle).

On se donne A et B et on note $\left\{\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & (a,1) \\ A & \xrightarrow{i_A} & \\ & & A \uplus B \\ B & \xrightarrow{i_B} & \\ b & \longmapsto & (b,2) \end{array}\right.$.

MOntre que pour tout $\left\{\begin{array}{l} \alpha : A \longrightarrow S \\ \beta : B \longrightarrow S \end{array}\right.$ *il y a une unique application* $\varphi : A \uplus B \longrightarrow S$ *commutativsaint le diagramme :*

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \longrightarrow & S & \longleftarrow & \beta \\ \uparrow & & \uparrow \varphi & & \uparrow \\ \uparrow & & A \uplus B & & \uparrow \\ \uparrow & \nearrow i_A & & \nwarrow i_B & \uparrow \\ A & & & & B \end{array}.$$

DEM. Soit un tel (S, α, β). FIxons un élément de $A \uplus B$, eg $(a,1)$. Son image par φ est $\varphi(i_A(a)) = \alpha(a)$, et de même $\varphi((b,2)) = \beta(b)$, d'où l'unicité de φ. Cette dernière expression fonctionne.

RQ : cf exo sur produit, on renversé le sens des flèches

EXO (produit union) : on définit (il vaudrait écrire un symbole mélangeant $\times$ et $\cup$ à l'instar de $\uplus$)

$$A \otimes B := \{a \cup b\}_{b\in B}^{a\in A}$$

Mq $\otimes$ *est comm, assoc, neutre* $\{\emptyset\}$*, distrib sur* $\cup$
Mq $\mathfrak{P}(E \cup F) = \mathfrak{P}(E) \otimes \mathfrak{P}(F)$
Comparer $2^{E\cup F}$ *et* $2^E \otimes 2^F$ *en notant* 2^X *l'ensmbel des graphes des applications de* X *dans* $\{0,1\}$
Est-ce que $\otimes$ *est notion ensembliste (coserveée par iso) ?*
Mq si tous les $a \in A$ *sont dsijojints des* $b \in B$*, alors* $A \otimes B \cong A \times B$*. Réciproque ?*
Liens avec $\times$ *et* $\sqcup$ *?*

DEM
comm & assoc & neutre $\{\emptyset\}$: car $\cup$comm et asso et neutre$\emptyset$
distrib : $A \otimes (B \cup C) = \{a \cup x\}_{x\in B\cup C}^{a\in A} = \{a \cup b\}_{b\in B}^{a\in A} \cup \{a \cup c\}_{b\in C}^{a\in A} = (A \otimes B) \cup (A \otimes C)$
parties : $\mathfrak{P}(E) \otimes \mathfrak{P}(F) = \{A \cup B\}_{B\subset F}^{A\subset E} \subset \mathfrak{P}(E \cup F)$; de plus, une partie P de $E \cup F$ s'écrit $(P \cap E) \cup (P \cap (F \backslash E)) \in \mathfrak{P}(E) \otimes \mathfrak{P}(F)$.

Si un élément $x \in E \cap F$ est envoyé sur deux valeurs $\neq$ par deux graphes $f \neq g$, alors $f \cup g$ n'est pas une fonction et ne peut être dans $2^E \otimes 2^F$

NON (cf question d'avant). En fait deux singletons sont ensemblements isioorphes mais leurs éléments n'ont aucune raison de l'être : $\begin{array}{ccc} \{\emptyset, a\} \otimes \{a\} & = & \{a\} \\ \{\emptyset, a\} \otimes \{\emptyset\} & \overset{\{\emptyset\}\text{ neutre}}{=} & \{\emptyset, a\} \end{array}$ et pourtant $\{a\} \cong \{\emptyset\}$.

On a une surjetion $\left\{ \begin{array}{ccc} A \times B & \twoheadrightarrow & A \otimes B \\ (a, b) & \longmapsto & a \cup b \end{array} \right.$. Ssupp $a \cup b = a' \cup b'$; soit $x \in a$ (donc pas dans b' par hyothèse) : alors $x \in a \cup b = a' \cup b'$ et pas dans b', donc dans a'. Par symétrie, on a $a = a'$ puis demême $b = b'$. Récirpoque fausse : si $A = B = \{\{x\}\}$, alors la surjetion ci-desus est toujours injective.

Liens : on a de même (à iso près) $\times$ comm assoc et neutre (singletons) distrib sur $\sqcup$; de plus, $\mathfrak{P}(E \sqcup F) = \mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(F)$; enfin, si A et B disjoints, alors $A \cup B = A \sqcup B$.

Pas d'espoir de relier simplement $\times$ et $\otimes$ car l'un est ensembliste et pas l'autre