Introduction à la mathématique symbolique

Marc SAGE

25 mai 2012

Table des matières

> [L'homme] serait limité à ce que la main peut façonner ou la voix faire entendre, sans cette grande découverte que fut celle des signes. Les signes donnent présence à ce qui est absent, invisible, et le cas échéant inaccessible aux sens. Je ne nie pas que même sans le secours de signes, la perception d'un objet puisse réunir un faisceau d'images mentales. Mais nous ne pouvons pas nous y attacher : chaque perception nouvelle précipite ces images dans la nuit et en fait surgir d'autres. En offrant au regard le signe d'une représentation, elle-même appelée à la conscience par une perception, on crée un nouveau foyer stable autour duquel s'assemblent d'autres représentations. Parmi celles-ci, on en pourra de nouveau choisir une et offrir au regard son signe. Ainsi pénétrons-nous pas à pas dans le monde intérieur des représentations, et y évoluons-nous à notre gré, usant du sensible lui-même pour nous libérer de sa contrainte. Les signes ont, pour la pensée, la même importance qu'eut pour la navigation, l'idée d'utiliser le vent afin d'aller contre le vent. Que personne ne méprise les signes, tant dépend de leur choix pertinent ! Et leur valeur n'est pas amoindrie si après un long usage il n'est plus nécessaire de produire effectivement le signe, si nous n'avons plus besoin de parler tout haut pour penser. On n'en pense pas moins dans les mots et, sinon dans des mots, dans des signes mathématiques, ou dans d'autres encore.
>
> Sans les signes, nous nous élèverions difficilement à la pensée conceptuelle. En donnant le même signe à des choses différentes quoique semblables, on ne désigne plus à proprement parler la chose singulière mais ce qui est commun : le concept. Et c'est en le désignant qu'on prend possession du concept ; puisqu'il ne peut être objet d'intuition, il a besoin d'un représentant intuitif qui nous le manifeste. Ainsi le sensible ouvre-t-il le monde de ce qui échappe aux sens.
>
> Gottlob Frege, *Que la science justifie le recours à une idéographie* (1882)

1 Mathématique naïve

La mathématique naïve étudie des *propriétés* de certains *objets*. Il est légitime de demander :

1. de *quels objets* parle la mathématique ?
2. de *quelles propriétés* parle la mathématique ?
3. *comment* la mathématique parle-t-elle ? Quel est son *discours* ?

1.1 Quels objets ?

Les premiers objets venant à l'esprit sont les nombres, les points, les droites, les plans, les vecteurs, les fonctions, les ensembles...

Parmi ces objets, certains jouent un rôle *particulier* et portent un nom propre du fait de leur caractère *singulier* :

1. **chez les nombres** : un (1), deux (2), dix (10), zéro (0), quarante-deux (42), moins un (-1), la racine carrée de deux ($\sqrt{2}$), le demi-périmètre du cercle unité (pi : π), la base des logarithmes népériens (e), la constante d'Euler (gamma : γ), la demi-longueur de la lemniscate (pi script : ϖ)... ;
2. **en géométrie plane** : l'origine (O), le vecteur nul ($\overrightarrow{0}$), le cercle unité ($\mathbf{U}$), les disques unité resp. fermé et ouvert (resp. $\overline{\mathbf{D}}$ et $\mathring{\mathbf{D}}$) ;
3. **chez les fonctions** : la fonction nulle (0), les fonctions *circulaires* sinus (sin), cosinus (cos) et tangente (tan), les fonctions *transcendantes* exponentielle (exp) et logarithme népérien (ln), la fonction Gamma d'Euler (Γ), la fonction zêta de Riemann (ζ), la fonction elliptique de Weierstrass (« pé » : $\wp$)... ;
4. **chez les ensembles** : l'ensemble vide ($\emptyset$), l'ensemble des entiers naturels ($\mathbf{N}$), des entiers relatifs ($\mathbf{Z}$), des rationnels ($\mathbf{Q}$), des réels ($\mathbf{R}$), des complexes ($\mathbf{C}$), des quaternions ($\mathbf{H}$), des octavions ($\mathbf{O}$)...

On créé/*compose* de nouveaux objets à l'aide d'*opérations* (ou *lois de composition*), certaines s'appliquant un seul objet (dites alors *singulaires*[1]), d'autres à plusieurs objets (dites alors *binaires*, *ternaires*...) :

1. **chez les nombres** :
   (a) double, moitié, successeur (+1), carré, cube, valeur absolue, reste de la division euclidienne par 18, plus petit diviseur premier, factorielle... ;
   (b) somme, produit, puissance, maximum, minimum, plus petit multiple commun, plus grand diviseur commun... ;
2. **chez les points et les droites** :
   (a) translaté selon un vecteur donné, projeté orthogonal sur une droite donnée, symétrisé par rapport à une droite donnée, image par une rotation donnée... ;
   (b) milieu, centre de gravité, orthocentre, centre du cercle circonscrit/inscrit, points remarquables du triangle, barycentres, intersection de deux droites, droite passant par deux points, droite parallèle/orthogonale à une droite passant par un point... ;
3. **chez les fonctions** :
   (a) carré, quart, valeur absolue, racine cubique, ... (comme pour les nombres) ;
   (b) somme, produit, maximum/minimum, composée, dérivée, primitive, convolée, transformées de Fourier, Laplace, Legendre, Mellin... ;
4. **chez les ensembles** :
   (a) singleton, ensemble des parties, ensemble des permutations, complémentaire à un sur-ensemble donné, sous-ensemble des objets vérifiant une propriété donnée... ;
   (b) paire, réunion, intersection, différence ensembliste, différence symétrique...

[1] The series of adjectives *binary*, *ternary*, *quaternary*, *quinary*... leaves mathematicians in a quandary when $n = 1$. It is customary to stammer out some such makeshift as *unary* or *uninary* or *unitary*. But the proper word is appropriate if we reflect that the series of Latin distributives *bini*, *terni*, *quaterni*, *quini*... begins with *singuli*. (W. V. O. Quine, *Mathematical Logic*, 1940)

Il est également possible de mélanger les objets ci-dessus en associant :

1. **à une fonction** :
   (a) **un nombre** : valeur/limite en un point, variation totale, intégrale, nombre de points où la fonction atteint un maximum... ;
   (b) **un objet géométrique** : graphe, tangente en un point, épigraphe, point d'inflexion... ;
   (c) **un ensemble** : ensemble des zéros, des points de continuité, des points où la fonction est positive... ;
2. **à un objet géométrique** :
   (a) **un nombre** : longueur d'une courbe, volume d'une région dans l'espace, genre d'une surface... ;
   (b) **une fonction** : aire d'une surface fonction d'un point variable, nombre de points d'intersection d'une famille variable de droites/cercles... ;
   (c) **un lieu géométrique** : médiatrice, cercle inscrit, arcs capables, coniques... ;
3. **à un ensemble** :
   (a) **un nombre** : cardinal, plus petit élément... ;
   (b) **une fonction** : caractéristique (associe 1 aux objets de l'ensemble et 0 aux autres)...

On peut créer de nouvelles opérations de la façon suivante : à chaque objet o et chaque opération $*$, on peut associer l'opération « composer par l'objet o selon l'opération $*$ ». Par exemple :

1. le successeur d'un entier est défini comme la somme de 1 et de cet entier ;
2. le complémentaire d'un ensemble à un sur-ensemble Ω est défini comme la différence de Ω par cet ensemble.

Le procédé ci-dessus[2] est en fait aussi un moyen de créer de nouvelles fonctions : par exemple, dans un composé $a * b * c$, on pourra fixer b et considérer le composé comme fonction de a et c.

1.2 Quelles propriétés ?

Étant donné un objet, on peut se demander s'il possède un *attribut* donné ; si le doute s'installe, on peut même se poser la question de son *existence*. Plus généralement, une propriété portant sur plusieurs objets exprimera que ces derniers sont dans une certaine *relation* – elle en *relate* quelque chose. Par exemple :

1. **chez les nombres** :
   (a) la primalité (être premier), être un carré, la négativité, être somme de deux premiers, être somme de trois cubes... ;
   (b) être divisible par (divisibilité), être multiple de, venir avant/après (être plus petit/grand que)... ;
2. **chez les points et les droites** :
   (a) être sur le cercle unité (pour un point), recouper le disque unité (pour une droite)... ;
   (b) l'incidence (pour un point et une droite), le parallélisme (pour des droites), l'orthogonalité (pour deux droites), être du même côté d'une droite donnée (pour deux points dans le plan)... ;
3. **chez les fonctions** :
   (a) être bornée, la continuité, admettre une limite finie en tel point, la croissance, la convexité, admettre un maximum... ;
   (b) être en chaque point plus petite que, la négligeabilité (autour d'un point), l'équivalence (autour de l'infini)... ;
4. **chez les ensembles** :
   (a) la finitude, la vacuité, être de cardinalité 18, être en bijection avec son carré... ;
   (b) l'appartenance, l'inclusion...

[2] nous laissons de côté les discussions portant sur la commutativité et l'associativité, lesquelles nous amèneraient à distinguer *e. g.* composition à-*droite*-par-o et composition à-*gauche*-par-o ou encore les composés $(a * b) * c$ et $a * (b * c)$

De la même manière que les opérations peuvent engendrer de nouvelles fonctions, on peut créer de nouvelles relations en fixant un ou plusieurs objets dans une relation donnée. Par exemple

1. la positivité d'un nombre est la relation « vient après 0 » ;
2. l'attribut « recouper le disque unité » est la relation binaire « se rencontrer (en au moins un point) » où l'on a fixé l'un des deux lieux géométriques comme étant le disque unité.

Une autre façon de construire de nouvelles propriétés est de relier des propriétés données à l'aide de *connecteurs logiques* :

1. un connecteur singulaire : « *non* » (négation) ;
2. des connecteurs binaires : « *et* » (conjonction), « *ou* » (disjonction), « *ou bien* » (disjonction exclusive), « *si... alors...* » (implication), « *est équivalent à* » (équivalence)...

Par exemple, on peut écrire des *énoncés* de la forme

1. π est positif *et* e est négatif (ce qui manifestement faux) ;
2. *si* un ensemble est non vide, *alors* il y a un objet lui appartenant (ce qui semble vrai) ;
3. 4 est somme de deux premiers *et* 6 est somme de deux premiers *et* 8 est somme de deux premiers *et* 10 est somme de deux premiers *et*... (ce qui énonce la conjecture de GOLDBACH : chaque entier pair supérieur à 3 est somme de deux premiers).

1.3 Quel discours ? Vers les limites de la mathématique naïve

On attribue une *valeur de vérité* (vrai ou faux) à un énoncé en le *déduisant* d'autres énoncés vrais. C'est le ***principe de cohérence*** du discours mathématique :

est vrai tout ce qui est prouvable à partir de (matériau) vrai.

Trois questions nous conduisent alors aux limites de la mathématique naïve :

1. Qu'est-ce qu'une preuve ? Ce qui convainc, ce qui rend certain : voilà de bonnes visées – mais qui laissent des zones d'ombres, en particulier quant aux critères objectifs à adopter.
2. En remontant une preuve, on tombe sur des énoncés indémontrables (appelés *postulats*) dont la vérité est sujette à des querelles théologiques entre écoles philosophiques.
3. Quelle est la nature des objets dont parlent ces postulats – et plus généralement chaque énoncé ? Existent-ils vraiment ?

Ces trois questions (critères de conviction, vérité des postulats et nature/existence des objets mathématiques) *ne ressortent pas* de la mathématique : bien imprudent serait le mathématicien naïf qui s'y engagerait en toute candeur.

Afin d'illustrer notre propos, nous proposons à la lecture le point 4.003 du *Tractacus Logico-Philosophicus* (1922) de Ludwig WITTGENSTEIN :

> La plupart des propositions et des questions qui ont été écrites touchant les matières philosophiques ne sont pas fausses, mais sont dépourvues de sens. Nous ne pouvons donc en aucune façon répondre à de telles questions, mais seulement établir leur non-sens. La plupart des propositions et questions des philosophes découlent de notre incompréhension de la logique de la langue.
>
> (Elles sont du même type que la question : le Bien est-il plus ou moins identique que le Beau ?)
>
> Et ce n'est pas merveille si les problèmes les plus profonds ne sont, à proprement parler, pas des problèmes.

2 Paradoxes de la mathématique naïve

> [Ce] n'est pas une des moindres tâches du logicien que de montrer quelles embûches le langage a préparées à la pensée.
>
> Gottlob FREGE, *Recherches logiques* (1918-1923).

2.1 Polysémie : des postulats vrais et faux

La question de la vérité des postulats est un non-sens car ces derniers peuvent recevoir *plusieurs significations.* Quelques exemples empruntés aux nombres et à la géométrie.

1.

$$\textit{Le produit de deux nombres strictement positifs quelconques est toujours supérieur ou égal à chacun d'entre eux.} \tag{1}$$

Cet énoncé est *vérifié* pour les nombres entiers (où être strictement positif équivaut à être supérieur ou égal à 1) mais *infirmé* pour les nombres rationnels (multiplier par $\frac{1}{2}$ diminue la valeur).

2.

$$\textit{Le carré de chaque nombre est positif.} \tag{2}$$

Cette affirmation est *vraie* pour les nombres réels (d'après la règle des signes) mais fausse pour les nombres complexes (où $i^2 = -1$).

3.

$$\textit{On peut énumérer les nombres.} \tag{3}$$

Cette assertion est *triviale* pour les nombres entiers qui sont précisément la donnée de symboles dont on sait exactement qui vient après l'autre :

$$0, 1, 2, 3, 4...$$

L'allégation (3) est également *vraie* pour les entiers relatifs : il suffit de regrouper chaque entier naturel avec son opposé :

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4...$$

Bien qu'il y ait (apparemment) beaucoup plus de fractions que d'entiers, la thèse (3) reste *valide* pour les nombres rationnels : il suffit d'énumérer les fractions d'abord selon la somme du numérateur et du dénominateur puis (par exemple) à numérateur croissant. Les fractions positives seront ainsi énumérées comme suit :

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \quad \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \quad \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \quad \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1} \quad ...$$

(On pensera à retirer de la liste ci-dessus les fractions qui ne sont pas sous forme irréductible, par exemple $\frac{2}{2}$ ou $\frac{2}{4}$ ou $\frac{4}{6}$.)

En se plaçant maintenant dans les nombres réels, l'énoncé (3) devient *faux.* Voyons pourquoi cela est impossible. On pourrait sinon énumérer (par restriction) les réels de $[0, 1[$ que l'on identifiera aux suites de leurs décimales ne finissant pas par une infinité de 9 consécutifs :

$$\begin{array}{lcl} \text{réel n}^\circ\ 1 & : & a_1 b_1 c_1 d_1 ... \\ \text{réel n}^\circ\ 2 & : & a_2 b_2 c_2 d_2 ... \\ \text{réel n}^\circ\ 3 & : & a_3 b_3 c_3 d_3 ... \\ \text{réel n}^\circ\ 4 & : & a_4 b_4 c_4 d_4 ... \\ & ... & \end{array}$$

En désignant, pour chaque entier N donné, par $\overline{N}$ un entier différent de N et de 9 (par exemple 1 si N est nul et 0 sinon), considérons la suite de décimales *diagonale*[3] $\overline{a_1}\overline{b_2}\overline{c_3}\overline{d_4}$... D'une part, la suite précédente ne contient aucun 9 (par définition des $\overline{N}$), d'autre part elle définit un réel de $[0, 1]$. Par hypothèse d'énumération, elle doit apparaître dans la liste ci-dessus, mettons à la ligne numéro N : mais alors la N-ième décimale ne peut pas correspondre (par définition des $\overline{N}$).

4.

$$\textit{Deux droites quelconques de pentes différentes se rencontrent toujours.} \tag{4}$$

Cet énoncé s'apparente à un postulat indiscutable de géométrie euclidienne : si deux droites n'ont aucun point en commun, alors elles sont parallèles. Il est de fait *vérifié* en géométrie plane.

[3]Ce raisonnement est typique de l'***argument diagonal*** de CANTOR constitué d'une part d'*auto-référence* (la diagonale ci-dessus identifie numéro de ligne et numéro de décimale), d'autre part de *négation* (ici remplacer N par $\overline{N}$).

En revanche, si l'on définit la pente d'une droite de l'espace comme sa pente dans chaque plan contenant cette droite qui est orthogonal à un plan de référence (« horizontal »), alors deux droites orthogonales situées respectivement dans deux plans parallèles distincts fournissent un *contre-exemple* à l'affirmation (4).

On peut donner une autre interprétation des termes de l'allégation (4) : on se place dans le plan formé des points dont l'une (au moins) des coordonnées dans un repère donné est rationnelle. Alors les droites d'équations respectives $y = \sqrt{2}$ et $y = x$ ne peuvent se couper, sinon les coordonnées (a, b) d'un point d'intersection devraient satisfaire les égalités $a = b = \sqrt{2}$, ce qui forcerait la rationalité de a ou de b, contredisant l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Ces deux droites sont pourtant de pentes différentes ($\sqrt{2}$ et 1), ce qui infirme la thèse (4).

5.

Dans un plan, étant donnés une droite et un point hors de cette droite,
on peut mener une unique parallèle à cette droite passant par ce point. (5)

Cet énoncé constitue le cinquième postulat des *Éléments* d'Euclide et est en soit une *vérité* de la géométrie plane.

L'intérêt du 5^e postulat est que, historiquement ; c'est le premier exemple d'énoncé dont on a montré l'*impossibilité* de le déduire d'autres énoncés (les autres postulats de la géométrie plane) en fournissant une *interprétation non euclidienne* de ses termes primitifs (points et droites) qui *infirme* ce postulat.

Voici une telle interprétation : un « point » sera un point du disque unité ouvert, une « droite » sera ou bien un diamètre de ce disque ou bien un arc de cercle contenu dans ce disque et orthogonal au cercle unité. Selon cette interprétation, on voit qu'une « droite » possède une infinité de parallèles passant en un « point » donné (hors de cette « droite »), ce qui infirme la thèse (5).

2.2 Signifiant & signifié : quatre paradoxes

Comme pour chaque langage, il convient de distinguer en mathématique le *support* de la pensée (graphèmes, phonèmes...) de ce qu'elle *exprime* ; il faut distinguer

1. d'une part le *syntaxique*, c'est-à-dire tout ce qui a trait à la syntaxe, laquelle nous voyons comme combinatoire/*agencement de symboles* (par exemple des règles de grammaire) ;
2. d'autre part le *sémantique*, c'est-à-dire tout ce qui ressort de l'*interprétation* des symboles, tout ce qui concerne la pensée, le message véhiculé(e).

Mettons tout de suite en garde contre une confusion : on pourra trouver du sens dans des règles syntaxiques. Par exemple, il est sensé en français de mettre l'article *mon* avant le substantif *enfant* (on applique une règle de grammaire) : mais ce sens (opératoire) n'a pas la même nature que celui exprimé par la pensée « *Mon enfant resplendit* ». Et l'on conviendra par la suite que c'est ce dernier sens (interprétatif) qui nous intéresse.

2.2.1 Le crétois : un énoncé ni vrai ni faux

Considérons la phrase

« *Cet énoncé est faux* »

et appelons-la C (comme « ***c***rétois »). Elle dit/énonce quelque chose (la fausseté d'un certain énoncé, à savoir C), donc il est naturel d'évaluer sa vérité.

Si l'énoncé C est vrai, alors ce qu'il dit est vrai, c'est-à-dire « C *est faux* » est vrai, donc C est faux, contredisant son caractère vrai que nous avons supposé.

Si maintenant l'énoncé C est faux, alors ce qu'il dit est faux, c'est-à-dire « C *est faux* » est faux, donc C n'est pas faux, ce qui contredit sa fausseté supposée.

Dans les deux cas, nous sommes acculés à une contradiction : ou bien C est vrai et faux à la fois, ou bien C est faux et non faux à la fois.

Conclusion 1.

Lorsqu'une phrase a l'air d'énoncer une vérité, il n'est pas toujours possible d'évaluer cette dernière, c'est-à-dire d'affirmer que cette phrase est ou bien vraie, ou bien fausse.

2.2.2 Gödel : un énoncé ni démontrable ni faux

Notons G (comme Kurt ***G***ÖDEL) la phrase

« *Cet énoncé n'est pas démontrable* »,

qui s'énonce alors « *G n'est pas démontrable* ».

Si G était démontrable, il serait vrai (par principe de cohérence), donc ce qu'il dit serait vrai, c'est-à-dire « *G n'est pas démontrable* » serait vrai, donc G ne serait pas démontrable, contredisant sa démontrabilité supposée.

Si G était faux, il ne serait pas démontrable (sinon il serait – toujours par principe de cohérence – vrai, contredisant sa fausseté supposée), donc l'énoncé « *G n'est pas démontrable* » serait vrai ; or ce dernier énoncé n'est autre que l'énoncé G, d'où que fait que G serait vrai, contredisant sa fausseté supposée.

Ainsi, l'énoncé G n'est ni démontrable ni faux.

Conclusion 2.

On ne peut pas identifier le vrai et le prouvable.

Observer que cette conclusion est bien connue des chargés d'enquêtes policières[4] tout comme des mystiques[5].

2.2.3 Berry : une propriété dont ne peut séparer les objets la vérifiant de ceux l'infirmant

Considérons

1. d'une part la collection $\mathcal{N}$ des nombres entiers définissables par une phrase (française) de moins de mille mots (par exemple, l'entier 5 est le plus petit diviseur premier de 1015, le nombre 100! est le produit des entiers de 1 à 100) ;
2. d'autre part la collection $\mathcal{P}$ des phrases (françaises) de moins de mille mots définissant un entier de $\mathcal{N}$.

La langue (française) n'utilisant qu'un nombre fini de caractères (alphabet, ponctuation, espaces), le nombre de phrases de moins de mille mots est fini, *a fortiori* la collection $\mathcal{P}$ est finie. Par ailleurs, par définition de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{P}$, chaque phrase de $\mathcal{P}$ définit un (unique) entier de $\mathcal{N}$ et chaque entier de $\mathcal{N}$ est défini par (au moins) une phrase de $\mathcal{P}$; en regroupant les phrases de $\mathcal{P}$ définissant un *même* entier donné dans $\mathcal{N}$, on voit que la collection $\mathcal{N}$ possède moins d'objets que la collection $\mathcal{P}$, ce qui montre qu'elle ($\mathcal{N}$ comme $\mathcal{P}$) est finie. Puisqu'il y a une infinité d'entiers, le complémentaire de $\mathcal{N}$ (la collection des entiers *non* définissables par une phrase en moins de mille mots) est infini, donc contient au moins un élément. Or chaque collection (non vide) d'entiers admet un plus petit élément : on peut donc considérer le plus petit entier non définissable par une phrase de moins de mille mots. Mais cette dernière phrase est précisément une définition de cet entier en moins de mille mots, ce qui est contradictoire.

Conclusion 3.

On ne peut pas toujours, dans une collection donnée, séparer (par la pensée)
les éléments vérifiant une propriété sensée des autres.

On pourra dégager des trois paradoxes qui précèdent le schéma général suivant, déjà présent dans l'argument diagonal de CANTOR :

Lorsque la syntaxique s'entremêle à la sémantique, on peut créer de l'auto-référence,
ce qui peut mener – moyennant une négation *– à des* contradictions. (6)

Exercice (paradoxe de RICHARD).

Considérer la collection des nombres réels définissables, montrer qu'on peut énumérer ces derniers puis appliquer un argument diagonal pour aboutir à une contradiction.

[4] On pourra à ce propos citer Alain CONNES dans *Triangle de pensée* : « *L'on est habitué à distinguer, dans la réalité extérieure familière, entre vérités et décisions d'un tribunal, à ne pas confondre ce qui est prouvable au tribunal avec ce qui est vrai.* ».

[5] Au contraire des juges, les mystiques peuvent transmettre la vérité sans arsenal logique, sans preuve, directement « de cœur à cœur », *isshin denshin*.

2.2.4 Caroll : implication & déduction

Ce paradoxe est tiré d'un dialogue entre Achille et la tortue écrit par Lewis CAROLL pour la revue *Mind* (publié entre 1894 et 1895) : *What the Tortoise Said to Achilles*.

Considérons deux énoncés $\acute{E}$ et F dont on sait que le premier implique le second, ce qui s'énonce sous la forme $\acute{E} \Longrightarrow F$, énoncé que l'on notera α.

Pour pouvoir *effectivement* déduire F de $\acute{E}$, il nous faut une règle légitimant la déduction de F à partir de $\acute{E}$ et de α, ce qui s'énonce $\left(\acute{E} \text{ et } \alpha\right) \Longrightarrow F$; notons cette règle β. Mais pour déduire, à partir de l'hypothèse $\acute{E}$ et de la règle β précédente, la conclusion F, il nous faut à nouveau une règle nous y autorisant, à savoir $\left(\acute{E} \text{ et } \beta\right) \Longrightarrow F$, laquelle règle (appelons-la γ) nécessitera à son tour une règle δ : $\left(\acute{E} \text{ et } \gamma\right) \Longrightarrow F$ puis une règle $\left(\acute{E} \text{ et } \delta\right) \Longrightarrow F$... Finalement, on ne pourra jamais déduire F de $\acute{E}$!

Conclusion 4.

> *L'implication et la déduction, constituants fondamentaux de la preuve mathématique, ne peuvent être identifiés ; leurs rapports doivent être éclaircis.*

Il nous faut donc revoir nos trois questions (quels objets, propriétés et discours pour la mathématique) à l'aune des conclusions ci-dessus.

3 Mathématique symbolique

> « The stages through which research in the foundations of mathematics has passed in recent times correspond to the three basic possibilities of epistemological attitude. The set-theoretical approachis the stage of *naive realism* which is unaware of the transition from the given to the transcendent. Brouwer represents *idealism*, by demanding the reduction of all truth to the intuitively given. In axiomatic formalism, finally, consciousness makes the attempt to 'jump over its own shadow,' to leave behind the stuff of the given, to represent the transcendent – but how could it be otherwise ?, only through the *symbol*. [...] It cannot be denied that a theoretical desire, incomprehensible from the merely phenomenal point of view, is alive in us which urges toward totality. Mathematics shows that with particular clarity ; but it also teaches us that that desire can be fulfilled on one condition only, namely, that we are satisfied with the symbol and renounce the mystical error of expecting the transcendent ever to fall within the lighted circle of our intuition. »
>
> Hermann WEYL, *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (1926).

La position adoptée pour échapper aux paradoxes de la section précédente est la suivante :

1. *évacuer le sens* des objets et des raisonnements pour n'en garder que la coquille – les graphèmes d'une part, les listes de propositions d'autre part ;
2. se donner des *règles d'agencement* de ces coquilles – d'une part une *grammaire* des symboles composant un énoncé, d'autre part la *validité* d'un raisonnement – dont l'on pourra pleinement *juger* du respect ou non et que l'on pourra librement *appliquer*.

Cette position pourra être éclairée par les trois points suivants tirés du *Tractacus* de WITTGENSTEIN :

> 3.221 Je ne puis que *nommer* les objets. Des signes en sont les représentants. Je ne puis qu'en parler, non les *énoncer*. Une proposition peut seulement dire *comment* est une chose, non *ce qu*'elle est.
>
> 3.261 Chaque signe défini dénote *par-delà* les signes qui servent à le définir ; et les définitions montrent la direction.
>
> 3.262 Ce qui, dans les signes, ne parvient pas à l'expression, l'emploi de ceux-ci le montre. Ce que les signes escamotent, leur emploi l'énonce.

Comme se forme la mathématique symbolique ? Un survol rapide nous révélerait les grandes lignes suivantes.

On définit un *langage* comme n'importe quelle donnée sensible[6] (généralement représentée par des graphèmes pour plus de commodité), on pose des règles de *grammaire* vérifiables par tout un chacun, ce qui permet d'écrire des *phrases* (suites de graphèmes) syntaxiquement correctes (des *énoncés*) puis on définit une *preuve* comme une suite d'énoncés (un *raisonnement*) satisfaisant certaines règles (la *validité* du raisonnement). Une *théorie* mathématique se réduit alors au choix de certains énoncés (ses *axiomes*) et aux énoncés que l'on peut prouver à partir de ces derniers (ses *théorèmes*).

> « Sans doute protestera-t-on. On trouvera peut-être qu'on s'écarte ici de l'usage. Je réponds avec insistance que la science doit pouvoir user du langage à sa manière, qu'elle ne peut pas se soumettre toujours à langage quotidien. C'est là une entrave majeure pour la philosophie, qu'elle dispose d'un outil mal adapté à ses tâches, le langage quotidien, dont la construction fut déterminée par des besoins tout à fait étrangers à la philosophie. La logique est, elle aussi, contrainte de se forger un outil utilisable à partir de ce qui lui est offert. Et pour ce premier travail, elle ne dispose d'abord que d'outils médiocres. »
>
> Gottlob Frege, *Recherches logiques* (1918-1923).

Revenons à nos trois questions.

3.1 Quels objets ?

La question posée revient en fait à « *Qu'est-ce qu'un objet mathématique ?* ». C'est une question (difficile) de *méta*-mathématique. Depuis Frege, cette question peut se ramener à « *Qu'est-ce qu'un* ensemble *?* ». Nous ne répondrons pas ici à cette question qui, mathématiquement, n'a aucun sens.

Laissant de côté la méta-mathématique, le point de vue symbolique représentera un objet tout simplement par un ***symbole*** dit (justement) ***d'objet***. Ce symbole sera très souvent une lettre et revêtira dans le discours l'un des trois *rôles* suivants (mutuellement exclusifs) :

1. un symbole d'objet ***singulier*** : comme le nom l'indique, un tel symbole n'est pas destiné à être interprété en n'importe quel objet mais en un objet *propre* ;
2. un symbole d'objet ***quantifiable***, permettant la formation d'énoncés *quantifiants*[7] de la forme « *Un certain* objet vérifie... » ou bien « *Chaque* objet vérifie... » ; hors de ces derniers énoncés, l'interprétation d'un tel symbole est errante, n'est fléchée vers aucun objet spécifique, c'est-à-dire enfin N'A AUCUN SENS ;
3. un symbole d'objet ***évocable*** : il est usuel en mathématique d'évoquer un objet par l'incantation magique « *Soit un objet vérifiant...* » et de donner alors un nom propre à l'objet évoqué – objet qui devient par la suite du discours un objet singulier jusqu'à la fin du discours.

Nous avons vu en mathématique naïve un procédé de création d'objets par *composition* d'objets précédemment définis à l'aide d'opérations (singulaires, binaires, ternaires...).

Du point de vue symbolique, cela incite à considérer des ***symboles d'opération*** regroupés selon leur arité[8]. N'importe quelle combinaison de symboles d'objet et de symboles d'opération (vérifiant quelques règles de grammaire simples) pourra alors être interprétée en un objet : une telle combinaison sera appelée un ***terme***[9] du langage symbolique, au sens de « *ce sur quoi porte ce langage* ».

Par exemple, $(1 + 0) \times (a! - 42) + 7b$ est un terme du langage des entiers où

1. 1, 0, 42 et 7 sont des symboles d'objet singulier ;
2. a et b sont des symboles d'objet quantifiable ou évocable (peut-être a-t-on auparavant dit « Soit b un entier... ») ;
3. $+$, $\times$ et $-$ sont des symboles d'opération binaire ;

---

[6] Citons le point 3.1431 du *Tractacus* de Wittgenstein (nous mettons en gras) : « *L'essence du signe propositionnel devient très claire lorsque nous nous le figurons comme **composé d'objets spatiaux** (tels des tables, des chaises, des livres) **au lieu de signes d'écriture** »*.

[7] la *quantification* renvoie au *nombre* d'objets concernés : l'existence d'*au moins un objet* pour le quanteur « un certain », une généralité portant sur *la totalité des objets* pour le quanteur « chaque »

[8] L'***arité*** d'une opération est le nombre d'objets qu'elle considère : singulaire $\leftrightarrow$ 1, binaire $\leftrightarrow$ 2, ternaire $\leftrightarrow$ 3...

[9] Le TLF donne pour acception : « *Mot ou ensemble de mots ayant, dans une langue donnée, une signification précise et exprimant une idée définie.* ».

4. ! est un symbole d'opération singulaire.

De même, $(\emptyset \cap s) \cup ({}^c\mathbf{N})$ est un terme du langage des ensembles où

1. $\emptyset$ et $\mathbf{N}$ sont des symboles d'objet singulier ;
2. s est un symbole d'objet quantifiable ou évocable ;
3. $\cap$ et $\cup$ sont des symboles d'opération binaire ;
4. ^{c} est un symbole d'opération singulaire.

3.2 Quelles propriétés ?

En mathématique naïve, une propriété primitive énonce une relation entre objets, ce qui nous incite (dans notre démarche symbolique) à considérer des ***symboles de relation*** regroupés selon leur arité. Les combinaison de termes et de symboles de relations (respectant une syntaxe simple) constitueront une première classe d'énoncés.

Par exemple, $(1 + 0) \leq (a! - 42) + 7b$ est un tel énoncé du langage des entiers où $\leq$ est un symbole de relation binaire.

En rajoutant des ***connecteurs logiques*** ainsi que des ***quanteurs*** (pour quantifier les symboles d'objets quantifiables), on obtient suffisamment de symboles pour écrire (suivant une syntaxe simple) n'importe quelle ***affirmation*** / ***allégation*** / ***assertion*** / ***énoncé*** / ***proposition*** / ***thèse***[10].

Par exemple, $[\forall a, (0 * a) = a] \wedge [\exists b, b \geq 42!!] \Longrightarrow [c \mid 7]$ est une thèse du langage des entiers où

1. a, b sont des symboles d'objet quantifiable ;
2. c est un symbole d'objet évocable ;
3. $*$ est un symbole d'opération binaire ;
4. ! est un symbole d'opération singulaire ;
5. $=$, $\geq$ et $\mid$ sont des symboles de relation binaire ;
6. $\wedge$ et $\Longrightarrow$ sont des connecteurs logiques ;
7. $\forall$ et $\exists$ sont des quantificateurs.

L'interprétation originelle de ces symboles (les énoncés usuels) *motive* les règles syntaxiques ci-dessus et demeure à tout instant du discours mathématique un *guide* précieux ; cette interprétation doit cependant rester *complètement détachée* des signifiants : ON RENONCE AU SENS NAÏF.

3.3 Quel discours ?

Une ***preuve*** sera une liste d'énoncés (*a fortiori* une liste de symboles) respectant certaines règles dite ***de validité*** motivées par le raisonnement usuel (par exemple, à partir de A et de $A \Longrightarrow B$, pouvoir déduire B).

ON ABANDONNE LE VRAI / FAUX (sujet à l'interprétation et, pour les postulats, à l'absolu) pour laisser place au ***prouvable*** (syntaxique et relatif[11]).

L'on espère éclairer les choix qui précèdent à la lumière de cette citation de Bertrand Russell (1917) :

> « *Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.* ». (7)

Afin d'étayer la première thèse de Russell (« we never know what we are talking about »), nous proposons l'extrait suivant de *Pour l'honneur de l'esprit humain* (1987) de Jean Dieudonné :

[10] Ces mots seront parfaitement interchangeables en mathématique. Par honnêteté intellectuelle, nous signalons l'outil en ligne *CRISCO* qui nous a permis de sélectionner ces synonymes parmi d'autres.

[11] remplacer « *prouvable* » par « ***déductible*** » permettrait d'appuyer cette relativité : on déduit en effet toujours *de quelque chose* !

On se demande aussitôt comment on peut raisonner correctement en évitant de définir les choses dont on parle, et en échappant ainsi à une régression indéfinie dans les définitions ? La réponse est très simple : il suffit de s'astreindre à ne *jamais* énoncer sur les objets de la géométrie et leurs relations aucune proposition qui ne soit conséquence logique du système d'axiomes qui les régit (eux aussi énumérés *exhaustivement*). Comme l'a écrit Poincaré, on peut dire que ces axiomes constituent des « définitions déguisées » des objets et relations qui y figurent ; ces derniers se sont en quelque sorte évanouis, remplacés par le faisceau de leurs propriétés axiomatiques.

Hilbert, après Pasch, a indiqué un moyen d'éviter des conclusions que pourrait suggérer l'intuition géométrique, mais qui ne dérivent pas des axiomes : ce serait de changer les noms usuels des objets de la géométrie et de leurs relations. Hilbert proposait de dire « table », « chaise » et « chope » pour « point », « droite » et « plan »[12]. Par exemple, les deux premiers axiomes de la liste de Hilbert :

1) « Deux points distincts appartiennent à une droite et une seule »,
2) « Il y a au moins deux points distincts appartenant à une même droite », deviendraient :
1) « Deux tables distinctes appartiennent à une chaise et une seule »,
2) « Il y a au moins deux tables distinctes appartenant à une même chaise. »

Il est clair qu'on ne risquerait pas d'erreur involontaire sur de tels énoncés dépourvus de sens dans le langage courant.

Cela peut paraître une plaisanterie ; en fait, cette dissociation du sens et du nom concrétise, pour la géométrie élémentaire, le processus fondamental qui a libéré la mathématique des chaînes qui l'attachaient trop étroitement au réel ; il a permis toutes les conquêtes inespérées réalisées depuis un siècle et ses applications surprenantes à la physique.

3.4 Comparaison avec la mathématique naïve – fondements de la mathématique

Outre l'évanouissement des paradoxes présentés à la section 2, l'approche symbolique permet de :

1. briser les chaînes kantiennes qui aliènent la mathématique à la réalité (*cf.* la polysémie du 5^{e} postulat et le dernier paragraphe précité de DIEUDONNÉ) ;
2. renvoyer les discussions philosophiques sur les relations entre mathématique et réalité[13] (*cf.* point 4.003 précité juste avant la section 2) à la frontière du continent mathématique (symbolique) vers leur pays d'origine[14] où elles feront pleinement loi : celui de la *méta*-mathématique ;
3. fonder la légitimité du discours mathématique en sa juste place et en percevoir par là ses limites : l'être humain est capable
   (a) de *juger* si une règle de jeu est respectée/suivie ou non ;
   (b) d'*appliquer* une règle de jeu ;
   (c) d'appliquer *successivement* plusieurs règles de jeu ;
   (d) de *mettre du sens* dans ce qu'il dit/écrit/lit/entend/fait (témoin : sa langue maternelle).

   Ce troisième point est capital car il présente (selon nous) les *fondements de la mathématique* et les met en contact direct avec quatre domaines où notre *confiance* est la plus à même de s'exercer, ce qui permet d'en finir avec la mythe de l'infirmité mathématique (*cf.* section 4.2).

Inconvénient. La formalisation (c'est-à-dire la mise en symboles) peut être fastidieuse : sa *possibilité* à tout instant du discours mathématique demeure cependant *indispensable* pour garantir le bien-fondé de ce dernier – c'est le prix à payer.

[12] La possibilité de choisir arbitrairement un mot pour définir un objet, c'est-à-dire abréger l'énoncé des propriétés qui le caractérisent, est déjà notée par Platon (Lettre VII, 343 b) ; la remarque est reprise par d'Alembert, qui déclare dans l'Encyclopédie que rien n'empêcherait d'appeler « triangle » ce qu'on appelle communément « cercle ».

[13] Quelques exemples d'affirmations méta-mathématiques, dont il est vain de discuter le sens en mathématique : « L'infini n'existe pas », « Le principe de récurrence est une tautologie arithmétique », « Je ne comprends pas, ce n'est pas une preuve », « Tu le vois pas cet angle droit ? Mais t'es vraiment bigleux ! », « Il est parfaitement évident que deux mobiles parcourant un même chemin continu selon des directions opposées vont se rencontrer »...

[14] Pour son salut, l'auteur tient à préciser que cette phrase n'est pas un appel à la xénophobie.

4 Sens et rigueur mathématiques

Mettons en garde contre tout enthousiasme excessif provoqué par la section précédente. La *pratique* mathématique ne se réduit aucunement à du poussage de symboles (jeu stérile auquel l'homme n'est pas adapté[15]). Cela reviendrait à réduire l'élaboration d'une pensée à l'exclusive observance des règles de grammaire régissant les phrases exprimant cette pensée.

4.1 Le paradoxe de Poincaré

Citons Henri POINCARÉ dans *La science et l'hypothèse* (1902) :

« *La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ?* ».

Étrangement, POINCARÉ énonce ce paradoxe fondamental sans proposer d'échappatoire satisfaisante[16].

Nous proposons une élucidation reposant sur la mise à jour des fondements de la mathématique que nous avons déjà exposés :

1. la *rigueur* du discours mathématique se fonde sur notre *capacité*
   (a) d'une part à *juger* que les *règles de sa syntaxe* sont respectées ;
   (b) d'autre part à *appliquer* ces règles pour créer effectivement le discours ;
2. le *sens* qu'il véhicule nous est dévoilé, *montré*, par notre capacité à mettre du sens dans des symboles – avec toute la *subjectivité* que l'on peut attendre d'une telle capacité à interpréter.

Il est très aisé de se mouvoir dans le monde du langage mathématique, de ses règles syntaxiques, en confondant ce langage avec ce à quoi il éveille. On peut trancher d'une question de grammaire car il s'agit de juger si des règles d'un jeu sensible ont été appliquées ou non mais l'on ne pourra *jamais* trancher d'une question de méta-mathématique car celle-ci *n'est pas dicible* (par le langage mathématique), elle n'est que *montrable* – on confondra ainsi le fait de *dire* « Dieu existe » avec la simple *suggestion* de quelque chose qui nous dépasse.

Le paradoxe de POINCARÉ tient alors de l'identification de la rigueur et du sens, de la confusion entre ce qui est *dit/écrit* (les listes de phonèmes/graphèmes, sur lesquels la rigueur peut légitimement s'appliquer) et ce qui est *montré/suggéré* (un « sens » mathématique, propre à chacun).

Plus précisément, la « *parfaite rigueur* » dont parle POINCARÉ nous semble dissimuler la *certitude* du discours mathématique : en effet, d'un point de vue naïf, c'est bien la rigueur mathématique qui légitime la certitude de ce qui est affirmé. Or la rigueur syntaxique vogue sur les eaux de la mathématique symbolique tandis que la certitude navigue dans l'océan méta-mathématique : quiconque ouvrirait les écluses et mélangerait leurs eaux devra affronter le paradoxe de POINCARÉ dans toute sa consistance.

4.2 Les mythes de la certitude, de la réalité et de l'infirmité mathématiques

La « certitude » de « le » sens montré par le discours mathématique relève de la *méta*-mathématique. Cette certitude est mise à rude épreuve par les paradoxes de l'histoire (*cf.* section 2), lesquels nous montrent son caractère fragile, éphémère – et par conséquent *chimérique*. Il s'agit plutôt d'une *croyance* en *un* sens – croyance et sens *propres à chacun*.

La force/profondeur d'une croyance se révèle par sa potentialité à nous faire *agir* en *vivant* cette croyance. Elle peut dans un premier temps constituer un *guide d'action* (dans le cas d'un discours ou d'une croyance d'autrui) avant d'être pleinement vécue et ainsi intégrée comme croyance propre.

Ce n'est qu'à l'aune des *résultats* des actions qu'elle porte que l'on pourra juger *in fine* de la *valeur* d'une croyance. Cela constitue à nos yeux la seule acception recevable de sa *vérité* – en fait de celle de son contenu.

[15] Les machines pourront lui être d'une aide inestimable afin d'effectuer ce travail.
[16] selon notre lecture – assumée – de *La science et l'hypothèse*

Aucun des modes fondateurs de la mathématique (point 3 de la section 3.4) n'est propre à transmettre la vérité d'une croyance, en particulier celle « du » sens du « discours » mathématique.

Il n'y a par conséquent aucune infirmité intellectuelle propre à la mathématique. La confiance *en* mathématique peut être retrouvée en « important » une confiance naturelle *du dehors de* la mathématique et l'intelligence développée par la pratique mathématique se propage *au-delà de* la mathématique – témoin : la pratique de Stella Baruk[17].

J'espère ainsi casser ce mythe de la réalité mathématique qui est de confondre les visions méta-mathématiques de quelques illuminés[18] avec les suites de graphèmes pouvant, moyennant l'aide d'un tiers enseignant habile, guider de pauvres élèves aveugles vers le monde de ces visions.

J'espère également casser un retournement de ce mythe (qui n'en est qu'un doublage) consistant à croire que la Réalité méta-mathématique perçue l'est dans la réalité commune/sensible (« *Tu le vois pas cet angle droit ? Mais t'es vraiment bigleux !* »[19]).

Ce double mythe prend toute son ampleur destructrice quand :

1. on prétend montrer quelque chose (la Réalité méta-mathématique) là où il n'est pas (dans la réalité commune) ;
2. en confondant cette Réalité (indicible) avec le moyen utilisé (le langage, le dicible).

(On en profitera au passage pour établir un parallèle avec le *langage scientifique*[20] qui n'est qu'une *modélisation* de la réalité phénoménologique – bien qu'il prétende à l'atteindre.)

Si j'insiste lourdement sur ces mythes, c'est parce que j'en ai constaté les ravages dans mon expérience d'enseignement. J'en ai assez que l'on casse des élèves parce qu'ils ne voient pas ce qu'ils *ne peuvent* pas voir, je n'en peux plus qu'on les prive d'une confiance naturelle sans laquelle – à juste titre – ils ont peur de tout et ne peuvent rien entreprendre. « *La grande égalité des enfants face à l'enseignement, c'est celle des traumatismes qu'on leur inflige. Les inégalités, elles apparaissent dans la possibilité qu'ils ont de les encaisser. Mais est-il bien nécessaire de pratiquer la sélection par la destruction du sens dans l'œuf ?* »[21]

Si j'en suis venu à exposer la mathématique *via* la symbolique, c'est encore suite à un constat avec mes élèves : tout le monde n'a pas les ailes d'un Poincaré pour survoler le nuage de son paradoxe[22]. En présentant les fondements de la mathématique de la sorte, j'espère les mettre *en contact direct* avec une de nos capacités les plus élémentaires (point 3a de la section 3.4) qui se résume essentiellement en ceci :

$$\text{\textit{pouvoir juger si sa main que l'on appelle} droite \textit{est}}\\ \text{\textit{effectivement} à la droite de \textit{sa main que l'on appelle gauche.}} \tag{8}$$

L'autre capacité que je souhaite mettre en lumière est celle à *recommencer*, à faire le pas d'après : cela s'appelle *marcher* (points 3b-3c de la section 3.4). N'importe quel aveugle est capable de suivre d'un bout à l'autre une corde qu'on lui présente pourvu qu'il ait *confiance* en :

1. la personne qui lui tend la corde et lui dit où elle le mènera ;
2. sa capacité à passer d'un « chaînon » de corde au chaînon « suivant ».

Une fois cette seconde confiance retrouvée, elle pourra s'étendre petit à petit à l'ensemble de la corde, depuis son lieu de départ jusqu'à son lieu d'arrivée, à plusieurs cordes jointes bout à bout. Lorsque les cordes redeviennent un terrain *sûr* (en lequel on évolue en toute confiance), on pourra en lâcher une pour s'éloigner un peu – oh, pas bien loin ! on revient vite là où l'on se sent en confiance. Mais ainsi l'horizon pourra-t-il s'élargir et le regard s'ouvrir, ainsi l'entendement pourra-t-il (re)commencer à travailler et le sens à (re)prendre chair.

Nous espérons avoir éclairé à travers nos choix la citation de Frege qui ouvre cette introduction : « *Ainsi le sensible ouvre-t-il le monde de ce qui échappe aux sens* ».

[17] Citons par exemple *Échecs et maths* (1973) : « *nombre de ces enfants faisaient, en* français*, des progrès qui coïncidaient curieusement avec le début de ces rééducations mathématiques* ».

[18] dans le sens le plus mélioratif possible

[19] Rappelons que deux vecteurs forment un angle droit si leur produit scalaire (qui est une forme bilinéaire définie symétrique positive) est nul. C'est vrai qu'il faudrait être bigleux pour ne pas s'en apercevoir.

[20] Pour plus de précisions, on renvoie à l'ouvrage suivant de Pierre Duhem (1906) : *La théorie physique – son objet, sa structure.*

[21] Stella Baruk, *L'âge du Capitaine*

[22] Beaucoup, de fait, y parviennent (sans prétendre à atteindre la grandeur de Poincaré) mais beaucoup trop encore n'y parviennent pas.

4.3 La science mathématique

La pratique mathématique requiert une *démarche scientifique* dont nous présentons, pour terminer cette introduction, les grands traits et les principales qualités requises.

> [La] logique et l'intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration : l'intuition est l'instrument de l'invention.
>
> Henri Poincaré, *La valeur de la Science* (1905).

Ce propos de Poincaré lie irrémédiablement la *certitude* du discours mathématique avec la *logique* – notre mathématique symbolique. Cette dernière consistant exclusivement en un jeu de symboles, syntaxique, dont les ordinateurs nous montrent suffisamment l'importance de vérifier la correction au signe de ponctuation près (témoins : les bugs originels compromettant sérieusement le fonctionnement des machines), l'on comprendra toute l'importance de la *rigueur* en mathématique, où le moindre bug dans une démonstration peut aboutir à une contradiction (analogue du dysfonctionnement de machine) :

1. ne *rien laisser de côté*, du plus petit détail trivial dans un sous-sous-cas pathologique d'une démonstration jusque dans l'organisation la plus globale d'un travail quelconque ;
2. *vérifier* tout ce que l'on entend/lit (les autres, son intuition).

Cette qualité va de pair avec l'*honnêteté* :

1. *envers soi-même* : savoir reconnaître que l'on a manqué de rigueur et en accepter toutes les conséquences – même s'il faut renier un travail de longue haleine qui nous a coûté ;
2. *envers autrui* : ne pas le tromper, *indiquer clairement* ce que l'on *admet*.

Revenons au rôle de l'intuition dont parle Poincaré dans *La valeur de la science* :

> L'Analyse pure met à notre disposition une foule de procédés dont elle nous garantit l'infaillibilité ; elle nous ouvre mille chemins différents où nous pouvons nous engager en toute confiance ; nous sommes assurés de n'y pas rencontrer d'obstacles ; mais, de tous ces chemins, quel est celui qui nous mènera le plus promptement au but ? Qui nous dira lequel il faut choisir ? Il nous faut une faculté qui nous fasse voir le but de loin, et, cette faculté, c'est l'intuition. Elle est nécessaire à l'explorateur pour choisir sa route, elle ne l'est pas moins à celui qui marche sur ses traces et qui veut savoir pourquoi il l'a choisie.

Pour qui se demanderait « C'est bien joli tout ça mais, moi, je n'ai aucune intuition », continuons la lecture qui nous dévoile un fructueux *guide intuitif* utilisable par tout un chacun :

> [...] les analystes ne sont pas simplement des faiseurs de syllogismes à la façon des scolastiques.
>
> Croira-t-on, d'autre part, qu'ils ont toujours marché pas à pas sans avoir la vision du but qu'ils voulaient atteindre ? Il a bien fallu qu'ils devinassent le chemin qui y conduisait, et pour cela ils ont eu besoin d'une guide.
>
> Ce guide, c'est d'abord l'analogie.
>
> [...]
>
> Deviner avant de démontrer ! Ai-je besoin de rappeler que c'est ainsi que se sont faites toutes les découvertes importantes ?
>
> Combien de vérités que les analogies physiques nous permettent de pressentir et que nous ne sommes pas en état d'établir par un raisonnement rigoureux !

L'utilisation de l'analogie est un bon moyen d'éveiller ce « troisième œil », cet *insight* – pour utiliser un terme moins mystérieux. Mais n'oublions pas, avant d'ouvrir le troisième œil, de commencer par ouvrir les deux premiers : un bon scientifique doit savoir *observer*.

Le bon sens invite ainsi à regarder d'un côté du spectre des *situations simples* (où l'observation est facile), de l'autre des *cas extrêmes*, limites (où l'observation est intéressante).

Cette observation *n'est pas passive* : elle requiert un effort, un investissement, lequel pourra consister en des calculs fastidieux ou de la programmation. Le mathématicien ne doit pas craindre de mouiller sa chemise.

Outre des yeux et des outils, quiconque désirerait parcourir la contrée mathématique aura besoin d'un *moteur*. Lisons à ce propos un extrait d'un post de Gaël Octavia (daté du 27 août 2010) :

> Je me rappelle la réponse de Claire Voisin à une question banale que je lui avais posée en interview, à savoir "quelle qualité est indispensable pour faire des mathématiques ?". Au lieu des habituelles "créativité", "rigueur" ou "persévérance", elle avait prononcé le mot "**insatisfaction**". C'est peut-être de cela qu'il est question ici, au delà de la théorie [qu'elle étudie] : **la force de l'insatisfaction, son rôle moteur dans la recherche, sa puissance de fascination**.

Il nous paraît ainsi primordial, afin d'éviter l'écueil des rails ou de la stagnation, de *ne jamais s'arrêter* aux questions posées, de toujours *chercher au-delà* des résultats obtenus.

Cette qualité va de pair avec une certaine forme de tempérance : l'*humilité*. Il est en effet de bon ton, en mathématique, de laisser de côté tout présupposé, tout orgueil. L'humilité nous invite à abandonner nos *préjugés* et nos *prétentions* – invitation qui résonne profondément dans le dernier point du *Tractacus* de Wittgenstein :

« *7. Sur ce dont on ne peut parler, il faut garder le silence* ».

Un scientifique doit par ailleurs savoir communiquer, *dialoguer*. Cela commence par savoir *s'exprimer*, ce qui exige de *maîtriser sa langue maternelle*, sa syntaxe et surtout le *sens* de ses mots/phrases.

Le dialogue présuppose également une capacité d'*écoute*, que l'on pourra tourner vers autrui mais également vers soi-même – vers son intuition.

Une autre qualité que le scientifique mathématicien doit posséder en amont de sa discipline est la capacité à *modéliser* (ou comment faire croire que l'on fait de la mathématique) – à savoir : *transformer* un problème peu ou faussement mathématique en une question mathématique claire.

Cette faculté n'a rien à voir avec la mathématique à proprement parler mais est indispensable pour faire face aux questions posées par des gens qui ignorent la profonde différence de nature entre situation concrète et théorie mathématique. (Les écrits de Stella Baruk sont à ce propos d'une clarté admirable et font écho à ceux de Pierre Duhem concernant la physique.)

La modélisation possède un pendant allant en sens opposé, de la mathématique vers le hors-mathématique : l'*interprétation*. Il s'agit de faire parler les symboles, de leur donner vie dans la réalité mathématique. Rien de plus subjectif. Et pourtant...

> Je crois qu'il faut se garder de confondre la réalité mathématique et son illustration possible dans des phénomènes naturels. Quand je parle de l'existence indépendante de la réalité mathématique, je ne la localise absolument pas dans la réalité physique. Un certain nombre de modèles physiques, utilisent, il est vrai, les mathématiques pour décrire des phénomènes naturels, mais ce serait une grave erreur de réduire les mathématiques à ces phénomènes. Je pense que le mathématicien développe un « sens », irréductible à la vue, à l'ouïe et au toucher, qui lui permet de percevoir une réalité tout aussi contraignante mais beaucoup plus stable que la réalité physique, car non localisée dans l'espace-temps. Lorsqu'il se déplace dans la géographie des mathématiques, le mathématicien perçoit peu à peu les contours et la structure incroyablement riche du monde mathématique. Il développe progressivement une sensibilité à la notion de simplicité qui lui donne accès à de nouvelles régions du paysage mathématique.
>
> Alain Connes, *Matière à pensée* (1989).

Et pourtant, au fur et à mesure de la pratique mathématique, l'interprétation devient plus apte à faire passer les *idées*, le *sens profond* d'un résultat, d'une question. Cette *juste interprétation* devient ainsi *esprit de synthèse* et participe du dialogue à tous ses niveaux.

Petit à petit, notre intuition s'affine : auparavant endormie et brutalisée par de grossières analogies à la portée bien courte, la voilà maintenant capable de deviner par-delà les faits observés ce qui pourrait les *unifier*, la voici apte à « rapprocher des faits que les apparences séparaient »[23] – la visée scientifique par excellence.

Petit à petit se développe le *sens critique*, permettant de séparer, parmi les questions qui s'offrent à nous et les résultats récoltés, le bon grain de l'ivraie, l'*essentiel* de l'*accessoire*, d'un côté l'amande logique d'un concept (sous forme d'axiomes simples et efficaces) et la résonance profondément motrice d'un problème qui a animé la

[23] *La valeur de la Science*

mathématique pendant plusieurs siècles, de l'autre les propriétés accidentelles et marginales, les interrogations futiles et superficielles.

Enfin se dévoilera sans doute la forme la plus épurée de notre intelligence : la *simplicité*.

Pour résumer cette section, un bon mathématicien peut se reconnaître à :

1. **ses outils** : la *rigueur*, couplée à l'*honnêteté* ;
2. **ses yeux** : l'*observation* et l'*intuition* (dont l'*analogie* est un guide reconnu) ;
3. **son moteur** : l'*insatisfaction*, tempérée par l'*humilité* ;
4. **son dialogue** : son *expression* et son *écoute* ;
5. **son rapport au monde extra-mathématique** : la *modélisation* et l'*interprétation* ;
6. **son sens mathématique** : le *sens critique* et la *simplicité*.

Nous espérons, au vu de ce qui précède, avoir suffisamment mis en valeur les *trois axes* suivants de la *pratique mathématique*, dont les essieux se doivent de baigner dans l'*honnêteté* et la *simplicité* afin de pouvoir travailler pleinement :

observer, intuiter, prouver.