TD6

Exercice 1.

Soit $n \geq 5$ un entier. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments, et $\mathfrak{A}_n$ le noyau de la signature.

1. Démontrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles, et les 3-cycles sont deux à deux conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.
2. Soit σ un élément non trivial de $\mathfrak{A}_n$, possédant k points fixes, qui n'est pas un 3-cycle. Démontrer qu'il existe un 3-cycle τ, tel que $[\tau, \sigma] = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$ soit non trivial et possède au moins $k+1$ points fixes. On pourra distinguer à cet effet les trois cas suivants :
   (a) σ est un cycle,
   (b) la décomposition de σ en cycles disjoints est formée d'au moins deux cycles, dont l'un n'est pas une transposition,
   (c) σ est un produit de transpositions à supports disjoints.
3. En déduire que tout sous-groupe distingué non trivial de $\mathcal{A}_n$ contient un 3-cycle, puis que $\mathcal{A}_n$ est simple.
4. Décrire les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 2.

Démontrer qu'un groupe résoluble de type fini est fini si et seulement si chacun de ses éléments est d'ordre fini.

Exercice 3.

Soit G un groupe. On définit $C^0(G) = G$ et $C^n(G) = [G, C^{n-1}(G)]$ pour $n \geq 1$. On suppose que G est nilpotent de classe n, c'est-à-dire que $C^n(G)$ est trivial, et que n est le plus petit entier satisfaisant cette propriété.

1. Démontrer que si $n \neq 1$, alors $G/C^{n-1}(G)$ est nilpotent de classe $n-1$.
2. Soit X une partie génératrice de G et $r \geq 1$ un entier tels que $x^r = 1$ pour tout $x \in X$. Si $n \geq 1$, démontrer que $y^r = 1$ pour tout $y \in C^{n-1}(G)$.
3. Soit X une partie de G et $r \geq 1$ un entier tels que $x^r = 1$ pour tout $x \in X$. Démontrer que pour tout élément du sous-groupe engendré par X est d'ordre divisant r^n.
4. En déduire que l'ensemble H des éléments d'ordre fini de G est un sous-groupe de G, nilpotent de classe $\leq n$.

   On suppose à présent que tous les éléments de G sont d'ordre fini.

5. Démontrer que toute partie finie de G engendre un groupe fini. On pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.
6. Soit $x, y \in G$ d'ordres premiers entre eux. Démontrer que x et y commutent. On pourra utiliser le résultat de structure des groupes nilpotents finis vu en cours.
7. Pour p premier, soit G_p l'ensemble des éléments de G dont les éléments sont d'ordre une puissance de p. Démontrer que G est isomorphe au groupe des suites $(g_p)_p \in \prod_p G_p$ telles que $\{p : g_p \neq 1\}$ est fini.

Exercice 4.

Soit G un groupe de type fini. On définit le sous-groupe de Frattini de G (noté $\phi(G)$) comme l'intersection des sous-groupes maximaux de G.

1. Montrer que $\mathbf{Q}$ ne possède pas de sous-groupe maximal.
2. Montrer que G admet au moins un sous-groupe maximal. La preuve est-elle plus simple si G est fini ?
3. Montrer que $\phi(G)$ est distingué dans G et même qu'il est stable par tout automorphisme de G (on dit qu'il est caractéristique). On note $\pi : G \to G/\phi(G)$ la projection canonique.
4. Soit $S \subset G$ une partie de G. Montrer que S engendre G si et seulement si $\pi(S)$ engendre $G/\phi(G)$.
5. Montrer que $\phi(G)$ est exactement l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que pour toute partie $S \subset G$, on a : $\langle S, g\rangle = G \implies \langle S\rangle = G$.
6. Montrer que si G est fini, alors $\phi(G)$ est nilpotent.
7. On suppose G fini. Montrer que si G est nilpotent, alors $D(G) \subset \phi(G)$ (la réciproque est vraie, mais plus difficile).
8. On suppose que G est un p-groupe.
   (a) Montrer que tout sous-groupe maximal de G contient $D(G)$ et le sous-groupe G^p engendré par les puissances p-ièmes dans G.
   (b) Montrer que $G/\phi(G)$ est le plus grand quotient abélien de G d'exposant p.
   (c) Que peut-on en déduire sur le nombre minimal de générateurs de G ?
   (d) Montrer que $\phi(G) = D(G).G^p$.

Exercice 5.

Soit G un groupe libre sur un ensemble S de générateurs, et soit

$$x = s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1,$$

un élément de G écrit sous forme réduite, i.e. $s_i \in S \cup S^{-1}$ et $s_i s_{i+1} \neq 1$ pour tout i.

1. Démontrer qu'il existe un morphisme $f : G \to \mathfrak{S}_{n+1}$ tel que pour tout i, la permutation $f(s_i)$ envoie i sur $i+1$.
2. En déduire que si $x \in G$ est différent de l'élément neutre, alors il existe un morphisme de groupes $f : G \to G'$ avec G' fini, tel que $f(x)$ n'est pas l'élément neutre de G'. On dit que G est *résiduellement fini*.
3. On suppose à présent que S est fini. Démontrer que tout endomorphisme surjectif de G est injectif (si h est un tel endomorphisme, et si $f : G \to G'$ est un morphisme vers un groupe fini, on pourra remarquer que l'application $m \mapsto f \circ h^m$ n'est pas injective). Généraliser ce résultat aux groupes résiduellement finis de type fini.

Remarque : un groupe dont tous les endomorphismes surjectifs sont injectifs est qualifié *d'hopfien*. Cet exercice montre que les groupes libres de type fini sont hopfiens. Il en va de même de tout groupe résiduellement fini de type fini, et en particulier des groupes abéliens libres de type fini.

Exercice 6.

Soit G un groupe de type fini. Pour toute partie génératrice finie A de G, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $B_{G,A}(m)$ l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent comme produits d'au plus m éléments de $A \cup A^{-1}$. On pose $\beta_{G,A}(m) := |B_{G,A}(m)|$. Si β et β' sont deux fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, on notera $\beta \preceq \beta'$ s'il existe $c > 0$ et $a \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout n, $\beta(n) \leq c\beta'(an)$, et $\beta \sim \beta'$ si $\beta \preceq \beta'$ et $\beta' \preceq \beta$.

1. Montrer que $B_{G,A}(m)$ est une boule dans l'espace métrique (G, d), où d est une distance que l'on précisera.
2. Soient A et A' deux parties génératrices finies de G. Montrer que $\beta_{G,A} \sim \beta_{G,A'}$. On notera donc abusivement $\beta_G = \beta_{G,A}$.
3. Calculer β_G si G est un groupe fini, si $G = \mathbb{Z}$, si $G = \mathbb{Z}^n$, si G est le groupe libre à n générateurs (i.e. le groupe des mots finis sur un alphabet de n lettres, avec leurs inverses, pour la loi de concaténation des mots).
4. Montrer que $\beta_G(n) \preceq e^n$.
5. Si G' est un groupe de type fini, calculer $\beta_{G \times G'}$.
6. Montrer que si $H \subset G$ est un sous-groupe de type fini, alors $\beta_H \preceq \beta_G$, et si H est d'indice fini, alors $\beta_H \sim \beta_G$.
7. Soit H un quotient de G. Comparer β_H et β_G.
8. Montrer que si $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors G est de type fini et $\beta_G(n) \sim e^n$.
9. Montrer que si G est nilpotent de classe 2, alors il existe $d \geq 0$ tel que $\beta_G(n) \preceq n^d$.
10. Montrer que si G est nilpotent, alors il existe $d \geq 0$ tel que $\beta_G(n) \preceq n^d$.
11. Montrer que le groupe $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_A \mathbb{Z}$, où le produit semi-direct est défini via la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, est un groupe résoluble tel que $\beta_G(n) \sim e^n$.