Logique prédicative (version chantier)

Marc SAGE

avril 2015

Table des matières

1	Logique prédicative (ou calcul des prédicats)	2
1.1	Langage : symboles d'objet (singulier, générique et invocable), de composition et de relation	3
1.2	Formules & énoncés : relation entre termes	4
1.3	Quantification, symboles d'objet génériques libres, formules closes, prédicats, conventions	5
1.4	Invocation : « fixer une variable »	6
1.5	Axiomes de la logique prédicative	7
1.6	Règles de la logique prédicative	7
1.7	Preuves, h-théorème de la déduction, ajout de symboles d'objet singulier	8
1.8	Théorie, schéma d'axiomes, théorème	9
1.9	Égalité, indistinguabilité	10
1.10	Contradictions, (in)consistance, indécidabilité	11
1.11	Complétude (syntaxique), existence explicite, rajout de symbole d'objet singulier	12
2	Sémantique des énoncés prédicatifs	13
2.1	Structures et modèles : interprétation du langage	13
2.2	Cohérence & complétude	14
2.3	Compacité ¹ et entiers non standards	15
2.4	Incomplétude (et récursivité)	15
2.5	Le problème de l'objet / la réalité mathématique	17
3	Logiques d'ordre supérieur	17
3.1	Langages et énoncés d'ordres supérieurs	18
3.2	Pouvoir et limites du deuxième ordre	19
4	Logique séquentielle	19
5	Logique prop & préd à la fois	19
6	Exos	20
6.1	Sur trois règles de la logique prédicative	20
6.2	Ajout de symbole d'objet singulier	20
6.3	l'indistinguabilité est une relations d'équivalence compatible avec les lois et relations	20
6.4	Variations sur l'indistinguabilité	21
6.5	Cohérence de la logique prédicative	22
6.6	la logique prédicative n'exprime pas la finitude	22

¹En topologie, ce terme est associé de près à la *finitude*.

Ce cours vise à décrire la logique des *prédicats*, dont l'énoncé des axiomes présuppose la logique des *propositions*.

1 Logique prédicative (ou calcul des prédicats)

Rq RUSSELL (*Introduction to Mathematical Philosophy*) :

(172) *The proposition « Socrates is a man » is no doubt equivalent to « Socrates is human », but it is not the very same proposition. The is of « Socrates is human » expresses the relation of subject and predicate ; the is of « Socrates is a man » expresses identity. It is a disgrace to the human race that it has chosen to employ the same word « is » for these two entirely different ideas – a disgrace which a symbolic language of course remedies.*

Frege en dit pas mal aussi :-)

cf. TLF

un **attribut** : *Tout caractère en tant qu'il est affirmé (ou nié) d'un sujet*

EG : tuquoise, mortel, petit...

un **prédicat** : *Qualité, propriété en tant qu'elle est affirmée ou niée d'un sujet.*

EG : être homme, satisfaire le théorème de complétude, marcher sur trois membres,

chaque attribut "A" donne lieu au prédicat "posséder l'attribut A"

chaque prédicat "P" donne lieu à l'attribut "vérifiant le prédicat P"

l'**attribution** : *Action d'attribuer quelque chose (à qqn) et résultat de cette action.*

la **prédication** : *Action, fait d'affirmer ou de nier un prédicat d'un sujet*

(≠prédiction!)

d'où les **jugements prédicatif** et **attributif**

On retiendra l'intérêt des prédicats : : **POssibilité de dire si le sujet se soumet ou non à une condition**

prédicat singulaire, binaire, tertiaire, quaternaire...

prédicat monadique, dyadique, triadique, tétradique...

Alain Michel, *thèses d'existence et travail mathématique* (dirigé par M. Serfait, *De la méthode*)

Comme l'a expliqué le premier Frege, du moins avec autant de clarté, dire qu'un certains être (par exemple Dieu) existe, c'est moins dire qu'un objet (à savoir Dieu), qu'il existe – ici, c'est seulement le langage qui nous trombe –, que dire d'un concept, donc d'un prédicat (être Dieu), qu'il est pas vide, et qu'il est rempli par au moins un individu : qu'un individu au moins tombe sous le concept de Dieu, et donc que le nombre appartient au concept en question. Ainsi, **comme le nombre, l'existence est un concept de second ordre, qui ne peut se dire d'un objet ou d'un individu, mais seulement d'un concept.**

(Gilles Dowek, *Les métamorphoses du calcul*, p. 119-120)

La dernière étape pour réconcilier les mathématiques constructives et non constructives consistait à proposer une variante de la logique des prédicats qui comprenne deux locutions « il existe » et des règles de déduction qui expriment la signification de ces deux locutions. Une telle logique a été proposée par Gödel, en 1933, sous le nom de « traduction négative ». Les détails de cette logique sont moins importants que le fait qu'elle montre que les mathématiques constructives et non constructives peuvent coexister pacifiquement, contrairement à ce que pensaient aussi bien Brouwer que Hilbert.

Albert Lautman (*le congrès international de philosophie des sciences (du 15 au 23 septembre 1935)*)

ce scandale logique qu'est le double sens du verbe être en grec, qui sert à la fois à lier l'attribut au sujet et à affirmer l'existence substantielle de ce même sujet

1.1 Langage : symboles d'objet (singulier, générique et invocable), de composition et de relation

On se donne un h-nombre arbitrairement grand de symboles dits « **d'objets** » (anciennement *symbole de variables*, même si on devrait dire *variable* tout court, même *fixable* et mieux *incarnable*) (chacun en attendant qu'on lui assigne un objet spécial) regroupés :

1. d'une part en **symboles d'objet générique** (sur lesquelles on va quantifier)
2. d'autre part en **symboles d'objet invocable** (que nous invoquerons localement dans une preuve), également appelées **symboles d'objet localement singulier** (car il joueront, le temps de l'invocation, le rôle d'un symbole d'objet singulier / d'individu) ou **symboles d'individu local**.

Lorsque a ou ε ou $\spadesuit$ désigne un symbole d'objet générique, il est coutume de comprendre le symbole pointé a_0 ou ε_0 ou $\spadesuit_0$ comme désignant un symbole d'objet invocable, comme une "fixation de la variable" (aussi absurde soit cette expression). On pourra visualiser le point 0 comme la marque d'une fléchette qui "imobilise le truc qui bouge/varie".

Cependant, afin d'éviter d'alourdir avec des indices, on préfère utiliser les lettres de fin de l'alphabet comme génériques et celle du début comme invocables (par exemple, x, y, z et a, b, c). Cette convention n'est pas systématique mais suit un certain usage : il sera sans doute confusant de noter x, y, z des invocables à côté de génériques a, b, c .

Un langage va être ce qui permet d'énoncer... : pas de modalité / temporalité.

h-Définition. Une **langage** est la donnée de trois h-séries (éventuellement infiniment longues) de symboles (distingables) :

1. ceux dits d'**objets singuliers**² ou d'**individus** ;
2. ceux dit de **composition** ou de **loi** ou d'**opération** ;
3. ceux dit de **relation** ou de **correspondance**.

Les symboles de composition et relation possède une **arité** qui est un h-nombre non nul.

RQ : on pourrait tout à fait définir un symbole d'objet singulier comme un symbole de loi d'arité nulle, mais cela ne sera pas pratique pour les définitions car les objet singulier s'apparentent bien plus aux objets qu'aux lois.

RQ : usuellement les h-suites sont *finies*. Cependant nous aurons besoin d'un h-nombre aussi grand que souhaité de symboles d'objet singulier pour compléter une théorie (et uniquement pour cela : montrer la h-complétude).

EG en pensant :

au entiers, on a un langage formé des symboles d'objet singulier 0, lois (binaire, ternaire, ou plus) $+$, $\times$ et de relation $\leq, |, =_1$.

à la géométrie (points droites plans), on a des lois binaires $\cap$, milieu, et des relations $\parallel, \perp, \in$, être point, être droite

aux ensembles, objets singulier $\emptyset$, lois $\cap \cup \setminus \mathfrak{P}$, relation $\in, \subset$, être disjoint (pour chaque h-nombre),

aux groupes : un objet singulier (le neutre), une loi binaire, une loi uniaire (l'inverse), $,$, une relation ternaire (valoir le composé),

aux ev (vecteurs & scalaires) obj sing vecteur nul & scalaire nul & scalaire 1, lois scalaire et linaires, des relations unaires (être scalaire/vecteur, être le vecteur nul), une relation ternaire « être dans le plan engendré par »

à la logique propo : des symboles d'objet singulier (V & F), des lois (les connecteurs logiques), des relations « prouve » et « est conséquence logique de », une relation binaire « avoir même vérité »,

Dans tous ces exemples, les symboles sont des *dessins*, *graphèmes*, dénué de sens (surtout celui qu'on aimerait spontanément leur attribuer!) On pourrait donc très bien définir pour les entiers des lois $\clubsuit \leq \parallel$ et des relation $\div \subset$.

²La tradition parle de symboles de **constante**, ce qui fait sens uniquement par opposition aux symboles de **variable**, terminologie dont nous avons suffisamment expliqué le caractère immensément confusogène.

Mettre ces symboles bout à bout permet de construire les *termes* du langage, à savoir ce sur quoi il sera légitime de porter un discours, ce dernier se traduit essentiellement par des *relations* entre termes.

RQ : si le langage ne possède pas de symbole de relation, on ne pourra rien « énoncer ». Il restera toujours possible de considérer ses termes (c'est ce que l'on a fait avec la logique propositionnelle).

1.2 Formules & énoncés : relation entre termes

h-Définition. Une *terme (prédicatif)* est

1. ou bien un symbole d'objet (*terme atomique*)
2. ou bien un symbole de loi s'appliquant à des termes

(attention, on suppose que cette définition récursive termine : pas de terme de longueur infinie!)

Rq Version algo : un terme s'obtient à partir de termes atomiques en utilisant un h-nombre de fois des symboles de loi $\rightarrow$ rsptation arboalire

RQ Version ensemble : les termes forment le plus petit ensemble stable par lois et contenant les termes primitifs

EG $(x + u) \times z + t \exp 2$ (penser à $(x + 1) 0 + 3^2$) ou $(\mathfrak{P}(A) \cap E) \setminus (X \cup V)$ ou une formule en logique propositionnelle.

En arbre, ça donne

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & + & & & \\
 & & & \times & & \exp & \\
 & & & z & t & 2 & \text{et} \\
 & + & & & & & \cap & \setminus & \cup \\
 & x & u & & & & \mathfrak{P} & A & X & V \\
 & & & & & & A & & &
 \end{array}$$

rappel (occurrence) : lorsqu'un même symbole apparaît plusieurs fois dans une h-suite de symboles, chacune de ses apparitions sera appelée une *occurrence* de ce symbole.

h-Définition. Une *formule (prédicative)* est

1. (*atomique/relationnelle*) ou bien un symbole de relation reliant des termes
2. (*propositionnelle*) ou bien un connecteur logique connectant une ou des formules
3. (*quantifiante*) pour x symbole d'objet générique (dont l'occurrence après le quantificateur est alors dite *quantifiée*)

(a) ou bien $\exists x, F$ (*existentielle*)

(b) ou bien $\forall x, F$ (*universelle*)

dans les deux cas, F est une formule dont aucune des occurrences de x n'est quantifiée.

(attention, on suppose que cette définition récursive termine : pas de formule de longueur infinie!)

Rq Version algo : on part de formules atomiques et l'on quantifie / connecte un h-nombre fini de fois (en faisant gaffe aux instances) $\rightarrow$ arbre

RQ Version ensembliste : les formules forment le plus petit ensemble contenant les formules atomiques et stable par connexion et quantification (respectant les symboles d'objet).

RQ Pour les connecteurs logiques, on peut se restreindre à *un seul* connecteur universel (ce qui évite de distinguer tous les cas dans d'éventuelles preuves)

RQ : si le langage n'a pas de symbole de relation, il n'y a pas de formule prédicative!

Rq historique : $\forall$ était noté (eg chez Cavallès) sous forme d'un produit $\prod$, analogue de la conjonction, de l'intersection, par exemple $\prod_{x \in \mathbf{R}} x^2 \geq 0$; de même, $\exists$ (anaogque d'une disjonction, d'une réunion) était noté avec une somme, par exemple $\prod_{n \in \mathbf{N}} \sum_{a,b,c,s \in \mathbf{N}} n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Dans les textes qui n'écrivaient pas ces symboles (whatever reason), $\forall x$ devenait (x) et $\exists x$ devenait Ex (eg Russell dans ses écrits non mathématiques, ou TLP de Wittgenstein)

RQ (parenthésages / priorité) : les formules atomiques sont prioritaire sur connecteur/quantif mais ambiguïté de $\implies$ sur quantif $\rightarrow$ dans le doute parenthéser

EG : $\forall a, \exists b, P(a) \wedge Q(b) \implies \forall c, R(a, b, c)$ pourrait signifier

$$\begin{aligned} \forall a, \exists b, ([P(a) \wedge Q(b)] \implies [\forall c, R(a, b, c)]) \\ \forall a, [(\exists b, [P(a) \wedge Q(b)]) \implies [\forall c, R(a, b, c)]] \\ [\forall a, \exists b, (P(a) \wedge Q(b))] \implies [\forall c, R(a, b, c)] \end{aligned}$$

EG $\forall x, P(x) \implies \exists y, Q(y)$ signifie souvent $[\forall x, P(x)] \implies [\exists y, Q(y)]$. On parserait sinon $\forall x, [P(x) \implies \exists y, Q(y)]$.

rQ : la dernière condition est pour éviter d'écrire $\forall x, \exists y, x \neq y$ en remplaçant y par x (ce qui changerait la valeur de vérité)

EG de formule prédicative

$$\begin{aligned} x + 0 \leq 3^a \wedge x \mid a \wedge =_3(t) \quad x \text{ générique/invocable} \\ \forall p \forall q, [(ppt) \wedge (qpt)] \implies [\exists D, (Dpte) \wedge (p \in D) \wedge (q \in D)] \\ \neg(A = \emptyset) \implies \exists a, a \in A \quad A \text{ générique/invocable} \\ \forall x, \exists y, 0 = 1 \\ \forall \lambda \forall \mu \forall v, (\lambda \text{scal} \wedge \mu \text{scal} \wedge v \text{vect}) \implies (\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v) \\ \exists z, (\lambda \text{scal} \implies \lambda \cdot z = z) \quad \lambda \text{ générique/invocable} \\ \forall P, Q, \left[(P \vdash Q) \xleftrightarrow{\text{connec}} \vdash \left(P \xrightarrow{\text{loi}} Q \right) \right] \text{ clos} \end{aligned}$$

on voit que les relations unaires permettent de différencier des **types** d'objets. Attention au dernier énoncé, on mélange les symboles de loi du langage avec les connecteurs logiques (ciment des énoncés)

EXO : *montrer que les formules sont énumérables*

Idée : h-suite finie de symboles, chacun étant élément d'une h-liste éventuellement infinie (mais énumérable) : symboles d'objet/loi/relatif, connecteurs logiques, quantif, virgules. Une fois choisie pour chacune des h-listes une numérotation de ses h-éléments, on dit que la formule de numéros $a, b, c, \dots, z$ a pour numéro $2^a 3^b 5^c \dots$ où le produit court sur les premiers.

1.3 Quantification, symboles d'objet génériques libres, formules closes, prédicats, conventions

quantif universel : Frege dans sa Begriffsschrift 1879

h-Définition. Une occurrence non quantifiée (d'un symbole d'objet générique) dans une formule est dite **libre** dans cette formule.

Un symbole d'objet générique est dit **libre** dans une formule si toutes ses occurrences y sont libres.

Une formule prédicative est dite **ouverte** si l'un de ses symboles d'objet générique possède une occurrence libre.

La forme est sinon dite **close** ou **fermée**. (il n'y aura pas besoin de détermination extérieure pour les interpréter). On parle aussi

d'allégation d'affirmation d'assertion
d'énoncé de proposition de thèse.

(on réservera le terme de *jugement* pour le métacadre. Parler d'*axiomes* ou de *postulats* sous-entend que l'on fonde une théorie, un *théorème* sera un énoncé prouvable à partir des axiomes)

Lorsque des symboles d'objet générique sont libres, mettons en h-nombre n , on parle de **prédicat** à n génériques libres, d'**arité** n ou plus simplement de **n -prédicat**.

RQ un n -prédicat peut devenir un symbole de relation d'arité n , par exemple l'inclusion est un 2-prédicat

Attention : la formule peut être close sans que tous ses symboles d'objet soient quantifiés (penser aux symboles d'objet singulier et invocable!), eg $a^2 + 1 \geq 2a$

Attention : une formule ouverte peut ne pas être un prédicat, EG $x = 0 \wedge \forall x, x \neq 1$ (le symbole x a une occurrence libre et une autre liée) ; on préférera éviter ces situations au vu de la convention ci-dessous et changer de générique (qui jouent des rôles différents), eg $y = 0 \wedge \forall x, x \neq 1$

EG :

EG de formule prédicative

$(x + 0 \leq 3^a) \wedge (x \mid a) \wedge =_3 (t)$ est un 1-prédicat en x
 $\forall p \forall q, (ppt) \wedge (qpt) \implies [\exists D, (Ddte) \wedge (p \in D) \wedge (q \in D)]$ est une assertion
 $\neg(A = \emptyset) \implies \exists a, a \in A$ est un 1-prédicat en A
 $\forall \lambda \forall \mu \forall v, (\lambda scal \wedge \mu scal \wedge v vect) \implies (\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v)$ est un énoncé
 $\exists z, (\lambda scal \implies \lambda \cdot z = z)$ pas clos si λ générique
 $\forall P, Q, \left[(P \vdash Q) \overset{convec}{\iff} \vdash \left(P \overset{loi}{\implies} Q \right) \right]$ est un affirmation (exprime le théoème de la déduction)

Sous-entendu de la quantification universelle dans un énoncé.

La quantification universelle sera toujours sous entendue sur un symbole d'objet générique libre.

Cette convention est justifiée par deux règles (à venir) : pour chaque 1-prédicat P :

1. si on dispose d'un énoncé $\forall x, P(x)$ (où x symbole d'objet générique), on peut en déduire $P(t)$ pour chaque terme du langage, en particulier un symbole d'objet invocable ;
2. si l'on considère un symbole d'objet invocable a puis que l'on montre $P(a)$, alors on peut en déduire $\forall x, P(x)$.

Bien sûr, pas de sens pour un prédicat pas clos (car on peut vouloir garder un symbole d'objet libre)

Convention. Comem on dit en français « qq soient $a, \dots, z$ en relation..., on a $P(a, \dots, z)$ » ou « il y a des schblurb en relation », on abrégera

$$\forall R(a, \dots, z), \text{ pour } \forall a, \forall b, \dots, \forall z, R(a, \dots, z) \implies \\ \exists R(a, \dots, z) \text{ pour } \exists a, \exists b, \dots, \exists z, R(a, \dots, z)$$

On peut éventuelmnt mettre un exmposant après le quantif pour précise le nombre de symboles d'objet. EG :

$$\forall A \subset \emptyset, \neg(\exists a \in A) \\ \forall^2 x \leq y, \exists \varepsilon, y = x + \varepsilon^2 \\ \forall Ddte, \exists^4 p, q, r, spoints, (p \in D) \wedge (q \in D) \wedge (r \in D) \wedge (s \in D) \\ \forall^2 D \perp \Delta, \exists ppoint, p \in D \cap \Delta.$$

Tous les (exemples d')écnonsé ci-dessusont une interprétaion « naturelle » dans le contexte arithémeique, ensembleiste, géométrique (j'avoue mon secret de fabricaion !). Mais on pourrait très bien en inventer des apparamemnt snas queu ni tete que l'on serait bien pein d'interpreter. Libre à eux d'exister, c'es le role du matheux de démeler dans le fatras d'énoncé exprimables ceux qui lui parlent (puis de recouper avec les prouvables)

1.4 Invocation : « fixer une variable »

Dans un démo, on est amené à « fixer des varaibles » pour raisonner dessus, du type

1. soit $\varepsilon > 0$
2. considérons un réel non algbérique α zéro de la foction f
3. prenons trois matrices 2×2 inverisble que l'on notera M, N, O
4. Fixons par la suite un sous-groupe H distingué dans G
5. Donnons-nous un complexe $\mathcal{C}$ de K -ev de dimension n^2 ainsi qu'un enmorphime de ce complexe.

h-Définition Une *invocation* est une suite de symbole de la forme

$$\downarrow a, \acute{E} \quad (\text{lire « Soit } a \text{ tel que } \acute{E} \text{ »})$$

où a est un symbole d'objet invocable (dit alors *invoqué*) et où $\acute{E}$ est un énoncé.

La flèche vers le bas pourra être interprétée comme « nous avons invoqué l'objet a , il tombe alors du ciel, il est là, il ne changera plus, il est *fixé* ». Tout autre symbole avec une meilleure visualisation est le bienvenu.

On pourra utilisier les mêmes abus de notation que pour les énoncé quantifiant, eg :

1. $\downarrow \varepsilon > 0$
2. $\downarrow \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha) = 0$
3. $\downarrow^3 M, N, O \in GL_2$
4. $\downarrow H \triangleleft G$
5. $\downarrow^2 \mathcal{C} \in \text{Comp}(K^{n^2}), \varphi \in \text{End } \mathcal{C}$

1.5 Axiomes de la logique prédicative

on aimerait bien pouvoir utiliser les tautologies du calcul propositionnel, d'où axiomes 1 & 2 (en fait $\exists$ est superflu)

on aimerait que les énoncés universel puissent s'appliquer à chaque situation (d'où 3) et que la donnée d'un objet invoqué (ou d'un complexe de tels objets) fasse office d'existence (axiome 4). Ainsi, 3 & 4 sont lien entre termes sans symboles d'objet générique et quantificateurs.

la quantif universel $\forall x, P(x)$ n'est qu'une conjonction infinie $\bigwedge_x P(x)$, de même pour $\exists$ et disjonction. On aimerait donc pouvoir utiliser les loi de De Morgan $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (qu'on laisse sous cette forme pour éviter TE) (d'où axiome 5) ainsi que les règle de substitution

$$[(A \iff A') \wedge (B \iff B')] \implies [A * B \iff A' * B']$$

pour chaque connecteur * dont on n'utilisera qu'une forme affaiblie (cf axiome 6)

Enfin des axiomes sont censés avoir une valeur de vérité (le vrai!), ce qui rend légitime de les instancier dans chaque $\forall$ d'une tautologie (cf axiomes 7)

h-Définition. *Les axiomes de la logique prédicative sont les sept suivants. Dans ce qui suit :
t va être un terme sans symbole d'objet générique, i. e. ne contenant que des symboles d'objet (localement) singulier*

x symbole d'objet générique

P et Q des 1-prédicats ou des énoncés

1. (tautologie) chaque tautologie $T(p_1, \dots, p_n)$ instanciée en énoncés
2. (tautologie et quantificateurs) $\forall x, T$ et $\exists x, T$ où T est une tautologie $T(p_1, \dots, p_n)$ instanciée en formules du type $P(x)$
3. (spécialisation) $[\forall x, P(x)] \implies P(t)$
4. (du fait à l'existence) $P(t) \implies [\exists x, P(x)]$
5. (loi de De Morgan) $\neg(\exists x, P(x)) \iff (\forall x, \neg P(x))$
6. (distributivité de $\forall$ sur $\implies$) $[\forall x, P(x) \implies Q(x)] \implies [(\forall x, P(x)) \implies (\forall x, Q(x))]$.
7. (vérité des axiomes précédents) chaque tautologie $T(p_1, \dots, p_n, \forall, \forall, \forall, \dots, \forall)$ instanciée où les $\forall$ sont remplacés par les axiomes ci-dessus.

Rq : si on applique l'axiome 7 à lui-même, cela reste stable : c'est dire qu'une tautologie où l'on remplace les $\forall$ par une tautologie est encore une tautologie.

RQ : si le langage n'a pas de symbole de relation, il n'y a pas de prédicat, donc pas d'axiomes!

1.6 Règles de la logique prédicative

On garde évidemment le *modus ponens*, d'où plein de règles corollaire des axiomes.

Voyons le rôle des invocations : pour invoquer, il nous suffira d'une existence. On veut pouvoir utiliser les propriétés de l'objet invoqué. Enfin, pour prouver un énoncé universel, on « fixe un objet et on montre l'énoncé sur cet objet ».

h-Définition. *Les règles de la logique prédicative sont les quatre suivantes. Comme pour les axiomes x va désigner un symbole d'objet générique
P et Q des énoncés ou des 1-prédicats
a va être un symbole d'objet invocable.*

1. (**modus ponens**) de A et $A \implies B$ déduire B (si A et B sont énoncés)
2. (**l'invocation provient de l'existence**) de $\exists x, P(x)$ déduire $\downarrow a, P(a)$
3. (**effectivité de l'invocation**) de $\downarrow a, \acute{E}$ déduire $\acute{E}$

4. (**généralisation**) de $\downarrow a, P(a)$ et $Q(a)$ déduire $\forall x, P(x) \implies Q(x)$

h-Corollaire (exo). Les trois règles suivantes sont valides (s'il y a un symbole de relation)
 (**modus ponens quantifié**) de $\forall x, P(x) \implies Q(x)$ et $\exists \forall x, P(x)$ déduire $\exists \forall x, P(x)$
 (**invocation ex nihilo**) invoquer un a tel que "une tautologie instanciée"
 (**généralisation**) pour montrer $\forall x, P(x)$, on invoque un a ex nihilo et on montre $P(a)$

Rq : pour montrer $\forall x, P(x) \implies Q(x)$, on peut toujours invoquer $\downarrow a, P(a)$ via $\exists x, P(x)$, sinon $\forall x, \neg P(x)$, or on a la tautologie $\neg p \implies (p \implies q)$, d'où l'axiome $\forall x, \neg P(x) \implies (P(x) \implies Q(x))$ puis substitution.

ARNAQUE : ce n'est pas parce de P on peut déduire une contradiction que l'on peut déduire $\neg P$! ce devrait être vrai avec théorème de déduction.

1.7 Preuves, h-théorème de la déduction, ajout de symboles d'objet singulier

h-Définition. Une **preuve** d'un énoncé Θ (appelé **thèse**) à partir de propositions $A, B, C, \dots, Z$ (éventuellement aucune, appelées **hypothèses**) est une h -suite finie de propositions ou d'invocations finissant par Θ telle que chacune est

1. ou bien une hypothèse
2. ou bien un axiome
3. ou bien déduite des précédentes par une règle.

On impose en outre que

1. la première occurrence d'un symbole d'objet invocable est son invocation (les objets invoqués sont nouveaux)
2. aucun symbole d'objet invocable de Θ n'est invoqué dans la preuve (les objets invoqués dans Θ l'ont été avant la preuve)

On note alors

$$A, B, C, \dots, Z \vdash \Theta$$

et on dit que les propositions $A, B, C, \dots, Z$ prouvent Θ .

Lorsque la thèse Θ peut être déduite uniquement à l'aide des axiomes et des règles, i. e. quand

$$\vdash \Theta,$$

on dit que Θ est un **théorème (prédicatif)**

RQ Version ensembliste : les théorèmes prédicatifs forment la plus petite famille d'énoncés/invocations contenant les axiomes qui soit stable par preuve prédictive et dont on a ensuite retiré chaque les invocations (à cause des invocations, preuve et théorème ont version algo crades)

EG : montrons qu'une somme de suites complexe de limites nulles converge vers 0.

Le langage est celui des suites complexe ou entiers (qui apparait dans la définition), loi +, loi binaire "le n -ième terme de", relation "être une suite/entier", relation <

Traduisons : $\forall (u \text{ suite} \longrightarrow 0), \forall (v \text{ suite} \longrightarrow 0), (u + v \longrightarrow 0)$ où l'on a abrégé

$$a \longrightarrow 0 \text{ pour } \forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ entier}, \forall n \text{ entier} > N, |a_n| < \varepsilon.$$

On commence par invoquer $\downarrow u, (u \text{ suite}) \wedge (u \longrightarrow 0)$, puis $\downarrow (v \text{ suite}) \wedge (v \longrightarrow 0)$ puis $\downarrow \varepsilon > 0$. Par effectivité de l'invocation, on a $u \longrightarrow 0$, d'où en spécialisant en le terme $\frac{\varepsilon}{2}$ la prop $\exists N \text{ entier}, \forall n \text{ entier} > N, |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. On invoque alors $\downarrow U_0 \text{ entier}, \forall n \text{ entier} > U_0, |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Idem pour v avec un V_0 . Montrons alors $\forall n \text{ entier} > U_0 + V_0, |u_n + v_n| < \varepsilon$, ce qui donnera par existence $\exists N, \forall n \text{ entier} > N, |u_n + v_n| < \varepsilon$ et conclura.

On invoque $\downarrow n \text{ entier} > U_0 + V_0$. On utilise $n > U_0 + V_0$, d'où $n > U_0$, d'où (spécialiation) $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ et de même $|v_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. En spécialisant le théorème $\forall a, b \text{ complexes}, |a + b| \leq |a| + |b|$ il vient $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$, puis en spécialisant l'addition des inégalités ainsi que sa transitivité on obtient $|u_n + v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, cqfd.

Il est immédiat par *modus ponens* que si $\vdash (A \implies \acute{E})$ alors $A \vdash \acute{E}$. Il est remarquable d'avoir la réciproque.

En d'autres termes, une preuve *relative* (de $\acute{E}$ à partir de A) revient toujours à une preuve *absolue* (de $A \implies \acute{E}$), i.e. à un théorème.

h-Théorème de la déduction. *Si $A \vdash \acute{E}$, alors $A \implies \acute{E}$ est un théorème.*

Il suffit de le faire pour $\acute{E}$ une contradiction $\spadesuit$ (instanciée en des énoncés) : en effet, il suffira alors de montrer $\neg (A \implies \acute{E}) \vdash \spadesuit$ pour conclure $\vdash \neg \neg (A \implies \acute{E})$ et $(A \implies \acute{E})$ par TE, et l'on prouve à partir de $\neg (A \implies \acute{E}) \vdash A \wedge \neg \acute{E}$ d'une part $\neg \acute{E}$, d'autre part $A \vdash \acute{E}$ d'où la contradiction.

Il suffit de montrer $A \implies \spadesuit$ car on utilise la contraposée $\neg \spadesuit \implies \neg A$ et la tautologie $(\forall \implies p) \implies p$ instanciée en $\binom{p}{\forall} \leftarrow \binom{\neg a}{\neg \spadesuit}$.

Si $\spadesuit$ est un axiome, on obtient un axiome en instanciant la tautologie $p \implies \forall$ en $\binom{p}{\forall} \leftarrow \binom{A}{\spadesuit}$, d'où $A \implies \spadesuit$, cqfd

Par réc sur longueur de la preuve.

$l = 2$:

Si $\spadesuit$ est A , on instancie la tautologie $p \implies p$ en $p \leftarrow A$, d'où $A \implies \spadesuit$, cqfd.

Si $\spadesuit$ est un axiome, déjà fait.

Si $\spadesuit$ est déduite par une règle, ce n'est pas par invocation ($\spadesuit$ n'est pas une invocation), ce n'est ni le *modus ponens* ni la généralisation (faute de longueur) ni l'effectivité de l'invocation (A n'est pas une invocation), d'où absurdité.

$l \geq 3$:

si $\spadesuit$ axiome, déjà fait. Sinon $\spadesuit$ est déduit par une règle. Or $\spadesuit$ n'est ni une invocation ni un énoncé existentiel (car c'est une instanciation d'un terme propositionnel) il reste :

Si *modus ponens*, on a une preuve $\underbrace{A_1, \dots, A_k, \dots, A_k \implies \spadesuit, \dots, \spadesuit}_{A_k \implies \spadesuit}$, d'où par rec $A \implies A_k$; or on a aussi $A_k \implies \spadesuit$, d'où par *modus ponens* $A \implies \spadesuit$.

Si $\spadesuit$ vient d'invocation $\downarrow a, \spadesuit$ (où l'symbole d'objet invocable a n'apparaît pas dans $\spadesuit$) l'invocation vient de $\exists x, \spadesuit$. Par rec, on a $A \implies (\exists x, \spadesuit)$, d'où (*modus tollens*) $(\forall x, \neg \spadesuit) \implies \neg A$. Or, $\neg \spadesuit$ est une tautologie instanciée blabla, donc $(\forall x, \neg \spadesuit)$ est un axiome. D'où $\neg A$ par *modus ponens*.

RQ : ce h-théorème utilise encore le h-principe d'induction. La h-démonstration ci-dessus est cependant constructive et devient effective pour n'importe quelle preuve de longueur un h-nombre.

EXO $mq \forall x, (\acute{E} \implies P(x)) \text{ prouve } \acute{E} \implies (\forall x, P(x))$

h-Dem. (on utilise TE à souhait) Partons de la négation $(\exists x, \neg P(x)) \wedge \acute{E}$. On en tire $\downarrow a, \neg P(a)$ puis $\neg P(a)$. De l'hypothèse $\forall x, (\acute{E} \implies P(x))$ on spécialise $\acute{E} \implies P(a)$, d'où de $\acute{E}$ on tire $P(a)$. Par conjonction on obtient $\spadesuit = P(a) \wedge \neg P(a)$

On a donc mq $\neg (\forall x, P(x)) \vdash \spadesuit$, d'où $\vdash \neg \neg (\forall x, P(x))$ et $\vdash \forall x, P(x)$.

h-Cor. *Soient x un symbole d'objet générique, a un symbole d'objet invocable et P 1-prédicat. On a alors l'équivalence*

$$[\forall x, P(x)] \iff P(a)$$

Voici donc la justification de la convention de sous-entendre la quantification universelle.

1.8 Théorie, schéma d'axiomes, théorème

On fixe un langage

h-Définition (cloture déductive, théorie, axiomatisabilité). *Soit E un h-ensemble de formule (descriptible). La **cloture déductive** de E est le plus petit ensemble E^+ contenant E et stable par $\vdash$. Lorsque $E^+ = E$, on dit que E est une **théorie**. Lorsque E est engendré par un (nombre fini d')énoncé(s), on dit que E est **finiment axiomatisable**.*

En pratique, on ne pourra décrire une théorie que par une base axiomatique. Par abus de langage, on identifiera une théorie à une telle base.

h-Définition (théorie bis) *Une théorie est la donnée d'une famille d'énoncés close par déduction.*

Une **théorie** est la donnée d'une certaine h-famille d'énoncés, appelés **axiomes** ou **postulats** (anciennement **demandes**)

Lorsque la famille suit un certain « pattern », un certain schéma, on parle alors souvent d'un **schéma** (d'axiomes)

Un **théorème** dans une théorie est

1. ou bien un axiome de la théorie

2. ou bien un énoncé prouvé à partir de théorème et des règles/axiomes de la logique prédicative

RQ. En termes ensemblistes, les théorèmes d'une théorie forment la plus petite famille d'énoncés contenant les axiomes et stable par preuve prédicative.

EG : groupes, anneaux, ev, entiers, ensembles.

Arithmétique de Robinson PA_* : deux axiomes sur les successeurs (qui traduisent que l'incrémentaion induit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$), axiomes sur le rôle de 0 et S pour calculer $+$ et $\times$

$$\begin{aligned}n &\neq 0 \implies \exists m, n = s(m) \\a &\neq b \implies s(a) \neq s(b) \\n + 0 &= n & a + s(b) &= s(a + b) \\n \times 0 &= 0 & a \times s(b) &= a \times b + a\end{aligned}$$

(suffisant pour montrer Godel)

Arithmétique de Peano PA_1 : on rajoute l'axiome d'induction pur chaque 1-prédicat P

$$(P(0) \wedge [\forall n, P(n) \implies P(s(n))]) \implies [\forall n, P(n)].$$

Si préférée écrire au second ordre PA_2 , on met un $\forall P$ devant.

RQ : comment coller deux théories ? avec une agraffe m'a-t-on balancé un jour :- (Plus sérieusement : on rajoute deux symboles de relations pour *typer* les symboles d'objet, puis on écrit les deux théories en rajoutant le bon typage.

En puissance, une théorie contient chq énoncé qu'elle prouve (comme les règles de grammaire française contiennent en puissance tous les textes littéraires jamais écrits). En pratique, il faut faire le tri dans ce qui nous intéresse.

CITER *triangle de pensées* page 16 Alain Connes :

Si l'on devait utiliser une machine logico-déductive quelle qu'elle soit, produisant mécaniquement des assertions démontrables dans un système logico-déductif donné, toute la difficulté serait de déterminer parmi les myriades de propositions ainsi produites celles qui ont du sens et de les distinguer de celles qui sont insignifiantes. C'est un problème que l'on ne peut pas éluder.

1.9 Égalité, indistinguabilité

introduction of the notation “ = “ by Robert Recorde in 1557 (source https://www.academia.edu/12184900/PREPRINT_To_Its_Written_Expression)

(résultat needed que pour th complétude, mais concept intéressant à traiter ->EXO)

Rant sur l'égalité comme "sélection" de ce que l'on souhaite retenir : tous les objets équivalents / indistinguables pour nos critères seront dits égaux.

Citer Bergson dans le rire (eg des moutons) et Frege (151 *abstraire, c'est oublier*) *Faire abstraction de quelque chose, ce n'est rien d'autre que ne pas y prêter une attention particulière. Le cœur de l'affaire est évidemment dans le mot « particulière ». L'inattention est une lessive très mordante, elle ne doit pas être employée avec une concentration trop forte si on ne veut pas qu'elle dissolve tout ; mais elle ne doit pas non plus avoir une concentration trop faible si on veut qu'elle produise une altération suffisante. Tout repose donc sur le juste degré de la solution, et il n'est pas facile de tomber juste.*

Pour les preuves, il est naturel de dire que deux termes sont insinguales si remplacer l'un par l'autre prouve les mêmes énoncés (Leibniz : critère *salva veritate*). IL serait souhaitable que cette notion soit RST et stable par création de termes, ce qui est renvoyé en exo.

CRITIQUE : l'indistinguabilité pourrait ne pas être transitive, comme les points du continu (Poincaré)...

Autre vision : égalité de *substitution*. On en a besoin simplement pour mener un calcul (cas des permutations où pas de relation dans le langage).

Possibilité : toujours ajouter = comme symbole de relation et demander principes :

1. (salva veritate) $a = b \implies P(a) \iff P(b)$
2. RST (çàd = est rel d'eq la plus fine : chq classe est un singleton)

!!!! Le principe 1 est une **définition** au 2e ordre.

h-Définition. On dit que deux termes d'une théorie t et t' sont **indistinguables** pour la théorie si cette dernière prouve $P(t) \iff P(t')$ pour chaque 1-prédicat P . On note alors $t \equiv t'$. (c'est un symbole du h-langage au même titre que $\vdash$)

h-Propriété. Pour chaque termes a, b, c , chaque théorie prouve

1. **réflexivité** $a \equiv a$
2. **symétrie** si $a \equiv b$, alors $b \equiv a$
3. **transitivité** si $a \equiv b$ et $b \equiv c$, alors $a \equiv c$

h-Propriété (compatibilité avec les lois et relations). On se donne des termes $a, b, \dots, z, a', b', \dots, z'$ tels que $a \equiv a'$ et $b \equiv b'$ et ... et $z \equiv z'$. Alors

1. pour chaque symbole de relation R (d'arité n), la théorie prouve $R(a, b, c, \dots, z) \iff R(a', b', c', \dots, z')$
2. pour symbole O d'opération (d'arité n) les termes $O(a, b, c, \dots, z)$ et $O(a', b', c', \dots, z')$ sont indistinguables.

1.10 Contradictions, (in)consistance, indécidabilité

Appelons **contradiction** chaque instance (en énoncés) d'une anti-tautologie (eg la négation d'une tautologie, eg $\neg p \wedge p$).

h-lemme. Si une théorie prouve une contradiction, alors elle prouve chaque énoncé.

h-dem Soit C une contradiction et P n'importe quelle proposition. Alors $\neg C$ est une tautologie instanciée, donc un axiome prédictif. De même pour la tautologie $\neg C \implies (C \implies P)$ En copuant avec $\neg C$, on obtien $C \implies P$, d'où P en coupant cette fois avec C .

Ce h-lemme motive la définition suivante.

h-Définition. Une théorie est dite :

1. **inconsistante** : si elle montre une contradiction (eg A et $\neg A$). Alors tout est prouvable, il n'y a aucun relief entre énoncés (non-)prouvables, aucune formen, aucune consistance ;
2. **consistante** : pas de contradiction (pas automatique si axiomes contiennent un énoncé et sa négation), elle se « tient ».

RQ. Vu le h-lemme, une théorie inconsistante prouvera chaque énoncé, donc *n'importe quelle* contradiction. On peut donc remplacer dans la def ci-dessus "une contradiction" par une contradiction de notre choix, par exemple "un énoncé et sa négation".

Lorsqu'on étudie une théorie, on doit toujours être persuadé de sa consistance, que ce soit par un acte de foi ou par des arguments détourné. Le rêve de D. Hilbert de montrer la consistance des maths à l'aide des maths s'est effondré depuis Gödel qui a construit un énoncé indéciable (et vrai) en arithémétique.

h-définition. Un énoncé est dit **indécidable** (par une théorie) si cette théorie ne prouve ni cet énoncé ni sa négation

h-prop (élargissement des axiomes). Rajouter un indécidable préserve la consistance.

h-dém. SOit T théorie et I indécidable tels que T, I prouvent une contradiction C . Par le h-th de déduction, $T \vdash (I \implies C)$, d'où par moduls tollens $T \vdash (\neg C \implies \neg I)$; or $\neg C$ est un axiome prédictif, d'où par modus ponens $T \vdash \neg I$, contredisant l'indécidabilité.

Réciproquement, il est immédiat que si T, I consistane, alors d'une part T est consistante, d'autre part ou bien I est indéciable ou bien T, I a même force que T (ie $T \vdash I$).

Une première approche pour obtenir une consistance est de dire : si je peut interpréter mon langage de manière univoque dans la « réalité », alors il ne peut contenir de contradiction (sinon une telle contradiction s'interpréterait de manière unique dans la réalité, ce qui nous coûterait très cher). Cette approche est fructueuse, et pose la question de l'interprétation, de quelle réalité. Elle peut se réduire à celle d'une interprétation primitive (celle des ensembles), laquelle reste problématique.

1.11 Complétude (syntaxique), existence explicite, rajout de symbole d'objet singulier

Vers le théorème de complétude, on aura besoin de deux notions.

h-Définition Une théorie est dite

1. **(syntaxiquement) complète**³ : si elle prouve chaque énoncé ou sa négation (a une opinion "prouvabilité" sur chaque énoncé) ;
2. **explicite** : si (pour chaque 1-prédicat P) dès qu'elle prouve $\exists x, P(x)$ elle prouve $P(c)$ pour un symbole d'objet singulier

Une théorie inconsistante est toujours complète. Une théorie consistante prouve chaque énoncé ou bien sa négation. Une théorie est incomplète ssi elle possède un énoncé indécidable.

Une théorie explicite lève le problème de "il en existe, mais donnez-en moi un !"

On va montrer que chaque théorie peut se compléter en une théorie complète explicite (on rajoute un témoin pour chaque énoncé existentiel), à condition d'autoriser une h-liste infinie de symbole d'objet singulier.

h-théorème (Henkin). Soit T une théorie consistante écrite dans un langage L . Alors il existe une théorie TT complète consistante explicite⁴ écrite dans le langage L enrichi d'une infinité énumérable de symboles d'objet singulier.

h-démonstration. Le point fondamental est de pouvoir énumérer les énoncés d'un langage (cf. h-énoncé de l'avertissement). On forme un langage LL en rajoutant à L une liste arbitrairement grande d'objets singuliers $c_1, c_2, \dots$ et on en énumère les énoncés $E_1, E_2, E_3, \dots$. On construit alors une suite de théories consistantes et une suite de langages par h-récurrence.

On part de $T_0 := T$ et $L_0 := L$. Supposons construites T_{n-1} et L_{n-1} pour un h-entier n non nul. Si T_n est inconsistante avec E_n , on rajoute $\neg E_n$; sinon on rajoute E_n . La consistance est préservée dans le même langage par le h-théorème de déduction. Dans le dernier cas où de plus E_n est existentiel, disons $\exists x, P(x)$, on rajoute en plus l'énoncé $P(c)$ où c est un symbole de la liste qui n'a pas encore été utilisée et que l'on rajoute pour former L_n . La consistance doit être vérifiée, ce qui fait l'objet du point 3 d'un h-lemme rejeté en fin de preuve (cf exo).

On considère la théorie "limite" TT réunion des T_n et concluons.

Considérons un énoncé de LL . C'est donc un E_n qui est par construction décidé par T_n , a fortiori par TT . Donc cette dernière est complète.

Si TT était inconstant, une sous-théorie finie serait inconsistante dans LL : une preuve met en jeu des hypothèses d'une T_α et les symboles d'un langage L_β , et l'on peut supposer $\alpha = \beta$ quitte à augmenter l'un vers l'autre. Mais alors T_α , ce qui n'est pas.

Enfin, si TT prouve $\exists x, P(x)$, un sous-théorie finie le prouve, ie un T_n , mais alors on a rajouté un $P(c)$, donc TT explicite.

Le h-lemme suivant (preuve en exo) nous dit qu'un symbole d'objet localement singulier peut être vu comme symbole d'objet singulier dans un autre langage – plus grand.

h-lemme (ajout de symboles d'objet singulier). On se donne une théorie T et un 1-prédicat P écrits dans un langage L . On enrichit L en un langage LL en rajoutant un symbole d'objet singulier c .

³Certains auteurs rajoutent la consistance.

⁴on parfois **explicitement complète** pour explicite et complète

1. Si T prouve $P(c)$ dans LL , alors T prouve $\forall x, P(x)$ (dans L)
2. Si T prouve Θ (énoncé sans c) dans LL , alors T prouve aussi Θ dans L .
3. Si la théorie T à laquelle on rajoute l'énoncé $\exists x, P(x)$ est consistante (dans L), alors il en est de même (dans LL) en remplaçant $\exists x, P(x)$ par $P(c)$

2 Sémantique des énoncés prédicatifs

Grande question de l'interprétation d'un langage. Pour les formules de la logique propositionnel, c'était facile via les tables de vérité. Mais que dire des autres symboles d'objet singulier / lois / relation ?

Idée expliquant le symbolisme :

un d'objet singulier $\rightarrow$ un objet *concret*

une loi $\rightarrow$ une loi *concrete* pour composer des objets entre eux

une relation $\rightarrow$ une mise en relation *concrete* (vrai ou faux).

On pourra alors interpréter récursivement chaque terme et chaque énoncé.

eg : langage sans d'objet singulier ni lois, avec une relation unaire C une relation binaire $\sim$

$\blacksquare \dots \diamond \blacksquare \dots \diamond \dots \blacksquare \blacksquare \dots \diamond \dots \diamond \blacksquare \dots \blacksquare \dots \blacksquare$
 structures : $\vdots$ et $\vdots$ C signifie
 $\diamond \dots \blacksquare \blacksquare \blacksquare \diamond$

"être un carré $\blacksquare$ ", $\sim$ signifie "être relié en pointillé".

2 axiomes $\forall C(x), \exists y, \neg C(y) \wedge x \sim y$ et $\forall^2 x \sim y, C(x) \iff \neg C(y)$

structures 1 et 2 satisfont deux axiomes, structure 3 satisfait premier axiome mais pas second, structure 4 satisfait aucun axiome.

Rq : Les conj ou disj peuvent porter sur tous les objets, donc induisent potentiellement de l'infini, donc recours à théorie de l'infini semble inévitable, ce qui mène à la théorie des ensembles.

2.1 Structures et modèles : interprétation du langage

h-Définition. On fixe un langage L .

Une L -**structure** est un h-ensemble $\mathcal{S}$ où l'on peut interpréter le langage, à savoir la donnée :

1. des h-éléments pour les symboles de cstes ;
2. des h-lois de composition entre h-éléments de $\mathcal{S}$ pour les symboles de loi ;
3. des h-relations entre h-éléments de $\mathcal{S}$ pour les symboles de relation.

On fixe une L -structure $\mathcal{S}$. L'**interprétation** d'un terme (resp. énoncé prédicatif) de L sont définis comme le h-élément de $\mathcal{S}$ (resp. la valeur vrai/faux) comme suit :

1. d'un terme atomique : le h-élément de $\mathcal{S}$ correspondant au symbole d'objet singulier
2. d'un terme : récursivement à l'aide des h-lois de composition
3. d'un énoncé atomique : à l'aide de la h-relation correspondante (vrai ou faux)
4. d'un énoncé propositionne : comme en logique propositionnelle
5. d'un énoncé universel : vrai ssi tous les quantifiés sont vraie
6. d'un énoncé existentiel : vrai s'il y existe un h-élément de $\mathcal{S}$ satisfait le quantifié.

Lorsque l'interprétation d'un énoncé $\hat{E}$ est "vrai" dans $\mathcal{S}$, on dit que $\mathcal{S}$ **satisfait** ou **valide** ou **vérifie** $\hat{E}$ ou plus simplement que $\hat{E}$ est **vrai dans** $\mathcal{S}$ et on note

$$\mathcal{S} \models \hat{E}.$$

Un **modèle** d'une théorie est une structure où axiomes vrais (donc cohérence!).

Une **tautologie (prédicative)** est un énoncé vrai dans chaque structure (donc qq soit manière de l'interpréter). On parle également d'énoncé **valide** (en un sens absolu, indépendamment de toute structure).

Exemples.

chaque L -structure est un modèle de la théorie vide sur L .

chaque tautologie (propositionnelle) instanciée en énoncés prédicatifs est une tautologie prédicative.

Plus généralement (**exo**), les axiomes de la logique prédicative sont tautologiques!

on se donne une structure $\mathcal{S}$ et on considère tous les énoncés prédicatifs satisfait par $\mathcal{S}$. C'est la théorie du premier ordre $Th_1(\mathcal{S})$ satisfaite par $\mathcal{S}$. Par définitivo, $\mathcal{S}$ en est un modèle. Par ailleurs, $Th_1(\mathcal{S})$ est complète puisqu'un énoncé a *toujours* une interprétation (vrai ou faux) dans $\mathcal{S}$.

Se reposent alors les questions de cohérence et (surtout) de complétude : une tautologie est-elle prouvable?

La validité d'une formule dépend *a priori* de l'interprétation des termes, il n'y en avait qu'une en logique propositionnelle (vrai ou faux)

2.2 Cohérence & complétude

h-th (cohérence) *les énoncés prouvés par une théorie sont vrai dans chaque modèle de cette théorie ie un modèle d'une théorie satisfait tous les énoncés prouvés par cette théorie*

en particulier, les théorèmes prédicatifs sont tautologiques $\rightarrow$ cf. exo

h-th complétude (Gödel - Henkin, 1929) :

Une théorie complète consistante & explicite admet une structure où vérité et prouvabilité coïncident. chaque théorie consistante a un modèle dont les symboles d'objet singulier sont énumérables

h-Preuve.

D'après le h-théorème de henkin, le second point résulte du premier (chaque modèle est modèle de chaque sous-théorie).

On construit alors un modèle $\mathcal{M}$ en considérant les termes du langage modulo indistingabilité. On interprète :

1. t comme sa classe de t
2. $O(t)$ comme sa classe (ok par h-lemme de compatibilité)
3. $R(t)$ comme " T prouve $R(t)$ " (ok par h-lemme de compatibilité)

On montre que les énoncés de T sont vrai dans $\mathcal{M}$, par rec sur leur complexité (avec $\neg$ et $\wedge$). Hic : la récurrence peut faire sortir de T , donc on récurse sur les énoncés *prouvés* par T . Second hic : pour utiliser la complétude de T , on aura besoin d'*augmenter* la taille avec $\neg$ au sein de la récurrence, on va donc montrer par rec qu'un énoncé est vrai dans $\mathcal{M}$ si *et seulement si* il est prouvé par T (ça fait chier car on n'en a besoin que pour les énoncés négatifs et il faudra se farcir l'autre sens pour les autres ; mais le vrai=prouvable vaut le détour)

Par construction, T prouve chaque énoncé atomique ssi $\mathcal{M}$ vérifie ceux-là (en ce sens, si l'on cherchait un modèle avec vrai=prouvable, on *devait* considérer ce modèle)

Soit $\acute{E}$ énoncé de la forme $\neg A$. Si prouvé par T , alors (consist) A faux dans $\mathcal{M}$ (sinon par rec T prouve A), donc $\neg A$ vrai. Réciproc, si vrai dans $\mathcal{M}$, alors A faux, donc (rec) T ne prouve pas A , donc (complétude) T prouve $\neg A$.

Soit $\acute{E}$ énoncé de la forme $A \wedge B$. Si prouvé par T , par consistence, T ne peut pas prouver ni $\neg A$ ni $\neg B$, donc (par complétude) T prouve A et B , donc (rec) A et B sont vrais dans $\mathcal{M}$, donc $A \wedge B$ aussi. Récip clair : si $A \wedge B$ vrai, alors A et B vrais, donc (rec) T prouve A et B , a fortiori $A \wedge B$.

Soit $\acute{E}$ énoncé de la forme $\forall x, P(x)$. Si T le prouve, pour t terme, on a une preuve de $P(\bar{t})$, donc (rec) $P(\bar{t})$ est vrai, d'où (faisant varier t) la vérité de $\acute{E}$. Sinon, par complétude T montre $\exists x, \neg P(x)$, donc montre un $\neg P(c)$, d'où (rec & consist) $P(c)$ faux, a fortiori $\forall x, P(x)$.

Soit $\acute{E}$ énoncé de la forme $\exists x, P(x)$. Si T le prouve, alors T prouve un certain $P(c)$, donc (rec) $P(c)$ vrai, tout comme $\exists x, P(x)$. Rec, si vrai, alors il ya un objet o tel que $P(o)$, ie un terme t tel que $P(\bar{t})$ vrai, d'où (rec) T prouve $P(\bar{t})$ et par axiome $\exists x, P(x)$.

Variante. Fixons théorie T . Un énoncé est

vrai dans chaque modèle de T ssi théorème de T

Cor (cf complétude LP). (Tvide) Un énoncé prédictif est

valide ssi théorème prédictif

en d'autres termes : *les tautologies sont les théorèmes*

En revanche, on verra que (incomplétude)

vrai dans un modèle de T n'implique pas (toujours) théorème de T

2.3 Compacité⁵ et entiers non standards

h-théorème de compacité.

T a un modèle ssi chaque sous-théorie finie a un modèle

DEm : $\Leftrightarrow$ consistante $\Leftrightarrow$ chaque sous théorie est consistante

Application 1 : vers les entiers non standard

Application 2 : limites du pouvoir d'expression de la logique prédictive

cor *il y a des modèle de Peano pas comme les h-entiers.*

dem on rajoute un symbole de ω et les axiome $\omega > 0, \omega > 1, \omega > 2, \dots$. Alors chaque sous théorie finie contient un n max tq $\omega > n$ et il suffit d'interpréter ω en $n + 1$.

Mieux : *il y a beaucoup de modèle de Peano pas standards*

Dem : on raffine : pour A partie de h-entiers, on rajoute un symboles de cste ω et les axiomes "les diviseurs de ω sont exactement les entiers de A ". chaque sous-ens fini a clairement un modèle, donc T_A a un modèle $\mathcal{M}_A$. Pour $A \neq B$, il y a un h-entier $a \in A \setminus B$, donc $a \mid \omega$ sera vrai dans $\mathcal{M}_A$ et pas dans $\mathcal{M}_B$, donc ils ne sont pas isomorphes.

Vers **Lowenheim-Skolem** : en rajoutant des symboles d'objet singulier, on peut faire croître la taille des modèles comme on veut (cela donne même lieu à un théorème

EXO : *Pour chaque langage L, il n'y a pas de théorie écrites dans L dont les modèles sont les structures finies (de L).*

Rq : *(On the ontological significance of the LS theorem, by John R. Myhill)*

there is an elementary mathematical notion which escapes formalism within the first order functional calculus.

(Notice that the sense of 'escapes formalization' is here much more far-reaching than that in which, according to Gödel's theorem, the arithmetic of natural numbers escapes formalization. For here we place no restrictions on the system from the point of view of axiomatizability or recursive enumerability.)

[...] a formalism [...] cannot force the interpretation of any of its predicate-letters as a relation with a non-denumerable field.

Curiosité :

Soit $\forall n, P(n)$ indécidable. On définit $a_n = 1$ si $A(0), A(1), \dots, A(n)$ et 0 si $\exists m < n, nonP(m)$. Alors a_n stationne mais impossible de prouver vers quoi.

2.4 Incomplétude (et récursivité)

Suivant Henkin, vrai= $\Rightarrow$ prouvable sous de fortes conditions. MAis faux dans $\mathbb{N}$

idée de base : Codage des preuves par les entiers $\rightarrow$ chaque énoncé de preuve est arithmétique (sans récurrence).

Ainsi, chaque théorie contenant $0, s, +, \times$ et les axiomes de PA_* pourra dire des choses de ses preuves.

Oo note $\left[\overset{\cdot}{E} \right]$ le numéro de l'énoncé $\overset{\cdot}{E}$

⁵En topologie, ce terme est associé de près à la *finitude*.

on regarde les énoncés construits de manière "*récurvie*", çàd "calculables" (au sens de la thèse de Church)

h-def. les énoncés Σ_1 sont engendrés d'une part par les formules sans quantif, d'autre part par conj, dijs, quantif existentielle et quantif universelle bornée.

Par exemple,

$$\exists a, \exists b, \exists c, (\forall x \leq 42, x = a + bc)$$

complétude Σ_1

chaque énoncé Σ_1 vrai dans $\mathbb{N}$ est prouvable par PA_* .

Codage d'une relation (sémantique) par un prédicat (syntaxique).

On dit qu'un prédicat P **représente** dans une théorie T une relation R de $\mathbb{N}$ si

1. T prouve $P(\vec{a})$ qd $R(\vec{a})$ vrai
2. T prouve $\neg P(\vec{a})$ qd $R(\vec{a})$ fausse

Représentabilité (récurif -> sigma 1).

chaque relation récurive sur $\mathbb{N}$ est représentable dans PA_* par un prédicat Σ_1 .

Exemples (preuve et consistance)

Pour $T \supset PA_*$ récurive, la relation "la formule de numéro p est une preuve de la formule de numéro a " est représentable par une formule Σ_1 , mettons $preuve_T(a, p)$ et on note

$$Pr_T(n) \text{ pour } \exists p, preuve_T(n, p).$$

ON définit une relation binaire sur $\mathbb{N}$ par "être les numéros d'un énoncé et de sa négation", on la représente dans une théorie T par une formule $Contrad_T(a, b)$ de complexité Σ_1 , puis on définit l'énoncé

$$Cons_T \text{ par } \neg \left[\exists a, \exists b, Pr_T(a) \wedge Pr_T(b) \wedge Contrad_T(a, b) \right].$$

Remarque : on a dit plus haut que chaque énoncé $E \Sigma_1$ vrai dans $\mathbb{N}$ était prouvable dans PA_* , d'où la véracité de $Pr_{PA_*}([E])$. On en déduit que $\mathbb{N}$ vérifie

$$\dot{E} \implies Pr_T([E])$$

indécidabilité

L'ensemble des formules prouvables par une théorie $T \supset PA_*$ n'est jamais récurif.

non définissabilité de la vérité (Tarski).

il n'y a pas d'énoncés $V(n)$ codant la vérité, au sens où pour chaque énoncé $\dot{E}$ on aurait

$$\mathbb{N} \models \dot{E} \text{ ssi } \mathbb{N} \models V([\dot{E}]).$$

1er théorème d'incomplétude

Soit T récurive telle que $PA_* \subset T \subset Th_1(\mathbb{N})$. Alors il y a un énoncé vrai dans $\mathbb{N}$ non prouvable par T .
(rq : prendre $T = Th_1(\mathbb{N})$ serait contradictoire, donc $Th_1(\mathbb{N})$ n'est pas récurive!)

idée de preuve (beaucoup de détails sous silence) : "je ne suis pas prouvable". C'est vrai, car si faux serait (interprétation de l'énoncé) prouvable donc vrai par cohérence. C'est pas prouvable sinon vrai et donc (interprétation de l'énoncé) prouvable.

interprétation : PA_* n'est pas suffisante pour atteindre la vérité des entiers -> mais même en rajoutant un énoncé manquant, on passera à côté d'autres.

EG concret (pas comme le "je mens" dans la preuve), **th Kirby & Paris (1981)** convergence des suites de Goldstein est vraie dans $\mathbb{N}$ mais non prouvable dans PA_1 .

2d théorème d'incomplétude.

Soit $T \supset PA_*$ pourvant pour chaque énoncé $\acute{E}$ de complexité Σ_1 les implication $\acute{E} \implies \text{Pr}_T \left(\left[\acute{E} \right] \right)$. Alors T ne prouve pas sa consistance.

INterprétiaon : on peut agrandir T pour montrer la consistance (par exemple ZF montre $\mathbb{N}$), mais cette opération est sans fin $\rightarrow$ pas de recherche des fondemnts noncontradiction au sein des maths

Soit T une théorie consistante codant l'arithmétique. Le second théorème d'incomplétude de GÖDEL nous dit que sa consistance C (qui est un énoncé de T) n'est pas prouvable. On peut donc rajouter sa négation et obtenir une théorie $T' := T \cup \{ \neg C \}$ qui reste consistante (lemme classique et facile). Par complétude de la logique prédicative, cette théorie T' admet un modèle. Considérons alors les entiers de ce modèle et supposons qu'ils soient « standards ». L'énoncé $\neg C$ étant vrai dans ce modèle (c'est un axiome de T'), son interprétation fournit une preuve d'une contradiction à partir de T , *a fortiori* à partir de T' , ce qui montre que T' est inconsistante. Contradiction !

2.5 Le problème de l'objet / la réalité mathématique

Changeux - Connes, page 40, Alain Connes

« Rien ne prouve, dis-tu, la réalité de ces objets en dehors de notre cerveau ». Comparons la réalité mathématique au monde matériel qui nous entoure. Qu'est-ce qui prouve la réalité de ce monde matériel en dehors de la perception que notre cerveau en a ? Principalement, la cohérence de nos perceptions, et **leur permanence**. Plus précisément, la cohérence du toucher et de la vue pour un seul et même individu. Et la cohérence entre la perception de plusieurs individus. La réalité mathématique est de même nature. Un calcul effectué de plusieurs manières différentes donne le même résultat, qu'il soit fait par un seul individu ou par plusieurs. [...] On a commencé par explorer la réalité mathématique dans des zones où l'imagerie mentale liée au réel est très simple. C'est le cas pour la géométrie euclidienne. Ensuite, grâce aux procédés axiomatiques ou aux problèmes concrets posés par la théorie des nombres, on a pu accéder à des régions beaucoup plus éloignées de la réalité matérielle. Il n'empêche que **la réalité à laquelle on est alors confronté est tout aussi solide que la réalité quotidienne**. La frustration éprouvée par un mathématicien qui ne parvient pas à voir ce qui se passe dans cette réalité est tout à fait comparable à celle d'un aveugle qui cherche son chemin.

page 49, Alain Connes

Je crois qu'il faut se garder de confondre la réalité mathématique et son illustration possible dans des phénomènes naturels. Quand je parle de l'existence indépendante de la réalité mathématique, je ne la localise absolument pas dans la réalité physique. Un certain nombre de modèles physiques, utilisent, il est vrai, les mathématiques pour décrire des phénomènes naturels, mais ce serait une grave erreur de réduire les mathématiques à ces phénomènes. Je pense que le mathématicien développe un « sens », irréductible à la vue, à l'ouïe et au toucher, qui lui permet de percevoir une réalité tout aussi contraignante mais **beaucoup plus stable que la réalité physique**, car non localisée dans l'espace-temps. Lorsqu'il se déplace dans la géographie des mathématiques, le mathématicien perçoit peu à peu les contours et la structure incroyablement riche du monde mathématique. Il développe progressivement une sensibilité à la notion de **simplicité** qui lui donne accès à de nouvelles régions du paysage mathématique.

3 Logiques d'ordre supérieur

EG égalité

$$a = b \stackrel{\text{déf}}{\iff} \forall P, P(a) \iff P(b)$$

EG induction

$$\forall F, [F(0) \wedge (\forall n, F(n) \implies F(n+1))] \implies [\forall n, F(n)]$$

EG séparation

$$\forall \varphi, \forall A, \exists A', (a \in A' \iff [(a \in A) \wedge \varphi(a)])$$

EG remplacement

$$\begin{aligned} & \forall \varphi, [\forall x, y, y', \varphi(x, y) = \varphi(x, y') \implies y = y'] \\ \implies & \forall A, \exists B, (b \in B \iff \exists a, [(a \in A) \wedge \varphi(a, b)]) \end{aligned}$$

Comment formaliser ? que dire des modèles ? complétude ? compacité ? ...

3.1 Langages et énoncés d'ordres supérieurs

On se donne des symboles d'objet d'ordre k pour chaque $k \geq 1$ miunité d'une arité pour $k > 1$.

Intuitivement, on a la correspondance :

objets d'ordre 1 : objets usuel

objets d'ordre 2 : formules sur les objets

objets d'ordre 3 : les formules sur les formules

objets d'ordre 4 : les formules sur les formules sur les formules....

Une formule d'ordre k est une formule qui parle de termes d'ordre k . Par exemples, les formules prédictives sont d'ordre 1, les formules de formules sont d'ordre 2, etc... Les objets peuvent être vu comme formule d'ordre 0.

h-Définition Une *langage d'ordre supérieur* est la donnée pour chaque h -entier $k \geq 1$ de

1. *symboles d'objet singulier*
2. *symboles de loi*
3. *symbole de relation*

Très souvent, à l'ordre >1 , il n'y a aucun symbole ! On pourrait également imaginer des symboles de loi / relation mélangeant les arité (pas seulement k et $k+1$).

On définit toujours les **termes atomiques** et les **termes**, en leur collant le suffixe d'ordre 1

Soit $k \geq 2$.

Une **terme** d'ordre k (ou **formule** d'ordre $k-1$) est

1. (**atomique**) ou bien un symbole d'objet d'ordre k
2. (**moléculaire**) ou bien un symbole de loi d'ordre k s'appliquant à des termes atomiques d'ordre k
3. (**relationnel**) ou bien un symbole de relation d'ordre $k-1$ reliant des termes d'ordre $k-1$
4. (**propositionnel**) ou bien un connecteur logique connectant un ou des termes d'ordre k
5. (**quantifiant**) pour x instance générique d'ordre $k-1$ (dite alors quantifiée)

(a) ou bien $\exists x, F$ (**existentiel**)

(b) ou bien $\forall x, F$ (**universel**)

dans les deux cas, F est un terme d'ordre $k-1$ qui ne contient pas de terme quantifié sur x .

proposer **quantif généralisé** : $Q_{x,y,z...}P$ où le domaine indexant $\{x,y,z...\}$ peut être vide (cas des connecteurs singulaire $\neg$)

On voit ci-dessus qu'on peut toujours connecter à n'importe quel ordre. C'est dire que la logique propositionnel ne voit pas l'ordre (si a, b sont des termes, alors $a \wedge b$ est encore un terme etc...). On dit parfois qu'elle est *agnostique* en l'ordre (on devrait dire *athée*)

Les axiome sont les mêmes que ceux de la logique prédictive en faisant attention à l'ordre pour qu'ils fassent sens.

3.2 Pouvoir et limites du deuxième ordre

Au second ordre :

Peano est catégorique

les modèles de ZFC sont les cardinaux inaccessibles (ie les "gros" ensembles limite)

la finitude et l'au-plus-dénombrabilité est exprimable.

Mais on perd la compacité – et, partant, la complétude.

manifeste de Shapiro pour LSO? (*foundationalism without foundations*)

h-PROP : *il y a deux énoncés du deuxième ordre dont les modèles sont les structures finies et au plus dénombrables*

Idée : en présence de AC_{dén}, un ensemble est fini ssi chaque injection est surjective, ce qui donne l'énoncé au second ordre (la quantification sur les injections fait apparaître le second ordre). De même, être au plus dénombrable équivaut à admettre un ordre dont chaque segment initial (strict) est fini

h-COR : *dès le second ordre, pas de compacité, pas de complétude.*

DEM : si compacité, on montrerait comme pour le premier ordre qu'aucune théorie ne code les structures finies.

Rigolo (cf Girard point avugle 1) : en logique propositionnelle, tout définir au *second* ordre à l'aide de $\implies$ et de $\forall$:

$$\begin{aligned}
 A \wedge B & : = \forall X, ((A \implies (B \implies X)) \implies X) \\
 A \vee B & : = \forall X, ([A \implies X] \implies [(B \implies X) \implies X]) \\
 \mathbb{F} & : = \forall X, X \\
 \exists X, A & : = \forall Y, (\forall X, (A \implies Y) \implies Y)
 \end{aligned}$$

4 Logique séquentielle

leçon de JY Girard, vers page 60

séquents de Gentzen : préciser un *contexte* (pourquoi? pour que commutent les règles d'introduction de $\wedge$ et de coupure, cf haut page 63)

Hauptsatz : élimination des coupures!!!!!!!!!!!! (alors en complexité tour d'exponentielle)

la règle contraction est seule coupable $\rightarrow$ vers le décompte des utilisations d'une hypothèse $\rightarrow$ logique linéaire

code l'intuitionisme (p. 70)

5 Logique prop & préd à la fois

ON peut englober les deux. On se donne un ensemble infini de symboles de "générique". Un langage est la donnée de :

toute ou aucune variable

symboles de relations :

arité 0 sont les variables prop

symboles de connecteurs

symboles de fonctions :

avec ensemble de variables : ($\forall x$ est un connecteur singulaire)

arité 0 sont les constantes

arité 0 sont les constantes logiques (V, T)

Si pas de symboles de relations d'arité >0 , alors (inutile d'avoir fonctions et) on a obtenu la LOG PROP

6 Exos

6.1 Sur trois règles de la logique prédictive

Validité de trois règles supplémentaires

- *subt dans* $\exists$:

$$\begin{array}{ccc} \exists x, P(x) & & \forall x, P(x) \implies Q(x) \\ \downarrow a, P(a) & & P(a) \implies Q(a) \\ P(a) & & Q(a) \end{array}$$

$$\forall x, P(x) \implies Q(x)$$

- *substi dans* $\forall$: axiome avec deux coupure.

• *invocation ex nihilo* : soit R un symbole de relation et n son arité, on peut former le 1-prédicat $P(x)$ défini par $R(x, \dots, x)$ et la tautologie instanciée $\tau(x)$ définie par $P(x) \implies P(x)$. On a alors l'axiome $\exists x, \tau(x)$, d'où l'on infère $\downarrow a, \tau(a)$.

• *généralisatino*. Soit a tq $\tau(a)$. Par effectivité, on a $\tau(a)$. Supposons qu'on a montré $P(a)$. On en déduit (par généralisation) $\forall x, \tau(x) \implies P(x)$. Or, $(t \implies p) \implies p$ est une tautologie, on l'instancie en $t \leftarrow \tau(x)$ et $p \leftarrow P(x)$, d'où axiome $\forall x, (\tau(x) \implies P(x)) \implies P(x)$, puis substitution conclut.

6.2 Ajout de symbole d'objet singulier

1. Écrivons une preuve de $P(c)$ dans LL . On remplace l'objet invocable c par un symbole d'objet a invocable qui n'apparaît pas dans la preuve (donc pas dans P). On rajoute au début une invocation $\downarrow a$ ex nihilo et à la fin l'énoncé $\forall x, P(x)$. Montrons qu'on obtient ainsi une preuve de ce dernier.

Les hypothèses restent des énoncés de T . Dans les axiomes utilisés, l'objet singulier c n'apparaît plus, donc on a bien des axiomes écrits dans L (les symboles d'objet sont les mêmes). Pour les mêmes raisons, si une règle a été appliquée, son application est conservée. Il reste à contrôler les invocations $\downarrow x_0, \acute{E}$.

Elles utilisent des symboles x_0 d'objets invocables de LL , qui sont les mêmes que ceux de L , et qui n'apparaissent pas dans $P(c)$ – a fortiori pas dans $\forall x, P(x)$. Les énoncés $\acute{E}$ sont écrits dans LL , donc dans L sauf si c apparaît – or l'on remplace ce dernier par a . Enfin, vu la construction, a a été invoqué avant toutes ses apparitions et n'apparaît pas dans P (donc non plus dans $\forall x, P(x)$).

2. On procède exactement de même, d'où une preuve de $\forall x, \Theta$, d'où en spécialisant Θ .
3. Supposons que T et $P(c)$ montrent une contradiction. Par déduction, T prouve $\neg P(c)$ dans LL , donc (par les points 1&2) prouve $\forall x, \neg P(x)$ dans L , à savoir $\neg(\exists x, P(x))$, donc (par déduction) T et $\exists x, P(x)$ mènent à une contradiction dans L , ce qui est contraire aux hypothèses.

6.3 l'indistingabilité est une relation d'équivalence compatible avec les lois et relations

relations d'équivalence. On fixe une formule $F(x)$.

1. On a un axiome $\forall x, F(x) \iff F(x)$, que l'on spécialise en a
2. On invoque la tautologie $(p \iff q) \implies (q \iff p)$
3. On invoque la tautologie $[(p \iff q) \wedge (q \iff r)] \implies (p \iff r)$.

compatible avec les lois et relations

1. On considère les formules obtenues à partir de $R(a, b, c, \dots, z)$ en primant des symboles d'objet singulier et en remplaçant l'un des symboles d'objet singulier par un symbole d'objet. On obtient ainsi que T prouve

$$\begin{aligned} R(a, b, c, \dots, z) &\stackrel{a \equiv a'}{\iff} R(a', b, c, \dots, z), \\ R(a', b, c, \dots, z) &\stackrel{b \equiv b'}{\iff} R(a', b', c, \dots, z), \\ R(a', b', c, \dots, z) &\stackrel{c \equiv c'}{\iff} R(a', b', c', d, \dots, z), \\ &\dots \\ R(a', b', \dots, y', z) &\stackrel{z \equiv z'}{\iff} R(a', b', \dots, y', z'). \end{aligned}$$

On conclut en invoquant la transitivité de l'équivalence (tautologie instancité en les énoncés ci-dessus)

2. On montre de proche en proche $O(a, b, c, \dots, z) \equiv O(a', b, c, \dots, z) \equiv O(a', b', c, \dots, z) \equiv \dots \equiv O(a', b', c', \dots, z')$.
Soit P un 1-prédicat On raisonne comme au point 1. en remplant la relation $R(*)$ par $P(O(*))$.
L'indiscernabilité permet alors de dire que T prouve

$$\begin{aligned} P(O(a, b, c, \dots, z)) &\stackrel{a \equiv a'}{\iff} P(O(a', b, c, \dots, z)), \quad \text{d'où} \quad O(a, b, c, \dots, z) \equiv O(a', b, c, \dots, z), \\ P(O(a', b, c, \dots, z)) &\stackrel{b \equiv b'}{\iff} P(O(a', b', c, \dots, z)), \quad \text{d'où} \quad O(a', b, c, \dots, z) \equiv O(a', b', c, \dots, z), \\ P(O(a', b', c, \dots, z)) &\stackrel{c \equiv c'}{\iff} P(O(a', b', c', d, \dots, z)), \quad \text{d'où} \quad O(a', b', c, \dots, z) \equiv O(a', b', c', d, \dots, z), \\ &\dots \\ P(O(a', b', \dots, y', z)) &\stackrel{z \equiv z'}{\iff} P(O(a', b', \dots, y', z')), \quad \text{d'où} \quad O(a', b', \dots, y', z) \equiv O(a', b', \dots, y', z'). \end{aligned}$$

On conclut alors par transitivité de $\equiv$.

6.4 Variations sur l'indistingabilité

Soit un langage muni d'une relation binaire $=$. Soient a et b deux objets. Alors il revient au même de dire :

1. $=$ code l'indistingabilité (çàd a et b sont indistingables ssi $a = b$)
2. $=$ compatible avec les lois et les relations.

et, dans ce cas, la relation $=$ est RST.

RQ : l'indistingabilité est RST, donc chaque relation traduisant cela *doit* être RST.

(cp : magmas : une seule loi. Alors la comptabilité s'écrit $a = b \implies \begin{pmatrix} a & \text{Id} \\ \text{Id} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \text{Id} \\ \text{Id} & b \end{pmatrix}$)

Mq si $[t = t'$ implique que t et t' sont ind.], alors $=$ est compatible avec lois et relations.

déjà fait pour $\equiv$ (cf ci-dessus).

Mq t et t' sont ind. ssi ils vérifient les mêmes 1-prédicats relationnels.

$\leq$ Soit $P(x)$ un 1 prédicat. Montrons $P(t) \implies P(t')$ (d'où $\iff$ par sym) par réc sur longueur.

Si $P(x)$ est une relation, terminé.

Si $P(x)$ est qqtifié, mettons $P(x)$ ets $\forall y, Q(x, y)$. Supp $P(t)$. Soit y_0 : on a $Q(t, y_0)$, d'où (par réc) $Q(t', y_0)$, ce qui montre $P(t')$.

Si $P(x)$ est une connexion logique $Q(x) * R(x)$. Supposon $Q(t) * R(t)$. Sa table de vérité ne dépend que des valeurs de vérité de $Q(t)$ et $R(t)$, qui sont les mêmes que celles de $Q(t')$ et $R(t')$, d'où $Q(t') * R(t')$

Mq [si $t = t'$ implique que t et t' sont ind. par rapport aux termes et si $=$ compatible avec les relations], alors $[t = t'$ implique que t et t' sont ind. par rapport aux relations]

Soit $P(x)$ une relation $R(\tau_1(x), \tau_2(x), \dots, \tau_n(x))$ où $\tau_i(x)$ sont des termes. Mq $P(t) \implies P(t')$. Posons

$$R_k(x) : \iff R(\tau_1(t), \dots, \tau_{k-1}(t), \tau_k(x), \tau_{k+1}(t'), \dots, \tau_n(t')).$$

Alors $R(t) \stackrel{def}{\iff} R_n(t) \stackrel{ind}{\iff} R_n(t') \stackrel{def}{\iff} R_{n-1}(t) \iff \dots \iff R_1(t') \stackrel{def}{\iff} R(t')$.

Mq [si $=$ compatible par rapport aux lois] alors $[t = t'$ implique que t et t' sont ind. par rapport aux termes]

Un terme $\tau(x)$ est de la forme $a\sigma(x)$ ou $x\sigma(x)$ (ou autre sens) avec a singulier. Puisque $t = t'$, on a $\sigma(t) = \sigma(t')$, d'où (en faisant le produit avec $a = a$ ou avec $t = t$) $\tau(t) = \tau(t')$.

(anecdotique) Mq deu objets ind. sont relié par chaque relation réflexive.

Soit t et t' ind. Soit R relation refl. Le 1-prédicat xRt (où x est générique) est vérifié par t , donc par t' , d'où $t'Rt$. De même, considérer le 1-prédicat xRt' montrerait tRt

Mq si = implique ind, mq = sym et trans.

Supp $a = b$ et $b = c$. Alors $a = x$ vérifié par b donc par c

Supp $a = b$: alors $a = x$ est vérifié par b donc par a , donc $x = a$ vérifié par a donc par b .

6.5 Cohérence de la logique prédicative

par réc sur longueur preuve (uniforme en les langages, théorie & modèles).

Si énoncé est axiome prédicatif, on sait qu'il sont vrai.

Si axiome de la théorie, c'est def d'un modèle

Si énoncé déduit par *modus ponens* de A et $A \implies B$, ces deux derniers sont prouvés, donc (par réc) vrais, donc B vrai.

Si énoncé déduit par effectivité de l'invocation, l'énoncé $\acute{E}$ (fin de preuve!) ne dépend pas de l' symbole d'objet invocable, donc l'invocation vient d'un $\exists x, \acute{E}$; étant prouvé ce dernier est vrai, donc on peut trouver un objet vérifiant $\acute{E}$

Si énoncé déduit par gnrésaltin $\forall x, P(x) \implies Q(x)$, il provient d'une $\downarrow a, P(a)$ et d'un $Q(a)$. Rajoutons a comme symbole d'objet singulier : remplaçant l'invocation par $P(a)$ donne une preuve de $Q(a)$ à partir de $TetP(a)$ (seul chgt : $P(a)$ est bien un axiome de $TetP(a)$, et la seule conséquence tirable de $\downarrow a, P(a)$ est $P(a)$ qui peut pour les mêmes raisons rester tout seul). Considérons un objet o de notre modèle satisfaisant $P(o)$. On agrandit le modèle en interprétant a comme o . On a donc un modèle de $TetP(a)$, d'où par réc la vérité de $Q(a)$, ie celle de $Q(o)$. On a donc montré la vérité de $P(o) \implies Q(o)$ pour chaque objet o , d'où la vérité de l'énoncé universel.

6.6 la logique prédicative n'exprime pas la finitude

Supposons que T admette des modèles de chaque cardinal fini. Montrons alors qu'elle en admet des infinis, ce qui fera contradiction.

On rajoute au langage L une suite énumérable de symboles d'objet singulier c_n et l'on étend T en une théorie TT en rajoutant les énoncés $c_i \neq c_j$ pour chaque $i \neq j$. Alors chaque sous-théorie finie de TT admet un modèle (on prend un modèle de cardinal > le nombre d'indices des c_i de la sous-théorie finie et on interprète les symboles d'objet singulier par autant d'éléments distincts), donc TT admet un modèle, qui est un modèle infini de T , CQDF.