Feuille de TD n° 3

Exercice 1 On lance une pièce et un dé, tous deux non truqués. On note P, F les résultats de la pièce et $1, \ldots, 6$ les résultats du dé.

1. Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ modélisant cette expérience, tel que $\mathbb{P}$ soit la probabilité uniforme sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
2. Soit A_1 et A_2 les événements respectifs "le résultat du dé est divisible par 2" et "le résultat du dé est divisible par 4". Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_2)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$. Les événements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?
3. Mêmes questions avec les événements "obtenir pile et au moins 2" et "obtenir pile et un nombre pair".

Exercice 2 Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{B}$ qu'on suppose indépendants. Montrer que A est indépendant de B^c, et que A^c est indṕendant de B^c.
2. Soit A et B deux éléments disjoints de $\mathcal{B}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour qu'ils soient indépendants.
3. Soit A un élément de $\mathcal{B}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'il soit indépendant de tous les éléments de $\mathcal{B}$.

Exercice 3 Un oral d'examen se déroule de la façon suivante : n étudiants ont le choix entre n sujets différents. Le premier étudiant choisit un sujet au hasard ; ensuite le second choisit au hasard parmi les $n-1$ sujets restants ; et ainsi de suite, jusqu'au dernier étudiant qui ne peut prendre que le dernier sujet disponible. Vous avez fait l'impasse sur un (et un seul) des sujets. En quelle position devez-vous passer pour avoir un maximum de chances de réussir (c'est-à-dire de ne pas tomber sur le sujet que vous ne connaissez pas) ?

Exercice 4 Une maladie touche 1 personne sur 10000. On dispose d'un test de dépistage imparfait.

1. On suppose qu'un test donné à une personne malade est positif dans 99 cas sur 100, et qu'un test donné à une personne saine est négatif dans 99 cas sur 100. Un patient est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ?
2. On suppose maintenant qu'un test donné à une personne malade (resp. saine) est positif (resp. négatif) dans a cas sur 100. Pour quelle valeur de a la probabilité qu'un patient testé positif soit effectivement malade est-elle égale à 90% ?

Exercice 5 Dans une population dans laquelle chaque individu est soit gaucher, soit droitier, chaque individu a une probabilité $1/10$ d'être gaucher. On pratique un test de latéralisation sur les membres de cette population. Un gaucher a une probabilité $8/10$ d'échouer au test. Un droitier a une probabilité $7/10$ de réussir le test. Quelle est la probabilité qu'une personne effectuant le test soit gauchère sachant que le test est positif ?

Exercice 6 On dispose de 3 dés numérotés de 1 à 6. On parie sur un chiffre et on lance les 3 dés. Si le chiffre choisi sort 0 (resp. 1, 2, 3) fois on gagne 0 (resp. 1, 2, 5) euro. On note X le gain de la partie.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 7 On lance deux dés à 6 faces numérotés de 1 à 6. On note X et Y les variables aléatoires correspondant aux résultats des deux dés.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$. Calculer son espérance.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $W = XY$. Calculer son espérance.
3. Calculer les variances de X, Y, Z et W.

Exercice 8 (**Jeu de n pile ou face : le modèle de Bernoulli**) On se propose de modéliser un jeu consistant à lancer n fois une pièce, successivement et de manière indépendante, sachant que la pièce a la probabilité p de tomber sur "pile", et $1 - p$ de tomber sur "face", avec $0 < p < 1$ donné. L'espace des états est l'ensemble Ω des suites $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ où $\omega = 1$ si on obtient "pile" au lancer i, et 0 sinon. Ainsi $\Omega = \{0, 1\}^n$. On considère de plus la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, et la probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ définie par

$$\mathbb{P}\big(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}\big) = p^r(1-p)^{n-r} \qquad \text{si card}\,\{i \in \{1, \dots, n\}, \omega_i = 1\} = r.$$

1. Montrer que l'expérience est ainsi bien modélisée.
2. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le résultat est "pile". Montrer que pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}\big(X = k\big) = \mathbb{P}\Big(\{(\omega_1, \dots, \omega_n), \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k\}\Big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

3. Calculer l'espérance et la variance de X.