Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu

TD de Logique, feuille 5 (Compacité, ultraproduits)

19 et 21 octobre 2022

Les exercices marqués d'une flèche sont à chercher en priorité. Je recommande de les préparer à l'avance. Ceux qu'on aura pu corriger en TD sont à connaître. Les corrections seront concentrées sur ceux-là, mais vous pouvez toujours me demander des précisions concernant les autres exercices. Les questions ou exercices marqués d'une étoile sont plus difficiles.

$\longrightarrow$ **Exercice 1** (Propriétés axiomatisables) **:**
Parmi les classes de structures suivantes, déterminer celles qui sont finiment axiomatisables (i.e. avec un nombre fini d'axiomes), axiomatisables (mais pas finiment), ou non axiomatisables :

1. Les ensembles infinis (dans le langage de l'égalité),
2. Les ensembles finis,
3. Les graphes connexes (dans le langage avec une relation binaire),
4. Les corps de caractéristique nulle (dans le langage des anneaux),
5. Les corps de caractéristique non nulle (dans le langage des anneaux),
6. Les ensembles bien ordonnés (dans le langage des ordres).

$\longrightarrow$ **Exercice 2** (Infinitésimaux) **:**
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \times, <, f\}$, où f est un symbole de fonction unaire. Soit $\overline{\mathbb{R}}$ la $\mathcal{L}$-structure naturelle, où le symbole f est interprété par F. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$, et soit $\mathcal{R}$ l'ultraproduit $\prod_{n \to \mathcal{U}} \overline{\mathbb{R}}$. On plonge le corps $\mathbb{R}$ dans le corps $\mathcal{R}$, via la fonction $x \mapsto [(x)_{n \in \mathbb{N}}]$.

1. Soit $I = \{a \in \mathcal{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{R} \models -1 < n \cdot a < 1\}$. On appelle I l'ensemble des *infinitésimaux*. Montrer que I est un sous-groupe non trivial de $(\mathcal{R}, +)$, et que $\mathbb{R} \cdot I = I$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que F est continue en a si et seulement si, pour tout $e \in I$, on a $f^{\mathcal{R}}(a+e) - f^{\mathcal{R}}(a) \in I$.
3. Soient $a, r \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   a) La fonction F est dérivable en a, de dérivée r.
   b) Pour tout $e \in I \setminus \{0\}$, on a $\frac{f^{\mathcal{R}}(a+e) - f^{\mathcal{R}}(a)}{e} - r \in I$.
   c) On a $\mathcal{R} \models (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \neq 0)\left[-\delta < x < \delta \longrightarrow -\varepsilon < \frac{f(a+x) - f(a)}{x} - r < \varepsilon\right]$, où les abréviations usuelles ont été utilisées.

Exercice 3 (Ultraproduits) **:**
Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}$-structures (non vides). Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$. Soit $S \coloneqq \prod_{n \to \mathcal{U}} S_n$ l'ultraproduit des S_n.

1. On suppose que les S_n sont infinies dénombrables. Montrer que (l'ensemble sous-jacent à) l'ultraproduit $S = \prod_{n \to \mathcal{U}} S_n$ est en bijection avec $2^{\mathbb{N}}$. On pourra utiliser l'unicité de la décomposition en base 2, pour construire une injection $2^{\mathbb{N}} \hookrightarrow S$.
2. On suppose que les S_n sont finies. La structure S est-elle finie ? Si non, peut-on calculer son cardinal ? Dans la cas où S est infinie, on pourra s'inspirer de la question précédente.

3. Soit $\Sigma(x)$ une collection finie ou dénombrable de $\mathcal{L}$-formules en la variable x. On suppose que, pour tout conjonction finie $\varphi(x)$ de formules de Σ, on a $S \models \exists x\, \varphi(x)$. Montrer qu'il existe $a \in S$ tel que $S \models \varphi[a]$.

   Indication : on pourra chercher à faire une construction diagonale, en choisissant des éléments pour chaque coordonnée.

Exercice 4 (Modèles non standard de l'arithmétique) **:**
Soit $\mathcal{L}_{\text{ar}} = \{0, s, +, -, \times, 1, <\}$ et notons $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, s, +, \times, 1, <)$ où les symboles ont leurs interprétations standard (s est la fonction successeur). On note $\overline{n} = s^n(0)$, et $T = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

1. Montrer qu'il existe $\mathcal{M} \models T$ et $a \in M$ tel que $a > \overline{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'on peut de plus supposer ce a divisible par $\overline{n}$, pour tout $n \geqslant 1$.

2. Soit $\varphi[x]$ une formule telle que $\mathcal{M} \models \varphi[\overline{n}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $a \in M$, $\mathcal{M} \models \varphi[a]$.

3. En déduire que $\{\overline{n} : n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas définissable dans $\mathcal{M}$.

Exercice 5 (Groupes pseudo-finis) **:**
Soient $(G_i)_{i \in I}$ des groupes finis, que l'on étudie dans le langage $\{\times, 1, .^{-1}\}$. On note $T_0 = \{\text{énoncés } \varphi : \forall i\ G_i \models \varphi\}$.

1. Supposons que T_0 admette des modèles infinis, donner une axiomatisation T des modèles de T_0 qui sont infinis. Montrer que ce sont des groupes.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les G_i pour que T_0 admette des modèles infinis.

3. Montrer qu'un énoncé φ est conséquence de T si et seulement s'il existe n tel que φ soit vrai dans tous les G_i de cardinal plus grand que n.