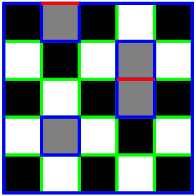
Lignes de fracture dans les pavages par dominos

Quentin VERMANDE

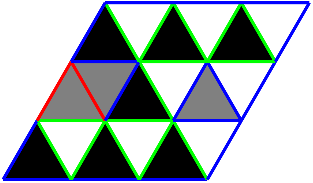
8 juin 2019

$G = (X, A)$: graphe planaire non orienté 2-coloriable ($X \subset \mathbb{R}^2$)
Chaque cellule a n_c côtés. Cellules interdites
Une arête est dite :

- valide si elle délimite deux cellules non interdites
- invalide si elle délimite deux cellules interdites
- externe sinon



Exemple de domaine dans une grille carrée

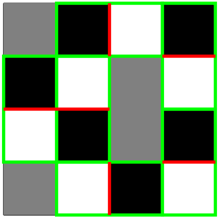


Exemple de domaine dans une grille triangulaire

R : domaine de G (réunion des cellules de G)
∂R : est la frontière de R

Définition (pavage)

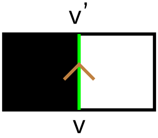
Un pavage P de G est sous-ensemble de A tel que pour toute cellule non interdite c de G, toute les arêtes qui délimitent c sont dans P sauf exactement une, on appelle tuile de P toute cellule de (X, P).



Exemple de pavage dans un domaine d'une grille carrée

Si C est un cycle, $Des(C) = N - B$

spin : $sp : A \to \{-1, 1\}$

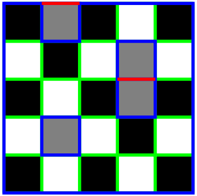


$$sp(v, v') = 1; sp(v', v) = -1$$

équilibre : $eq : A \to \mathbb{Z}$ telle que :

- $\forall (v, v') \in A, eq(v, v') = -eq(v', v)$
- si C est un cycle : $Des(C) = eq(C) + sp(C)$.

différence de hauteur : si C est un chemin, $\Delta h(C) = sp(C) + eq(C)$



$v_0 \in X$

Un chemin est valide dans un pavage s'il ne coupe aucune tuile.

Lemme

Soit P un pavage. Si C est un cycle valide dans P alors $\Delta h(C) = 0$

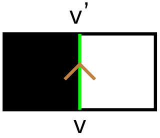
Définition (fonction de hauteur)

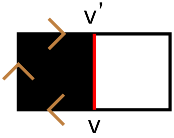
Soient P un pavage et pour $v \in X, C(v)$ un chemin valide dans P allant de v_0 à v.

$$h_P : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ v & \longmapsto & \Delta h(C(v)) \end{array}$$

Proposition

Soient P un pavage et $(v, v') \in A$ *positive :*
$h_P(v') - h_P(v) - eq(v, v') \in \{1 - n_c, 1\}$





Théorème

Les fonctions de hauteur sont exactement les fonctions vérifiant le proposition 1 et prenant la valeur 0 en v_0
Les pavages sont en bijection avec les fonctions de hauteur.

Définition (ordre sur l'ensemble des pavages)

Soient P_1, P_2 *deux pavages* $P_1 \preceq P_2 \Leftrightarrow h_{P_1} \leq h_{P_2}$.

Lemme

Soient P_1 *et* P_2 *deux pavages :* $\forall v \in X, n_c \mid h_{P_1}(v) - h_{P_2}(v)$

Théorème (min et max de fonctions de hauteur)

Soient P_1 *et* P_2 *deux pavages de* G. *Alors* $min(\{h_{P_1}, h_{P_2}\})$ *et* $max(\{h_{P_1}, h_{P_2}\})$ *sont des fonctions de hauteur.*

$h_{max} = h_P$ où P est le pavage maximal
$h_{min} = h_P$ où P est le pavage minimal

$h_{P,s}, s \in X$

Définition

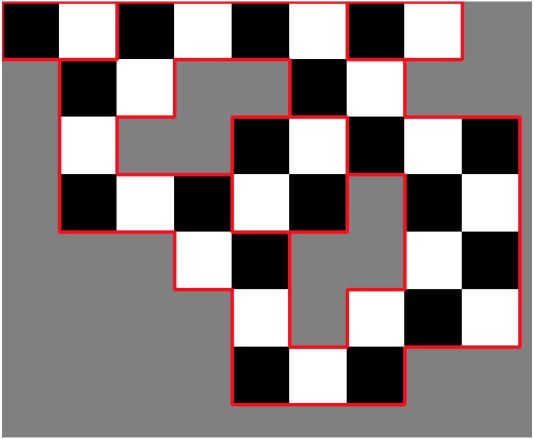
ligne de fracture : chemin valide dans tout pavage

Définition

Soient $s, x \in X$.
x est solide relativement à $s \Leftrightarrow h_{min,s}(x) = h_{max,s}(x)$

Proposition

Les relations "être sur une même ligne de fracture" et "être solide relativement à" sont des relations d'équivalence identiques.



Définition (zone de fracture)

Soit D un sous-domaine de G. D est une zone de fracture si et seulement si :

- *D a un point dans son intérieur*
- *∂D est une ligne de fracture*
- *D ne contient aucune autre ligne de fracture cyclique que sa frontière*

Théorème (de fracture)

Les zones de fracture de G sont d'intérieurs disjoints.
Le treillis de pavages de G est le produit des treillis des zones de fracture.

Merci de votre attention !

sous-domaine : réunion pavable de cellules
sous-domaine prometteur : sous-domaine dont aucun point de l'intérieur n'est sur une ligne de fracture cyclique
union fertile : union de sous-domaines prometteurs qui reste un sous-domaine prometteur
zone fertile : sous-domaine prometteur maximal pour l'union fertile

Proposition

Un sous-domaine prometteur de G est fertile si et seulement si sa frontière est formée de lignes de fracture.

$c(equilibrage) = \bigcirc(|X| + |trous|\sqrt{|X|})$.
$c(pavageCarreMin) = \bigcirc(|X|^2)$.
$c(dispFractures) = \bigcirc(|X|)$.
En admettant la conjecture 1, coût total en $\bigcirc(|amasTrous||X|^2)$ (à cause des pavages), sinon en $\bigcirc(|X|^3)$.