

## TD1 : Généralités sur les groupes

### Exercice 1.

1. Soit  $E$  un ensemble. Décrire le quotient de  $E$  par la relation d'égalité, puis le quotient de  $E$  par la relation  $R = E \times E$ .
2. Soit  $E$  un ensemble,  $R$  une relation sur  $E$ , et  $P$  la conjonction d'une ou plusieurs des propriétés suivantes : "réflexive", "symétrique", "transitive". Démontrer qu'il existe une plus petite relation sur  $E$  contenant  $R$  et vérifiant  $P$ . En particulier, il existe une plus petite relation d'équivalence contenant  $R$  : c'est la *relation d'équivalence engendrée* par  $R$ .
3. Soit  $E$  un ensemble et  $\leq$  une relation d'ordre totale sur  $E$ . Identifier le quotient de  $E$  par la relation  $\leq$ .
4. Sur l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs, on définit une relation  $R$  comme suit :  $xRy$  si et seulement s'il existe un nombre premier  $p$  tel que  $y = px$ . Identifier la plus petite relation réflexive et transitive sur  $\mathbb{Z}$  contenant  $R$ , ainsi que la relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$  engendrée par  $R$ . Décrire le quotient de  $\mathbb{Z}$  par la relation  $R$ .

### Exercice 2.

Soit  $E$  un ensemble muni d'une loi de composition, associative, avec élément neutre  $e$ , et telle que tout élément de  $E$  possède un inverse à gauche. Démontrer que tout élément de  $E$  possède un inverse à droite qui coïncide avec son inverse à gauche. En déduire que  $E$  est un groupe.

### Exercice 3.

Soit  $G$  un groupe tel que  $g^2 = e$  pour tout  $g \in G$ . Démontrer que  $G$  est abélien.

### Exercice 4.

Soit  $G$  un groupe et soit  $H$  un sous-ensemble fini non vide de  $G$  stable pour la loi de composition du groupe  $G$ .

1. Démontrer que  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .
2. Trouver un exemple d'un groupe  $G$  et d'un sous-ensemble non vide de  $G$  stable pour la loi de composition du groupe  $G$  qui ne soit pas un sous-groupe de  $G$ .

### Exercice 5.

Démontrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupes surjectif de  $(\mathbf{Q}, +)$  dans  $(\mathbf{Q}_+^*, \times)$ .

### Exercice 6.

Donner la liste de tous les groupes (à isomorphisme près) de cardinal inférieur ou égal à 7.

### Exercice 7.

On dit qu'un groupe  $G$  est d'exposant  $e$  si  $e$  est le plus petit entier  $n \geq 1$  tel que pour tout  $g \in G$ , on a  $g^n = 1$ . Pour quels entiers  $e$  un groupe d'exposant  $e$  est-il nécessairement commutatif ?

### Exercice 8.

1. Démontrer que les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  sont les  $n\mathbb{Z}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Démontrer que les sous-groupes non denses de  $\mathbb{R}$  sont les  $a\mathbb{Z}$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 9.

Soit  $G$  un groupe et soit  $H$  un sous-groupe de  $G$  d'indice 2. Démontrer que  $H$  est distingué dans  $G$ .

### Exercice 10.

Soit  $S$  un sous-ensemble non vide d'un groupe fini  $G$ . Soient  $N(S) := \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\}$  et  $C(S) := \{g \in G \mid \forall s \in S, gsg^{-1} = s\}$  le normalisateur et le centralisateur de  $S$  dans  $G$ . Montrer que :

1.  $N(S) < G$  et  $C(S) \triangleleft N(S)$ .
2.  $N(S) = G$  si et seulement si  $S = \bigcup_{g \in G} gSg^{-1}$ .
3. Si  $H \triangleleft G$ , alors  $C(H) \triangleleft G$ .
4. Si  $H < G$ , alors  $N(H)$  est le plus grand sous-groupe de  $G$  contenant  $H$  et dans lequel  $H$  est distingué.

**Exercice 11.**

Soit  $G$  un groupe et soit  $H \triangleleft G$  un sous-groupe distingué.

1. Décrire les sous-groupes distingués de  $G/H$  en fonction de ceux de  $G$ .
2. Soit  $K$  un sous-groupe de  $G$ .
  - (a) Si  $K$  est distingué dans  $G$  et contient  $H$ , montrer que l'on a un isomorphisme  $(G/H)/(K/H) \cong G/K$ .
  - (b) Démontrer que  $HK$  est un sous-groupe de  $G$  égal à  $KH$ .
  - (c) Démontrer que  $H$  est distingué dans  $HK$ .
  - (d) Démontrer que l'on a un isomorphisme  $K/(K \cap H) \cong (HK)/H$ .

**Exercice 12.**

Soit  $G$  un groupe fini.

1. Démontrer qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $G$  soit (isomorphe à) un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ .
2. Démontrer qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $G$  soit (isomorphe à) un sous-groupe de  $\mathfrak{A}_n$ .
3. Démontrer qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $G$  soit (isomorphe à) un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_n(k)$ , pour tout corps  $k$ .

**Exercice 13.**

Déterminer les classes de conjugaison dans  $\mathfrak{S}_n$ . Et dans  $\mathfrak{A}_n$  ?

**Exercice 14.**

Démontrer que si  $n \geq 2$ ,  $\mathfrak{S}_{n+2}$  a deux sous-groupes non conjugués isomorphes à  $\mathfrak{S}_n$ .

**Exercice 15.**

Soit  $f : G_1 \rightarrow G_2$  un morphisme de groupes et soit  $x$  un élément de  $G_1$  d'ordre fini. Démontrer que l'ordre de  $f(x)$  divise l'ordre de  $x$ .

**Exercice 16.**

Soit  $G$  un groupe. Vrai ou faux ?

1. Si tout sous-groupe  $H$  de  $G$  est distingué dans  $G$ , alors  $G$  est abélien.
2. Si  $H \triangleleft G$  et  $K \triangleleft H$ , alors  $K \triangleleft G$ .
3. Soient  $x$  et  $y \in G$  d'ordre fini. Alors  $xy$  est nécessairement d'ordre fini.
4. Si  $G$  a un nombre fini de sous-groupes, alors  $G$  est fini.

**Exercice 17.**

Soit  $G$  un groupe fini.

1. Démontrer que des éléments conjugués dans  $G$  sont de même ordre.
2. Deux éléments de même ordre dans  $G$  sont-ils toujours conjugués ?
3. Trouver tous les groupes abéliens finis  $G$  pour lesquels la question précédente a une réponse positive. Un exemple non abélien ?

**Exercice 18.**

Soit  $N$  un entier naturel.

1. Démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini (à isomorphisme près) de groupes de cardinal au plus  $N$ .
2. Démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini (à isomorphisme près) de groupes abéliens finis possédant au plus  $N$  automorphismes.
3. Démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini (à isomorphisme près) de groupes finis possédant au plus  $N$  automorphismes.