

Feuille de TD n° 4 – Fonctions génératrices.

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction u_n sur $[0, 1]$ par $u_n(x) = x^n(1 - x)$.

- Montrer que $\sum_n u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ et calculer $\sum_n u_n(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
- Montrer que $\sum_n u_n$ ne converge pas normalement sur $[0, 1]$
 - en utilisant la définition,
 - en utilisant le théorème de continuité des séries.
- Vérifier que $\sum_n u_n$ converge normalement sur $[0, a]$ pour tout $a \in]0, 1[$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans l'intervalle réel $]0, \pi/2[$ de densité f_X et soit $Y = \sin(X)$. On suppose que Y suit une loi uniforme sur $]0, 1[$. Quelle est la densité de X ?

Exercice 3. Calculer à l'aide de la fonction génératrice l'espérance et la variance de la loi géométrique de paramètre p et de la loi de Poisson de paramètre λ .

Exercice 4. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} et admettant la même fonction génératrice. Montrer que X et Y ont même loi.

Exercice 5. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} et indépendantes. Montrer que la fonction génératrice de la variable $X + Y$ est le produit des fonctions génératrices de X et Y .

Exercice 6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\gamma > 0$. Déterminer, en calculant sa fonction génératrice, la loi de $X + Y$.

Exercice 7. On dit que X_n suit une loi uniforme discrète sur $\{1, \dots, n\}$ et on note $X_n \sim U[1..n]$ si et seulement si pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$ on a $P(X = k) = 1/n$. Déterminer les fonctions génératrices de X_n et $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ respectivement.

Exercice 8. Montrer, en utilisant les fonctions génératrices, que la somme de n variables aléatoires, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre p , suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

Exercice 9. Soit n fixé, et $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes de paramètre $p_n = \lambda/n$; $X_i = 1$ modélise le fait que le i -ème assuré subit un sinistre. Le nombre d'assurés subissant un sinistre est donc $Y_n = X_1 + \dots + X_n$. On suppose que les X_i sont indépendants; le fait que p_n est petit avec n modélise le fait que le risque de sinistre pour chaque assuré est petit devant le nombre d'assurés, λ représentant le "nombre d'assurés sinistrés espéré".

- Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ . Calculer la fonction génératrice de Z .
- Calculer la fonction génératrice de X_i .
- Calculer la fonction génératrice de Y_n .
- Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la fonction génératrice de Y_n . On rappelle que $\ln(1 + u) = u(1 + \epsilon(u))$, où $\lim_{u \rightarrow 0} \epsilon(u) = 0$. Conclusion ?

Exercice 10. Soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ et $(X_i)_{i \geq 0}$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre p . Les $(X_i)_{i \geq 0}$ forment une famille indépendante, également indépendante de N . Montrer que

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

est une variable de Poisson de paramètre $p\lambda$.

Exercice 11. (*La ruine du joueur*) Un joueur va au casino avec une fortune $a \in \mathbb{N}$. A chaque partie, il peut gagner 1 euro avec une probabilité p et perdre 1 euro avec une probabilité $q = 1 - p$. Le but du joueur est alors de jouer jusqu'à l'obtention de la fortune $c \geq a$, $c \in \mathbb{N}$ mais il doit s'arrêter s'il est ruiné. On note $s_c(a)$ sa probabilité de succès (atteindre c avant la ruine).

- Calculer $s_c(0)$ et $s_c(c)$
- Montrer, pour $a > 0$, en raisonnant sur ce qui s'est passé au premier coup, la relation

$$s_c(a) = ps_c(a + 1) + qs_c(a - 1)$$

- Déduire la valeur de $s_c(a)$ suivant que $p = 0,5$ ou $p \neq 0,5$.
- Application numérique : Calculer la valeur précédente avec $a = 900$; $c = 1000$; $a = 100$; $c = 20000$ dans les cas $p = 0.5$ et $p = 18/38$.

Exercice 12. (*Somme aléatoire*) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. iid à valeurs dans \mathbb{N} et T une variable aléatoire, à valeurs dans \mathbb{N} , et indépendantes des $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $S(w) = S_{T(w)}(w)$.

- Montrer que les fonctions génératrices de S, T et X_1 sont liées par la relation $g_S = g_T \circ g_{X_1}$.
- Montrer que si X_1 et T sont intégrables, alors $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[X]$.
- On prend pour les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des v.a. iid de loi de Bernoulli de paramètre p , et pour T une loi de Poisson de paramètre λ . Quelle est la loi de S ?