Logique propositionnelle
(version chantier)

Marc SAGE

avril 2015

Table des matières

fil disucssion
http ://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php ?7,513528

cours : http ://citron.9grid.fr/docs/logique.pdf

sheffer : la barre | suggère la séparation. La flècge $\uparrow$ suggère la négation de $\wedge$.
Pierce connaît les résultats de Sheffer dès 1880 (cf *Carnets* de LW)

sur le tiers exclu : dans Henri Lombardi, *Épistémologie mathématique* (p. 145)
Prouver une négation c'est prouver une absurdité. Il s'agit donc d'une preuve de l'absurde (et non pas d'une preuve par l'absurde), via une preuve constructive d'un fait positif.

Négation : cf Bergson *Evolution créatrice* : nier est un méta jugement, à visée pédagogique : on veut donc que $\neg A$ reviennt à $A \vdash \mathbb{F}$, ce qui (si l'on veut rester *dans* le monde des jugements) revient à (grace à th déduction) $A \Longrightarrow \mathbb{F}$.

Tiers exclu : pas de problème pour la prédiction car c'est le déroulement du temps qui tranchera l'option indéterminée.

Mais maths intemporel (temps = image mobile de l'éternité, cf Bergson *Evolution créatrice*) : la temporalité est dans la construction des preuves par l'homme – et cest là que le bas blesse.

1 Logique des propositions (ou calcul propositionel)

(le pt aveugle II, p. 395)
Une analogie musicale : le tempérament égal est extrêmement pratique ; cependant, les intervalles tempérés sont légèrement faux. Ce qui ne veut pas dire que – à l'exception de certaines exagérations liées au dodécaphonisme – toute musique écrite pour le tempérament égal soit bonne à jeter. De la même façon, les mathématiques classiques sont seulement un peu *fausses, du moins tant que l'on ne rentre pas dans les exagérations logicistes.*

Qustoin : les symboles utilisés seront prononcés selon

1. leur interprétation usuelle / originielle. : $+$plus, $\times$fois, $-$moins, $\vee$ou, $\Longrightarrow$implique, $\neg$non, $\cap$inter...
2. leurs graphèe $+$croixdroite, $\times$croix, $-$trait, $\vee$vé, $\Longrightarrow$flècledouble, $\cap$Uretourné...

La raison 1. est de guider le travail et de préparer l'interprétation à venir (sinon autant utiliser des graphèmes complèmteent arbitraires), la raison 2 serait de ne pas oublier qu'il s'agit de symboles arbitraire sans sens attribué.

1.1 Termes / formules : connexion de (symboles de) propositions

h-Défintion. *On se donne*

1. *une liste arbitratirement grande de symboles dits* ***de proposition*** *regroupés en*
   (a) *d'aune part des symboles de proposition* ***instanciable*** *: $p, q, r...p_1, p_2, ...$ (destinée à s'instancier en des formules)*
   (b) *d'autr part deux symboles de proprosition* ***singulière*** *: $\mathbb{V}$ et $\mathbb{F}$ (desttinée à s'interpreter comem tjs vrai et fau resp) (on pourrait prendre $\top\perp$, 01, $\heartsuit\spadesuit$..)*
2. *des symboles* ***de connexion*** *(destiné à créer de nouvelles propositions) :*
   (a) $\neg$ ***négation*** *(singulaire) ou $\tilde{}$;*
   (b) $\wedge$ ***conjonction*** *(binaire) ou & ;*
   (c) $\vee$ ***disjonction*** *(binaire) ;*
   (d) | ***incompatibilité*** *(binaire) ;*
   (e) $\Longleftrightarrow$ ***équivalence*** *(binaire) ;*

(f) $\Longrightarrow$ ***implication*** *(binaire) ;*

(g) $\Longleftarrow$ ***implication réciproque*** *(binaire) ;*

(h) *(on pourarit en mettre d'autres...)*

Une ***formule*** *(ou* ***terme propositionnel****) est*

1. *(****atomique****) ou bien un symbole propositionnel (dont le vrai et le faux) ;*
2. *ou bien un symbole de connexion appiqué à des formule (unepour* $\neg$ *et deu pour les autrse*)

(attention, on suppose que cette définition récursive termine : pas de terme de longueur infinie !)

EG : $[(p \implies q) \wedge (\neg (q \Longleftrightarrow \mathbb{F}) \mid s)] \impliedby p$

RQ (parenthèse / priorité) : si l'on souhaite alléger l'écriture, les symboles $\Longrightarrow \Longleftrightarrow \Longleftarrow$ laisseront la priorité aux autres : $a \Longrightarrow b \wedge c$ signiie $a \Longrightarrow (b \wedge c)$ et non $(a \Longrightarrow b) \wedge c$ (on pourra donc retire les crochets dans l'EG ci-desus) ; en revanahce $p \Longrightarrow q \Longrightarrow p$ est ambigu.

Cf Cavaillès (*Méthode axiomatique et formalisme* p104) : Lorsque, comme il est courant, les 4 constantes figurent dans une proposition complexe on convient, pour éviter les parenthèses, que leurs puissances d'action relatives sont déterminées par l'ordre ■, ■, ■, $\neg$.*Parexempleoncriraa*■$\neg$*b*■*c*■*daulieudea*■$[\neg b$■$(c$■$d)]$.

Rq

on pensera "terme" lorsqu'on calcule des propositions (calcul = connection de termes)

on pensera "formule" lorqu'on voudra donner du sens (vrai ou faux), mais cela suppose que formule = connection de formule avec $\Longleftrightarrow$ ou $\Longrightarrow$

Dans une implciation $A \implies B$, la ***prémisse*** est A, la ***conclusion est*** B

Rq Cette description est algoritmique : on obtient un terme à partir de termes atomiques en itérant un h-nombre *fini* de fois l'adjonction de connecteurs —> vision arbolaire / dendrologique (eg cidessus

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \Longleftarrow & & \\
 & & & \wedge & & p & \\
 & \Longrightarrow & & & \mid & & \\
p & & q & \neg & & s & \\
 & & & \Longleftrightarrow & & & \\
 & & q & & \mathbb{F} & &
\end{array}
$$

)

RQ Ensemblistement, on obtient le plus petit ensemble contenant les termes atomaiques stable par connexion.

La structure récursive appelle immédiatement plusieurs h-définitions :

1. *longueur* (nombre de symboles, parenthèses non comprises), déf par somme incrémentée récursive , ici 12 ;
2. *profondeur* ou *hauteur* (de l'arbre), déf par max récursif, ici 6 ;
3. *valeur de vérité* : dépend des connecteurs (mais toujours 1 pour $\mathbb{V}$et 0 pour $\mathbb{F}$)

Quels lien entre connecteurs et leur nom usuel ? entre la déductions "naturelle" et l'implication ?

1.2 Interprétation des formules propositionnelles

PB : quelles sont les formules que l'on peut considérer comme valides (ie qu'on a le droit d'utiliser dans les vraies maths) indépenndammmn des énoncés instanciant les instanciables ?

EG : $A \iff A$, $p \implies p$, $E \vee \neg E$, $A \implies (\neg A \implies F)$, $\neg (E \vee F) \implies \neg E \wedge \neg F$.

Lorsqu'une formule F est vailde, on notera

$$\models F$$

On va voir que les sens de $\models$ et $\vdash$ se confondent (valide <=> prouvable)

1.2.1 Valeurs et table de vérité

Pour réponder à cette quetsin, on va assignerà chq formeule une ***valeur*** (***de vérité***[1]) vérifiant les deux conditions (cf texte Frege :quoi d'autre pourrait définir la vérité ?) :

1. **(binarité & exclusivité)** les vaelurs de vérités sont *binaires*[2] et *exclusives* (vrai/faux, 0/1, blanc/noir, $\perp/\top$...)
2. (***véri-fonctinalité***) la vérité d'une formule formée d'un symbole conectant des formules ne dépend *que* des valeurs de vérité des formules et du connetuers

Alors, étant choisie une valeur de vériité (gnélrmen vrai, $\mathbb{V}$, true, T, 1, blanc...), les foremules qui ont cette valeur qq soit les valeurs des instanciables seront dites ***valides*** On les appelle aussi ***tautologies*** (ce sont des sortes d'évidences logiques). Ce seront les « théormes » du calcul propositionnel qui serviront dansles preuves.

h-def (table de vérité).
Soient deux formules F et G.auxquelles est attribuée une valeur de vérité (1 ou 0). Alors on définit la valeur de vérité de $F * G$ par les tables de vérités suivantes :

décrire les 16 connecteur, 8 et 8 duaux :

tautologie	implication	disjoinction	incompatibilité	implication réciproque	équivalence	droi
$\mathbb{V}$	$\Longrightarrow$	$\vee$	$\mid$	$\Longleftarrow$	$\Longleftrightarrow$	
1 1	1 0	1 1	0 1	1 1	1 0	1
1 1	1 1	1 0	1 1	0 1	0 1	1
0 0	0 1	0 0	1 0	0 0	0 1	0
0 0	0 0	0 1	0 0	1 0	1 0	0
$\mathbb{F}$	$\not\Rightarrow$	*nor*	$\wedge$	$\not\Leftarrow$	*xor*	
contradiction	non-implication (empêche ?)	ni-ni	conjonction	non-implication réciproque	disjonction exclusive	non-dr

table de $\neg$ $\wedge \vee$ *xor* $\iff$ claires (interpréation du langage courant). Qq digrsssion nécessaires pour définir celle de $\Longrightarrow$ (brique de bases des preuves)

h-def (interprétation).
*La **valeur de vérité** d'une formul est le résultat (0 ou 1) donné par le calcul récursif suivant les tables de vérité lorsque l'on assigne aux symboles propositionnels une valeur (0 ou 1), les symboles singuliers $\binom{\mathbb{V}}{\mathbb{F}}$ étant toujours interprétés par $\binom{1}{0}$.*
*Lorsque cette interprétation est toujours 1 (resp. 0) indépendamment de la distribution initiale de vériét, on parle de **tautologie** (resp d'**anti-tautologie**).*

EG tautologies : forcer le Vrai dans les tables de vérité : $A \vee^{\neg} A$, $^{\neg}(A \wedge^{\neg} A)$, $^{\neg\neg}A \implies A$, $A \iff A$, $p\,(xor)^{\neg}\,p$
Rq : tautologie stables par nstanciation (eg $(A \wedge^{\neg} A) \iff (A \wedge^{\neg} A)$, $(A \implies {}^{\neg}A) \vee^{\neg} (A \implies {}^{\neg}A)$), réciproque vraie (mais pas très pertinente) par récurre sur nb symboles connexino (se ramener à des tautoogie irred)

EXO (défition de la négation par l'absurde) *Montrer la tautlogie* $({}^{\neg}a) \Longleftrightarrow (a \Longrightarrow \mathbb{F})$

EXO (connecteur de *Sheffer* $A|B$ (A « stroke » B)) *Montrer les tautologies suivantes :*

$$({}^{\neg}a) \Longleftrightarrow (a|a) \qquad (a \vee b) \Longleftrightarrow \left({}^{\neg}a|{}^{\neg}b\right) \qquad (a \wedge b) \Longleftrightarrow {}^{\neg}(a|b) \qquad (a \Longrightarrow b) \Longleftrightarrow \left(a|{}^{\neg}b\right)$$

et en déduire que tous les conecteurs peuvent être "défini" à partir de l'incompatibilité(–> pratique pour ordi où que binaire)

[1] terme dû à G. Frege, selon B Russell (*Introduction to Mathematical Philosophy*, footnote page 146)

[2] On pourrait concevoir, comme l'a fait Jan Łukasiewicz, des logiques à **plusieurs** valeurs de vérité destinées à tempérer la dichotomie vrai-faux (par exemple en introduisant une troisième valeur « possible »). Dans *La machine de Turing* (édition Seuil, note en bas de la page 112), Jean-Yves Girard nous invite à ne pas nous égarer : « Si l'on excepte quelques utilisations limitées d'une troisième valeur, le procès en appel des logiques à plusieurs valeurs semble définitivement perdu : elles restent ce qu'elles ont toujours été, une erreur de Łukasiewicz ».

(On peut aussi tout définir à parir de NOR au lieu de NAND, mais alors $\implies$ est plus compliqué à reconstruire (et $\impliedby$plus simple))

EXO (cf fin) *Montrer que NOR et NAND sont les seuls connecteurs universels.*

RQ historique. Si A et B sont des pensées, Frege définit la valeur de vérité de $A * B$ selon que A ou B est vraie ou fausse, discussion s'appuyant sur une « table » à 4 cas. Pour citer les *Écrits logiques et philosophiques* (traduction & introduction par Claude IMBERT) de Frege :

« Frege utilise cette table pour *définir* les opérateurs propositionnels. Elle se distingue en cela d'une *table de vérité*, aujourd'hui utilisée comme un instrument de calcul. [...]

Ces *Recherches logiques* semblent avoir définitivement renoncé au *calcul logique* [sous sa forme axiomatique]. Frege associe à la langue-objet des règles de déduction dont la limpidité est au moins la garantie morale qu'elles sont saines. Cette méfiance à l'égard du calcul, et en général du traitement algébrique, c'est-à-dire aveugle de la logique, est sans doute une des raisons pour lesquelles Frege n'a pas conçu véritablement une table de vérité. [...] la table de vérité, chez [Wittgenstein et Post], est une représentation adéquate des foncteurs logiques, en même temps qu'un instrument de calcul. Frege n'en a vu en tout cas que le premier aspect. »

1.2.2 Le cas de l'implication

rappel : dans une implciation $A \implies B$, la ***prémisse*** est A, la ***conclusion est*** B

I) Volonté pour $\implies$: définir un connetur $\implies$ tq (à A, B propostions données)

1. (**valeur démonstrative**), affirmer « $A \implies B$ », c'est affirmer que « si A est vraie, alors B est nécessairment vraie aussi »
2. (**vérifonctionalité**) la valeur véritative de $A \implies B$ne dépen que de celles de A et B

D'après 1, on a tjs trivialement $A \implies A$, d'où (d'aps 2.) les valeurs de vérité de $\mathbb{F} \implies \mathbb{F}$ et $\mathbb{V} \implies \mathbb{V}$. il est possible que $\mathbb{F} \implies \mathbb{V}$ (si $1 = 0$, alors (symétrie)$0 = 1$, d'où (transit ou addition) $1 = 1$), d'où d'après 2. que on a *tjs* $\mathbb{F} \implies \mathbb{V}$. Ces trois points n'ont *aucune valeur démonstrative* (que prétend démontrer un raiosnnment fondé sur du faux ? et $\mathbb{V} \implies \mathbb{V}$ est trivial)

D'après 1, si A et $A \implies B$ sont varaies, alors B est vraie, donc il est *impossible* que $\mathbb{V} \implies \mathbb{F}$ (*seule valeur démonstrative* : empehcer l'incohérence, ça a l'air bien peu !)

CConclusion : la table de vérité pour $\implies$. De façon duale ,$\neg$ $(A \implies B)$=$(A \land \neg B)$: dire que « A n'implqiue pas B », c'est dire que A est sréaliséesan que B le soit.

II) Vlonté : nier toute forme de nécessité de A vers B, c'est imaginer une situation où A serait réalisée sans que B le soit. OR, en maths, il n'y qu'un siuation (toute prpop vraie est réasliée et toute les fausse ne le sont pas), donce ce qui précède se traduit en « A *est* réalisé et *pas* B ». En d'autres termes : $\neg$ $(A \implies B)$=$(A \land \neg B)$

III) Volnté : conserver les tautologies $A \implies A \lor B$ (impose $\mathbb{F} \implies ?$), $P \land Q \implies P$ (impose $? \implies \mathbb{V}$) et ppe de non contradictio $\neg (A \implies \neg A)$ (impose $\neg (\mathbb{V} \implies \mathbb{F})$)

rq :

conforme à implication "naturelle" selon 3 pts : du vrai ne peut impliquer du faux, tiers exclu, contrposition

pas conforme selon : du faux implique n'importe quoi (pas de lien explicatif) "si j'étais un homme, j'allaiterais mon enfant" "si 3 était pair, alors 4 aussi". Mais on proposait "du faux ne peut impiquer du vrai", on obtient la table de véritié de l'équivalence !

rq implication vérifonctionnnelle connue depuis Philon de Megare (IV BC), cf. *Sextus Empiricus* ? ? ?

Il peut sembler bizarre de déclairer vraie une implication dont la prémise est fausse : mais alors on se priverait du *modus tollens* (qui innocente accusé ayant un alibi)

1.3 Règle(s ?), axiomes et preuves en logique propositionnelle

Interprétation usuelle des connecteurs :
affirmer $\neg A$, c'est dire que'on ne peut avoir A,
affirmer $A \wedge B$, c'est affirmer A et affirmer B à la fois
affirmer $A \vee B$, c'est afirmer A ou affirmer B (éventuellement les deux à la fois)
affirmer $A \Longrightarrow B$, c'est affirmet que, lorsqu'on a A, on est en droit d'affirmer B
affirmer $A \Longleftrightarrow B$, c'est affirmer $A \Longrightarrow B$ et affirmer $B \Longrightarrow A$ à la fois
Qq corollaires :
$\Longrightarrow$ si on A et si on a $A \Longrightarrow B$, alors on peut affirmer B (*modus ponens* (le "mode en posant") : quand on pose A on peut poser B, *coupure* ou *détachement* (partant de $A \Longrightarrow B$ on peut couper le "$A \Longrightarrow$")
$\Longrightarrow$ si Aimplique$B$ et si B implique C, alors A implqiue C (transitivité)
$\Longrightarrow$ si on a A, alors n'importe quoi permet d'obternir A (on a rien à faire !)
$\neg$ si il est impossible de ne pas avoir A, alors on a A (*tiers exclu*)
$\neg$ si Aimplique$B$, alors l'impossibilité de B implique celle de A (*modus tollens* (le mode en supprimant/détruisant) : quand on enlève B, on doit enveler A, *contraposée*)
$\vee$ si on a $A \vee B$ et qu'on n'a pas A, alors on a B

En fait tout peut se ramèner à une *unique* règle : de A et $A \Longrightarrow B$ on peut déduire B (*modus ponens*) en codant les règles ci-dessus par des axiomes "implicatifs" (desquels on déduire immédiatmeent les réglèes corespondantes grace au *modus ponens* ; on verra qu'il est réciproquement légtime de passer d'une règle à un axiome implicatif – cela tombe bien car, au fond, on n'a pas envie de faire la différence.)

h-Définition 11 axiomes de Hilbert : 2$\Longrightarrow$, 3$\Longleftrightarrow$, 3$\neg$, 3$\vee$, 3$\wedge$

$a \Longrightarrow (p \Longrightarrow a)$ du vrai est toujours impliqué par ni'mporte quoi $[a \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow [(a \Longrightarrow p) \Longrightarrow (a \Longrightarrow$
$(a \Longleftrightarrow b) \Longrightarrow (a \Longrightarrow b)$ $(a \Longleftrightarrow b) \Longrightarrow (b \Longrightarrow a)$ l'équivalence contient deux implications $(a \Longrightarrow b) \Longrightarrow [(b \Longrightarrow a) \Longrightarrow$
$a \Longrightarrow \neg\neg a$ (double négation) $\neg\neg a \Longrightarrow a$ tiers exclus $(a \Longrightarrow b) \Longrightarrow (\neg b \Longrightarrow \neg a)$ contraposée
$(a \wedge b) \Longrightarrow a$ $(a \wedge b) \Longrightarrow b$ la conjonction contient les deux $a \Longrightarrow (b \Longrightarrow a \wedge b)$ et récipruqment (avoir $a$puis$b$, c'es
$a \Longrightarrow (a \vee b)$ $b \Longrightarrow (a \vee b)$ $\neg a \Longrightarrow ((a \vee b) \Longrightarrow b)$ avoir $a$ou$b$ sans a, c'est avoir b

Ne nous leurrons pas : on les prend d'une part parce qu'ils sont "naturels" (cf. analyse ci-dessu), d'autre part parce qu'ils suffisent à montre la complétude.

Rq : en ne s'intéressant qu'au calcul de l'équivalence avec trois axiomes RST ($a \Longleftrightarrow a$, $(a \Longleftrightarrow b) \Longleftrightarrow (b \Longleftrightarrow a)$, $[a \Longleftrightarrow b] \Longleftrightarrow [(a \Longleftrightarrow p) \Longleftrightarrow (b \Longleftrightarrow p)]$), on peut montrer qu'un seul axiome suffit $a \Longleftrightarrow ([(a \Longleftrightarrow p) \Longleftrightarrow (u \Longleftrightarrow p)]$ et qu'il est le plus court (cf. *Vanquishing the XCB Question : The Methodological Discovery of the Last Shortest Single Axiom for the Equivalential Calcul)*
Rq : SAns $\Longrightarrow$ on peut tout exprimer à l'aide de $\vee$ et $\neg$ et à l'aide d'un unique axiome

$$\overline{\overline{\overline{\overline{a \vee b} \vee c} \vee \overline{a \vee \overline{\overline{\overline{c} \vee \overline{c \vee d}}}}}}$$

On peut aussi tout exprimer par le connecteur de Sheffer et l'axiome (de longeur minimale 15)

$$a|\,(b/a|a)\ \mid b|x/a = b$$

cf article http ://dl.acm.org/citation.cfm ?id=594347

h-Définition *Une **preuve** d'une formule Θ (applée **thèse**) à partir d'un certain h-nombre (éventuellemrnt nul) d'autres $A, B, C, ..., Z$ (appelées **hypothèses**) est*

1. *(preuve **atomique**) ou bien un axiome ou une hypothèse ;*
2. *ou bien la donnée de deux preuves : l'une d'une certaine thèse θ l'autre de $\theta \Longrightarrow \Theta$;*

on note alors $A, B, C, ..., Z \vdash \Theta$ *et on dit que* $A, B, C, ..., Z$ ***prouvent*** Θ*.*

(attention, on suppose que cette définition récursive termine : pas de preuve de longueur infinie !)
Un ***théorème*** (***propositionnel***) est une thèse prouvable sans hypothèse :

$$\vdash \Theta.$$

Rq Explicitement, une preuve est une h-suite *finie* de formules qui sont chacune

1. *ou bien un axiome ou une hypothèses ;*
2. *ou bien déduite des précédentes par coupure.*

Le nombre de formules qui figurent dans une preuve est la ***longueur***.

Rq En termes algo, un théorème est

1. ou bien un axiome
2. ou bien de la forme Θ sachant que $A \implies \Theta$ et A sont des théorèmes

En termes ensembliste, les théorèmes (propositionnels) forment le plus petit ensemble contenant les axiomes qui soit stable par coupure.

EG de preuve : ? ? ? un exemple vers le h-th de la déduction

RQ : on peut remplacer le MP par toute règle valide

Il est immédait par modus ponens que si $\vdash \left(A \implies É\right)$ alors $A \vdash É$. Il est remarquable d'avoir la réciproque.

En d'autres termes, une preuve *relative* (de $É$ à partir de A) revient toujours à une preuve *absolue* (de $\left(A \implies É\right)$), *i.e.* à un théorème.

En d'autres termes encore, la *déduction* $\vdash$ dans le h-langage correspond bien à l'*implication* $\implies$ du langage. Ainsi, rétrospecticvement, il aurait indiffrént de donne plein de règles : mais alors quels axiomes retnir ? (il faut bien poser quelque chose au départ !) Comme toutes les règles se retrouvent à partir d'une seule, on prend le parti de coder toutes les règles en axiomes (sauf une). Il y a d'autre possibilité avec une seule règle, un seul axiome, un seul connecteur (cf sheffer & co)

h-Théorème de la déduction.
preuve contructive

1.3.1 Cohérence de la logique propositionnelle

(prouvalble => valide)
mq le valide se propage par preuve : d'après la définition récursive, il suffit de montrer

1. que les axiomes sont toujours valide, ied qu'ils sont des tautologies
2. que si les proposition A et $A \implies B$ sont valides alors B aussi

Ainsi, tout théorème est une tautologie : on a la réciproque !

1.4 La complétude de la logique propositionnelle

(valide => prouvable) le prouvable permet d'atteindre tout ce qui nous intéresse (le valide), il ne rate rien, son système est en ce sens *complet*.

h-Théorème de complétude : *les théorèmes propositionnels sont exactement les tautologies*

utilise le h-principe d'induction (discutable)

à cette discussion près, ce h-théorème doit nous convaincre que les quelques tautologies choisies (dont on a soigneusment discuté le caractère évident) suffisent à épuiser la notion de vérité en logique propositionnelle.

Rq (cf p. 152 de *Introduction to Mathematical Philosophy* de B. Russell)

On se donne une unqiue règle de coupure : de p et $p|\,(q|r)$ déduire r

Nicod réduit les axiomes de la logique propositionnelle à un seul : rappelons (tout traduire en termes d'incomptatibilité)

$p|\,(q|r) \equiv (p \implies (q \wedge r)) \qquad t|\,(t|t) \equiv V \qquad (s|q)\,|\overline{(p|s)} \equiv (p \wedge s \implies q \wedge s)$.

L'axiome de Nicod dit alors que le premier implique les deux suivants (*cf.* DM)

$$p|q/r \quad | \quad t|t/t \quad / \quad s|q \Longrightarrow p|s$$

Simplification : Łukasiewicz a monrté que la susbittution $s \leftarrow t$ suffisait :

$$p|q/r \quad | \quad s|s/s \quad / \quad s|q \Longrightarrow p|s$$

Son élvèe Mordchaj Wajsberg a tué la tautotlogue $s|s/s$ qui apparissait en proposant

$$p|q/r \quad | \quad s|r \Longrightarrow p|r \quad / \quad p|p/q$$

Łukasiewicz a trouvé un autre axiome sans sous-tautologie :

$$p|q/r \quad | \quad p|r/p \quad / \quad s|q \Longrightarrow p|s$$

plein d'autre axiomes de même longueur, eg

$$p|q/r \quad | \quad p|q/r \quad / \quad (s|r) \ | \ (r/s|p/s)$$

Ces axiomes ont longueur minimale, cf http ://fitelson.org/berkeley_logic_2x2.pdf, mais comment le montrer ?

1.5 Constructivisme / intuitionnisme

(Gilles Dowek, *Les métamorphoses du calcul*, p. 113/115)

C'est [...] le tiers exclu qui permet de construire des démonstrations d'existence qui ne donnent pas de témoin. C'est pour cela qu'on a décidé d'appeler « démonstration constructive » une démonstration qui n'utilise pas le tiers exclu.

[...] à cette querelle du tiers exclu se sont mêlées d'autres querelles. Par exemple, Brouwer défendait le point de vue selon lequel notre intuition des objets mathématiques est plus importante que la connaissance que nous en avons par la démonstration. De là vient le nom d'« intuitionnisme ».

Interprétation de $A \vee B$ diverge :

pas de tiers exclu car ne donne pas de témoin (eg $a^{\sqrt{2}}$ rationnel). Donc pas de théorème de complétude !

mais tiers exclu sur les négations :

$$\neg\neg\neg A \Longleftrightarrow \neg A$$

(<= spécialiser $p \Longrightarrow \neg\neg p$ en $\neg A$, => A mènerait à la contradiction $\neg\neg A$)

Logique plus faible (*stricto sensu*) mais code logique classique en saturant les énoncés de double négation. Elle est donc *de facto* plus fine, voit plus de choses

codage fait en http ://kevin.quirin.free.fr/Logique_intuitionniste/logic_int.pdf

2 Exos

2.1 Détermination des connecteurs universels

On se propose de montrer pourquoi le choix du connecteur de Sheffer est (à peu de choses près) le seul possible.

On appelle par la suite *connecteur* (binaire) toute loi de composition interne sur $\{0,1\}$. Les connecteurs usuels sont définis par leur table de vérité.

Un connecteur est dit *universel* si tous les connecteurs usuels peuvent s'exprimer à l'aide de celui-ci. (On a vu que le connecteur de Sheffer était universel.)

Étant donné un connecteur $\cdot$, on définit $\mathcal{F}_\cdot$ comme la plus petite partie de l'ensemble des fonctions de $\{0,1\}$ dans $\{0,1\}$ contenant $a \mapsto a \cdot a$ et stable par $\cdot$ (*i. e.* vérifiant $f, g \in \mathcal{F}_\cdot \implies f \cdot g \in \mathcal{F}_\cdot$). Par exemple, l'expression suivante en a est une fonction de $\mathcal{F}_\cdot$:

$$((a \cdot (a \cdot a)) \cdot (a \cdot a)) \cdot ((a \cdot a) \cdot a)$$

(explicitement, on peut montrer que $\mathcal{F}_\cdot$ est la réunion pour les entiers $n \geq 2$ des $\mathcal{F}_\cdot^n$ définis par la récursion $\mathcal{F}_\cdot^1 = \{\mathrm{Id}\}$ et $\mathcal{F}_\cdot^n = \bigcup_{p+q=n}^{0<p,q<n} (\mathcal{F}_\cdot^p) \cdot (\mathcal{F}_\cdot^q)$).

Expliquer pourquoi aucun des quatre connecteurs $(a,b) \mapsto a, b, \overline{a}, \overline{b}$ *n'est universel.*
Expliquer pourquoi le $\mathcal{F}_\cdot$ *d'un conecteur universel* $\cdot$ *contient* $\neg$.
Calculer les $\mathcal{F}_\cdot$ *des seizes connecteurs et conclure.*

Quand on les itère, il ne reste que le dernier instanciable (éventuellement nié), donc impossible de tenir compte des *deux* instanciables comme on doit pour tous les autres connecteurs (non constants).

Si $\cdot$ universel, il engendre $|$, *a fortiori* $\neg A = A|A$.

0 et 1 donnent 0 et 1 respectivement.

$(a,b) \mapsto a \text{ou} b$ donnent Id

$(a,b) \mapsto \overline{a} \text{ou} \overline{b}$ donnent Id et $\neg$

$\wedge \vee$ donne Id $(a \vee a = a)$

$\implies \iff \impliedby$ donne Id et 1 ($1 \implies 1 = 1$, $a \implies a = 1$, $1 \implies a = a$, $a \implies 1 = 1$)

$\overline{\implies \impliedby \iff}$ donne Id et 0 ($a \overline{\implies} a = 0$, $a \overline{\implies} 0 = a$, $0 \overline{\implies} a = 0$)