Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu

TD de Logique, feuille 6

26 et 28 octobre 2022

Les exercices marqués d'une flèche sont à chercher en priorité. Je recommande de les préparer à l'avance. Ceux qu'on aura pu corriger en TD sont à connaître. Les corrections seront concentrées sur ceux-là, mais vous pouvez toujours me demander des précisions concernant les autres exercices. Les questions ou exercices marqués d'une étoile sont plus difficiles.

Pour tous les exercices, on se donne un ensemble infini de variables V.

$\longrightarrow$ **Exercice 1** (Infinitésimaux, *sera corrigé en début de séance*) **:**
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \times, <, f\}$, où f est un symbole de fonction unaire. Soit $\overline{\mathbb{R}}$ la $\mathcal{L}$-structure naturelle, où le symbole f est interprété par F. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$, et soit $\mathcal{R}$ l'ultraproduit $\prod_{n \to \mathcal{U}} \overline{\mathbb{R}}$. On plonge le corps $\mathbb{R}$ dans le corps $\mathcal{R}$, via la fonction $x \mapsto [(x)_{n \in \mathbb{N}}]$.

1. Soit $I = \{a \in \mathcal{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{R} \vDash -1 < n \cdot a < 1\}$. On appelle I l'ensemble des *infinitésimaux*. Montrer que I est un sous-groupe non trivial de $(\mathcal{R}, +)$, et que $\mathbb{R} \cdot I = I$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que F est continue en a si et seulement si, pour tout $e \in I$, on a $f^{\mathcal{R}}(a+e) - f^{\mathcal{R}}(a) \in I$.
3. Soient $a, r \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   a) La fonction F est dérivable en a, de dérivée r.
   b) Pour tout $e \in I \smallsetminus \{0\}$, on a $\frac{f^{\mathcal{R}}(a+e) - f^{\mathcal{R}}(a)}{e} - r \in I$.
   c) On a $\mathcal{R} \vDash (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \neq 0)\left[-\delta < x < \delta \longrightarrow -\varepsilon < \frac{f(a+x) - f(a)}{x} - r < \varepsilon\right]$, où les abréviations usuelles ont été utilisées. (Notamment, on utilise une assignation qui envoie une variable y sur a, et une variable z sur r, pour donner un sens à ce qui est écrit ici.)

Définition (Plongements élémentaires)
Soient S_1, S_2 des $\mathcal{L}$-structures. Un *plongement élémentaire* de S_1 dans S_2 est une application $f : S_1 \to S_2$ telle que, pour toute $\mathcal{L}$-formule φ, pour toute assignation de variables $\alpha : V \to S_1$, on ait $S_1 \vDash \varphi(\alpha)$ si et seulement si $S_2 \vDash \varphi(f \circ \alpha)$.

Définition (Diagrammes élémentaires)
Soit M une $\mathcal{L}$-structure. On note $\mathcal{L}_M$ ou $\mathcal{L}(M)$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathcal{L}$ des symboles de constantes c_a, pour $a \in M$. Alors, M est naturellement une $\mathcal{L}_M$-structure. Le *diagramme élémentaire* de M est la théorie de M comme $\mathcal{L}_M$-structure. On pourra noter $Diag(M) \coloneqq Th_{\mathcal{L}_M}(M)$ ce diagramme élémentaire.

Fait (Méthode des diagrammes)
Soit M une $\mathcal{L}$-structure. Alors, se donner un plongement élémentaire de M dans une $\mathcal{L}$-structure N équivaut à se donner une $\mathcal{L}_M$-structure N_M qui est un modèle de $Diag(M)$.

$\longrightarrow$ **Exercice 2** (Plongements élémentaires) **:**
Soient $\mathcal{L}$ un langage, $(I, <)$ un ensemble totalement ordonné non vide, $(S_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures. Soit $(f_{i,j} : S_i \to S_j)_{i<j}$ une famille *cohérente* de plongements élémentaires, i.e. $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ pour tous $i < j < k$. En utilisant la méthode des diagrammes, montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-structure S et une famille $(g_i : S_i \to S)_{i \in I}$ de plongements élémentaires telle que, pour tous $i < j$, on ait $g_j \circ f_{i,j} = g_i$.

Exercice 3 (Relation d'équivalence) **:**
On travaille dans le langage $\mathcal{L} = \{E\}$ où E est une relation binaire. On considère la théorie T qui dit que E est une relation d'équivalence, qu'il y a une infinité de classes d'équivalence, et que toutes ces classes sont infinies.

1. Vérifier que T est bien définie (i.e., les propriétés indiquées sont exprimables au premier ordre).

2. Montrer que deux modèles dénombrables de T sont isomorphes. En déduire que T est complète.

3. (*Utilise de l'arithmétique cardinale*) Combien T admet-elle de modèles de cardinalité $\aleph_1$ à isomorphisme près ?

Exercice 4 (Non équivalence élémentaire) **:**

1. Montrer que si $m \neq n$, alors les groupes $(\mathbb{Z}^m, 0, +, -)$ et $(\mathbb{Z}^n, 0, +, -)$ ne sont pas élémentairement équivalents, i.e. $Th(\mathbb{Z}^m, 0, +, -) \neq Th(\mathbb{Z}^n, 0, +, -)$.

2. $(*)$ Si K est un corps, on note $B_n(K) \leqslant GL_n(K)$ le sous-groupe constitué des matrices triangulaires supérieures inversibles. Montrer que $(B_2(\mathbb{R}), \cdot)$ et $(B_2(\mathbb{C}), \cdot)$ ne sont pas élémentairement équivalents.

Exercice 5 (Modèles de la théorie de $\mathbb{R}$) **:**
Soit RCF la théorie de $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$. Notons $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$.

1. Montrer qu'il existe un modèle M de RCF qui est en bijection avec $2^{\mathbb{N}}$, mais qui n'est pas isomorphe à $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$.

   En fait, on peut montrer qu'il y a $2^{(2^{\mathbb{N}})}$ *modèles de* RCF *de cardinal* $2^{\mathbb{N}}$ *à isomorphisme près.*

2. On rappelle, ou on admet provisoirement, que toute théorie cohérente dans un langage dénombrable a un modèle fini ou dénombrable. On veut montrer qu'il existe une famille $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de modèles dénombrables de RCF, deux à deux non isomorphes. Soit M un modèle de RCF.

   a) Montrer que le corps $\mathbb{Q}$ se plonge de manière unique dans M. Pour $a \in M$, montrer que $r(a) := sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x <^M a\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (où le sup de l'ensemble vide est, par convention, $-\infty$) est bien défini.

   b) Vérifier que l'ensemble $r(M) = \{r(a) \mid a \in M\}$ est invariant par isomorphismes. Autrement dit, montrer que, si N est isomorphe à M comme $\mathcal{L}$-structure, alors $r(N) = r(M)$.

   c) $(*)$ Conclure qu'il existe une famille $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de modèles dénombrables de RCF, deux à deux non isomorphes. On pourra chercher à rendre la suite des $r(M_i)$ strictement croissante pour l'inclusion.

   En fait, on peut montrer qu'il y a $2^{\mathbb{N}}$ *modèles de* RCF *de cardinal* $\mathbb{N}$ *à isomorphisme près. Par ailleurs, l'invariant* $r(M)$ *est un cas particulier d'une famille plus générale d'invariants.*