Minimum number of edges in k-critical digraphs on n vertices

Soutenance de stage de M2

Quentin VERMANDE

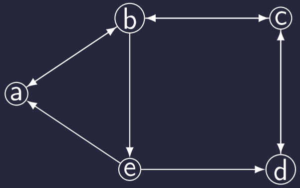
01 septembre 2022

1. Théorie des digraphes

2. Résultats

3. Preuves

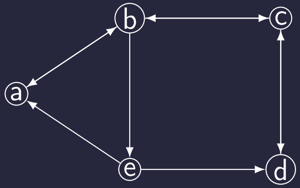
Théorie des digraphes



$$G = (V(G), A(G))$$

Digraphes

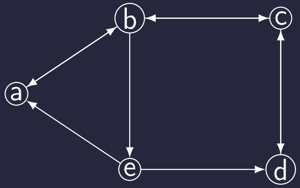
$$a \in V(G)$$



$$G = (V(G), A(G))$$

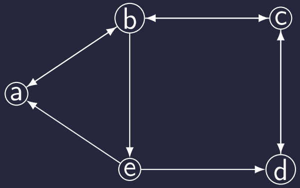
Digraphes

$a \in V(G)$
$ea \in A(G)$



$G = (V(G), A(G))$

Digraphes



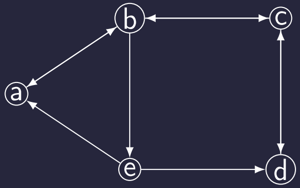
$$G = (V(G), A(G))$$

$a \in V(G)$

$ea \in A(G)$

$e \in N(a)$

Digraphes



$$G = (V(G), A(G))$$

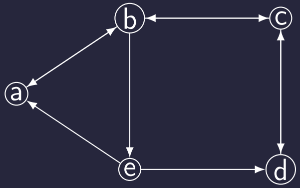
$a \in V(G)$

$ea \in A(G)$

$e \in N(a)$

$d \in N^s(e)$

Digraphes



$$G = (V(G), A(G))$$

$a \in V(G)$

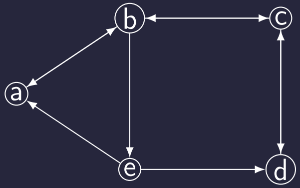
$ea \in A(G)$

$e \in N(a)$

$d \in N^s(e)$

$c \in N^d(d)$

Digraphes



$G = (V(G), A(G))$

$a \in V(G)$

$ea \in A(G)$

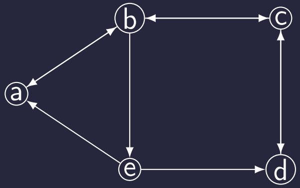
$e \in N(a)$

$d \in N^s(e)$

$c \in N^d(d)$

$e, c \in N^-(d)$

Digraphes



$$G = (V(G), A(G))$$

$a \in V(G)$

$ea \in A(G)$

$e \in N(a)$

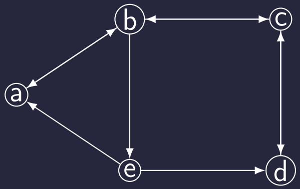
$d \in N^s(e)$

$c \in N^d(d)$

$e, c \in N^-(d)$

$a \in N^+(e)$

Digraphes



$G = (V(G), A(G))$

$a \in V(G)$

$ea \in A(G)$

$e \in N(a)$

$d \in N^s(e)$

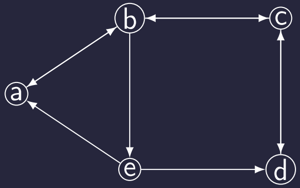
$c \in N^d(d)$

$e, c \in N^-(d)$

$a \in N^+(e)$

$d^+(e) = 2$

Digraphes



$G = (V(G), A(G))$

$a \in V(G)$

$ea \in A(G)$

$e \in N(a)$

$d \in N^s(e)$

$c \in N^d(d)$

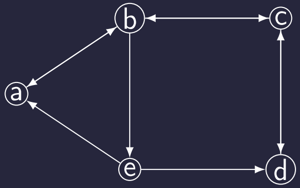
$e, c \in N^-(d)$

$a \in N^+(e)$

$d^+(e) = 2$

$eabcd \subseteq G$

Digraphes



$G = (V(G), A(G))$

$a \in V(G)$

$ea \in A(G)$

$e \in N(a)$

$d \in N^s(e)$

$c \in N^d(d)$

$e, c \in N^-(d)$

$a \in N^+(e)$

$d^+(e) = 2$

$eabcd \subseteq G$

$abea \subseteq G$

Dicoloration

Graphes : coloration $=$ partition en indépendants
$\chi(G) =$ taille minimale d'une coloration
critique $= H < G \Rightarrow \chi(H) < \chi(G)$

Dicoloration

Graphes : coloration = partition en indépendants
$\chi(G)$ = taille minimale d'une coloration
critique = $H < G \Rightarrow \chi(H) < \chi(G)$

Digraphes : dicoloration = partition en indépendants
$\vec{\chi}(G)$ = taille minimale d'une dicoloration
dicritique = $H < G \Rightarrow \vec{\chi}(H) < \vec{\chi}(G)$

Dicoloration

Graphes : coloration = partition en indépendants

$\chi(G)$ = taille minimale d'une coloration

critique = $H < G \Rightarrow \chi(H) < \chi(G)$

Digraphes : dicoloration = partition en acycliques (Neumann-Lara, 1982)

$\vec{\chi}(G)$ = taille minimale d'une dicoloration

dicritique = $H < G \Rightarrow \vec{\chi}(H) < \vec{\chi}(G)$

G symmétrique $\Rightarrow \vec{\chi}(G) = \chi(\overset{\leftrightarrow}{G})$.

Quel est le nombre minimal d'arcs dans un digraphe k-dicritique à n sommets ?

Résultats

Degré minimal

Lemme

G graphe k-critique $\Rightarrow \delta(G) \geq k-1$.

Corollaire

G graphe k-critique $\Rightarrow$

$$2|E(G)| \geq (k-1)|V(G)|$$

Degré minimal

Lemme

G graphe k-critique $\Rightarrow \delta(G) \geq k - 1$.

Corollaire

G graphe k-critique $\Rightarrow$

$$2|E(G)| \geq (k-1)|V(G)|$$

Lemme

G digraphe k-dicritique $\Rightarrow \delta_{min}(G) \geq k - 1$.

Corollaire

G digraphe k-dicritique $\Rightarrow$

$$|A(G)| \geq (k-1)|V(G)|$$

Théorème de Brooks

Théorème (Brooks, 1941)

G graphe connexe $\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, avec égalité si et seulement si G est un cycle impair ou un graphe complet.

Théorème (Brooks, 1941)

G graphe connexe $\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, avec égalité si et seulement si G est un cycle impair ou un graphe complet.

Théorème (Mohar, 2010)

G digraphe connexe $\Rightarrow \vec{\chi}(G) \leq \Delta_{max}(G) + 1$, avec égalité si et seulement si G est un cycle dirigé, un cycle symmétrique impair, ou un graphe complet.

Théorème de Dirac

Théorème (Dirac, 1957)

$k \geq 4$, G graphe k-critique, $G \neq K_k \Rightarrow$

$$2|E(G)| \geq (k-1)|V(G)| + k - 3$$

Théorème de Dirac

Théorème (Dirac, 1957)

$k \geq 4$, G graphe k-critique, $G \neq K_k \Rightarrow$

$$2|E(G)| \geq (k-1)|V(G)| + k - 3$$

Théorème (Aboulker, Vermande, 2022)

$k \geq 4$, G digraphe k-dicritique, $G \neq \overleftrightarrow{K}_k \Rightarrow$

$$|A(G)| \geq (k-1)|V(G)| + k - 3$$

Raffinement du théorème de Dirac

Théorème (Dirac, 1974)

$k \geq 4$, G graphe k-critique, $G \neq K_k$, $G \notin \mathcal{D}_k \Rightarrow$

$$2|E(G)| \geq (k-1)|V(G)| + k - 1 - \delta_{k,4}$$

Raffinement du théorème de Dirac

Théorème (Dirac, 1974)

$k \geq 4$, G *graphe* k*-critique*, $G \neq K_k$, $G \notin \mathcal{D}_k \Rightarrow$

$$2|E(G)| \geq (k-1)|V(G)| + k - 1 - \delta_{k,4}$$

Théorème (Aboulker, Vermande, 2022)

$k \geq 4$, G *digraphe* k*-dicritique*, $G \neq \overleftrightarrow{K}_k \Rightarrow$

$$|A(G)| \geq (k-1)|V(G)| + k - 2$$

Raffinement du théorème de Dirac

Théorème (Dirac, 1974)

$k \geq 4$, G graphe k-critique, $G \neq K_k$, $G \notin \mathcal{D}_k \Rightarrow$

$$2|E(G)| \geq (k-1)|V(G)| + k - 1 - \delta_{k,4}$$

Théorème (Aboulker, Vermande, 2022)

$k \geq 4$, G digraphe k-dicritique, $G \neq \overleftrightarrow{K}_k \Rightarrow$

$$|A(G)| \geq (k-1)|V(G)| + k - 2$$

Théorème (Aboulker, Vermande, 2022)

G digraphe 3-dicritique, G n'est pas un cycle symétrique impair, $G \notin \mathcal{D}_3 \Rightarrow$

$$|A(G)| \geq 2|V(G)| + 2$$

Théorème de Kostochka-Yancey

Théorème (Kostochka, Yancey, 2014)

$k \geq 4$, G graphe k-critique, $G \neq K_k \Rightarrow$

$$|E(G)| \geq \left\lceil \frac{(k+1)(k-2)|V(G)| - k(k-3)}{2(k-1)} \right\rceil$$

Théorème de Kostochka-Yancey

Théorème (Kostochka, Yancey, 2014)

$k \geq 4$, G graphe k-critique, $G \neq K_k \Rightarrow$

$$|E(G)| \geq \left\lceil \frac{(k+1)(k-2)|V(G)| - k(k-3)}{2(k-1)} \right\rceil$$

Théorème (Aboulker, Vermande, 2022)

$k \geq 4$, G digraphe k-dicritique, $G \neq \overleftrightarrow{K}_k \Rightarrow$

$$|A(G)| \geq (k - \frac{1}{2} - \frac{1}{k-1})|V(G)| - k(\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1})$$

List-coloration

Théorème (Harutyunyan, Mohar, 2011)

G graphe connexe, L assignation de couleurs,
$\forall v, |L(v)| \geq d_{max}(v)$, $\neg$ G L-dicolorable $\Rightarrow \forall v, d^+(v) = d^-(v)$ et tous les blocs de G sont des cycles, des cycles symmétriques impairs, ou des digraphes complets.

List-coloration

Théorème (Harutyunyan, Mohar, 2011)

G graphe connexe, L assignation de couleurs, $\forall v, |L(v)| \geq d_{max}(v)$, $\neg$ G L-dicolorable $\Rightarrow \forall v, d^+(v) = d^-(v)$ et tous les blocs de G sont des cycles, des cycles symmétriques impairs, ou des digraphes complets.

Théorème (Aboulker, Vermande, 2022)

G digraphe connexe, $X \subseteq V(G)$ connexe, L assignation de couleurs, $\forall v \in X, |L(v)| \geq d_{max}(v)$, $G - X$ L-dicolorable, $\neg$ G L-dicolorable $\Rightarrow G[X]$ est une fôret de Gallai.

Théorème de Stiebitz

Théorème (Stiebitz, 1982)

G graphe critique $\Rightarrow |\pi_0(G - S)| \leq |\pi_0(G[S])|$.

Théorème (Stiebitz, 1982)

G graphe critique $\Rightarrow |\pi_0(G - S)| \leq |\pi_0(G[S])|$.

Théorème (Aboulker, Vermande, 2022)

$k \geq 3$, *G digraphe $k-$dicritique* $\Rightarrow |\pi_0(G - S)| \leq |\pi_0(G[S])|$.

Preuves

Merci de votre attention.