

TD de Logique, feuille 3

5 et 7 octobre 2022

Les exercices marqués d'une flèche sont à chercher en priorité. Je recommande de les préparer à l'avance. Ceux qu'on aura pu corriger en TD sont à connaître. Les corrections seront concentrées sur ceux-là, mais vous pouvez toujours me demander des précisions concernant les autres exercices. Les questions ou exercices marqués d'une étoile sont plus difficiles.

Fait : Tout idéal propre d'un anneau commutatif unitaire est contenu dans un idéal maximal, et tout idéal maximal est premier.

→ **Exercice 1** (Spectre d'un anneau de Boole (feuille 2 + question 7)) :

Cet exercice donne une autre présentation de l'espace de Stone associé à un anneau de Boole.

Soit \mathbb{A} un anneau de Boole. On note $\text{Spec } \mathbb{A}$ l'ensemble des idéaux premiers de \mathbb{A} . Pour $a \in \mathbb{A}$, soit $D(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{A} \mid a \notin \mathfrak{p}\}$, et $V(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{A} \mid a \in \mathfrak{p}\}$. Plus généralement, si $B \subseteq \mathbb{A}$, soit $V(B) = \bigcap_{a \in B} V(a)$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{A}$. Montrer que $D(ab) = D(a) \cap D(b)$, que $V(ab) = V(a) \cup V(b)$, et que $D(a) = V(1+a)$.
2. Vérifier que la collection des $D(a)$, pour $a \in \mathbb{A}$, forme une base d'ouverts pour une topologie. On appelle cette topologie sur $\text{Spec } \mathbb{A}$ la *topologie de Zariski*. L'espace obtenu est appelé le *spectre* de \mathbb{A} , et dans notre cas, on dira aussi que c'est *l'espace de Stone* associé à l'anneau de Boole \mathbb{A} .
3. Montrer que $\text{Spec } \mathbb{A}$ est séparé, et que les $D(a)$ sont ouverts-fermés.
4. Soit $B \subseteq \mathbb{A}$, et I l'idéal engendré par B . Montrer que $V(B) = \emptyset$ si et seulement si $V(I) = \emptyset$, si et seulement si $1 \in I$. On pourra utiliser le Fait.

En déduire que l'espace topologique $\text{Spec } \mathbb{A}$ est compact, et a une base d'ouverts constituée d'ouverts-fermés. Un espace ayant ces propriétés est appelé *espace de Stone*, ou *espace profini*.

5. Soit $X \subseteq \text{Spec } \mathbb{A}$ un ouvert-fermé. Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{A}$ tel que $D(a) = X$.
6. Soit $OF(\text{Spec } \mathbb{A})$ l'ensemble des ouverts-fermés de $\text{Spec } \mathbb{A}$. Montrer que la fonction $a \mapsto D(a)$ définit un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{A} \simeq (OF(\text{Spec } \mathbb{A}), \Delta, \cap)$, où Δ désigne la différence symétrique. On pourra utiliser la question 5 de l'exercice 2 du TD 2 pour calculer $D(a+b)$.
7. (*) Soit X un espace topologique profini (i.e. compact avec une base d'ouverts constituée d'ouverts-fermés). Soit $\mathbb{A} = (OF(X), \Delta, \cap)$ l'anneau de Boole des ouverts-fermés de X . Trouver un homéomorphisme $\text{Spec } \mathbb{A} \simeq X$. On pourra montrer que, pour $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{A}$, l'ensemble $\mathcal{F} = \{U \in OF(X) \mid U^c \in \mathfrak{p}\}$ est clos par intersections finies, puis que l'intersection $\bigcap_{U \in \mathcal{F}} U$ est un singleton.

→ **Exercice 2** (Quelques plongements (feuille 2)) :

1. Soit \mathbb{A} un anneau de Boole. Montrer qu'il existe un ensemble I et un morphisme d'anneaux injectif $\mathbb{A} \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$.

Indication : on pourra chercher à voir les éléments de \mathbb{A} comme des fonctions définies sur $\text{Spec } \mathbb{A}$, en décrétant que $a(\mathfrak{p}) = \mathbf{1}_{a \notin \mathfrak{p}}$, pour $a \in \mathbb{A}$ et $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{A}$.

2. Soit X un espace de Stone. Montrer qu'il existe un ensemble I et une injection continue ouverte sur son image $X \rightarrow 2^I$, où $2^I = \{0, 1\}^I$ est muni de la topologie produit, qui en fait un espace de Stone.

Indication : On pourra chercher à identifier un élément $x \in X$ à l'ensemble des ouverts-fermés auxquels il appartient.

Exercice 3 (Plus de dualité de Stone) :

1. Soient X, Y des espaces de Stone, et $f : OF(X) \rightarrow OF(Y)$ un morphisme d'anneaux. Montrer qu'il existe une unique fonction continue $F : Y \rightarrow X$ telle que $f = F^{-1}$, i.e., pour tout ouvert-fermé $O \subseteq X$, on a $f(O) = F^{-1}(O)$.
2. Soient \mathbb{A}, \mathbb{B} des anneaux de Boole, et $F : Spec \mathbb{A} \rightarrow Spec \mathbb{B}$ une application continue. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ tel que $F = f^{-1}$, i.e., pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in Spec \mathbb{A}$, on a $F(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p})$.

Exercice 4 (Correspondance entre filtres et idéaux propres (feuille 2)) :

Soit \mathbb{A} un anneau de Boole. Un *filtre* sur \mathbb{A} est un ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{A}$ ayant les propriétés suivantes :

- On a $1 \in \mathcal{F}$, et $0 \notin \mathcal{F}$.
- Pour tous $a, b \in \mathcal{F}$, on a $a \cdot b \in \mathcal{F}$.
- Pour tout $a \in \mathcal{F}$, pour tout $b \in \mathbb{A}$, si $a \leq b$, alors $b \in \mathcal{F}$.

Un *ultrafiltre* sur \mathbb{A} est un filtre maximal pour l'inclusion.

1. Soit I un idéal propre de \mathbb{A} . Soit $\mathcal{F}(I) := \{1 + x \mid x \in I\}$. Montrer que $\mathcal{F}(I)$ est un filtre.
2. Donner une bijection, croissante pour l'inclusion, entre filtres et idéaux propres. En déduire une bijection entre ultrafiltres et idéaux maximaux.
3. Soit $C \subseteq \mathbb{A}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que C soit inclus dans un idéal propre de \mathbb{A} . En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que C soit inclus dans un filtre sur \mathbb{A} .
4. Soit \mathcal{F} un filtre sur \mathbb{A} . Montrer que \mathcal{F} est un ultrafiltre si et seulement si, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$ tels que $a \vee b \in \mathcal{F}$, on a $a \in \mathcal{F}$ ou $b \in \mathcal{F}$.

Exercice 5 (Produits d'espaces de Stone) :

Soient X, Y des espaces de Stone. Notons $\mathbb{A} = OF(X)$ et $\mathbb{B} = OF(Y)$ les anneaux de Boole de X et Y , et $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ l'anneau de Boole $OF(X \times Y)$.

1. Montrer que l'espace $X \times Y$, pour la topologie produit, est un espace de Stone.
2. Si $U \in \mathbb{A}$ et $V \in \mathbb{B}$, notons $U \otimes V := U \times V \in OF(X \times Y)$. Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{A}$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{B}$.
 - a) Montrer qu'on a $(a_1 + a_2) \otimes b_1 = a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_1$, et $a_1 \otimes (b_1 + b_2) = a_1 \otimes b_1 + a_1 \otimes b_2$.
 - b) Montrer qu'on a $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$.
 - c) Montrer que $\iota_1 : a \in \mathbb{A} \mapsto a \otimes 1 \in \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ et $\iota_2 : b \in \mathbb{B} \mapsto 1 \otimes b \in \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$, sont des morphismes d'anneaux. Montrer qu'ils sont injectifs.
3. Soit O un ouvert-fermé de $X \times Y$. Montrer qu'il existe un entier k , des U_1, \dots, U_k ouverts-fermés de X et V_1, \dots, V_k ouverts-fermés de Y tels que $O = U_1 \times V_1 \Delta \dots \Delta U_k \times V_k$.
Indication : On pourra considérer l'ensemble E des parties de $X \times Y$ de la forme demandée, vérifier que E est clos par combinaisons booléennes, et en déduire que E contient tous les ouvert-fermés de $X \times Y$.
4. Soit \mathbb{D} un anneau de Boole, et soient $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{D}$ et $g : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{D}$ des morphismes d'anneaux. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $h : \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{D}$ tel que $h \circ \iota_1 = f$ et $h \circ \iota_2 = g$. Autrement dit, il existe un unique $h : \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{D}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} & \xleftarrow{\iota_1} & \mathbb{A} \\
 \uparrow \iota_2 & \searrow \exists! h & \downarrow f \\
 \mathbb{B} & \xrightarrow{g} & \mathbb{D}
 \end{array}$$

Indication : Pour l'existence, on pourra utiliser l'exercice 3 pour mettre f et g sous une forme convenable, et construire une application continue $H : Spec \mathbb{D} \rightarrow X \times Y$.

Logique propositionnelle

→ **Exercice 6** (Anneaux des formules à équivalence près) :

Soient V un ensemble de variables. On rappelle qu'on définit une relation d'équivalence \equiv sur $\mathcal{F}(V)$, où $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si, pour tout $\delta : V \rightarrow \{0, 1\}$, on a $\delta(\varphi) = \delta(\psi)$. L'ensemble quotient est noté $\mathcal{F}_{\equiv}(V)$.

On rappelle les abréviations usuelles : $\top = \perp \rightarrow \perp$, $\neg\varphi = \varphi \rightarrow \perp$, $\varphi \vee \psi = (\neg\varphi) \rightarrow \psi$, $\varphi \wedge \psi = \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. On notera aussi $\varphi \Delta \psi = (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \wedge \neg\varphi)$.

1. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}(V)$ telles que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\psi_1 \equiv \psi_2$. Montrer que $(\varphi_1 \rightarrow \psi_1) \equiv (\varphi_2 \rightarrow \psi_2)$. En déduire que les opérations logiques \neg, \vee, \wedge et Δ passent au quotient par la relation \equiv .
2. Soit $\delta : V \rightarrow \{0, 1\}$. On rappelle que δ s'étend en une fonction définie sur $\mathcal{F}(V)$, qu'on note encore δ . On munit l'ensemble $\{0, 1\}$ de la structure d'anneau de Boole évidente.
Vérifier que $\delta(\varphi \wedge \psi) = \delta(\varphi) \cdot \delta(\psi)$, $\delta(\varphi \Delta \psi) = \delta(\varphi) + \delta(\psi)$, $\delta(\perp) = 0$ et $\delta(\top) = 1$, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(V)$.
3. En déduire que $(\mathcal{F}_{\equiv}(V), \Delta, \wedge)$ est un anneau de Boole. Pour démontrer des égalités entre classes de formules, on pourra choisir des représentants adéquats, et utiliser la question 2.
Vérifier que la relation d'ordre sur $\mathcal{F}_{\equiv}(V)$ définie en cours coïncide avec celle donnée par la structure d'anneau de Boole.
4. Montrer que les opérations \vee, \wedge, \neg et \rightarrow , telles que définies de manière générale pour les anneaux de Boole dans le TD 2, coïncident avec les opérations induites par les connecteurs logiques sur l'anneau de Boole $(\mathcal{F}_{\equiv}(V), \Delta, \wedge)$.
5. Soit \mathbb{A} un anneau de Boole. Pour toute fonction $\delta : V \rightarrow \mathbb{A}$, on étend δ en une fonction définie sur $\mathcal{F}(V)$, via $\delta(\perp) = 0$ et $\delta(\varphi \rightarrow \psi) = \delta(\varphi) \rightarrow \delta(\psi)$. Cela généralise sans difficulté la construction vue en cours.
 - a) Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(V)$ telles que $\varphi \equiv \psi$. Soit $\delta : V \rightarrow \mathbb{A}$. Montrer que $\delta(\varphi) = \delta(\psi)$.
Indication : Utiliser l'exercice 2 pour plonger \mathbb{A} dans un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$, afin de se ramener à des fonctions $V \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
 - b) En déduire que toute fonction $\delta : V \rightarrow \mathbb{A}$ induit un morphisme d'anneaux $\delta : \mathcal{F}_{\equiv}(V) \rightarrow \mathbb{A}$
 - c) Montrer que tout morphisme d'anneaux $\mathcal{F}_{\equiv}(V) \rightarrow \mathbb{A}$ provient d'une unique fonction $\delta : V \rightarrow \mathbb{A}$.

On dit alors que l'anneau de Boole $\mathcal{F}_{\equiv}(V)$ est *l'anneau de Boole libre sur l'ensemble V* .

Exercice 7 (Compacité) :

1. Un graphe (orienté) G est un ensemble S de sommets, muni d'une relation binaire $A \subseteq S \times S$. On dit que x est relié à y si (x, y) appartient à A . Un graphe G est dit *k-coloriable* s'il existe une fonction $c : S \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$ telle que, pour tous $x, y \in V$ avec $(x, y) \in A$, on a $c(x) \neq c(y)$. Autrement dit, on demande que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.
Montrer qu'un graphe est *k-coloriable* si et seulement si tous ses sous-graphes finis le sont. On pourra introduire des variables propositionnelles $v_{x,i}$, pour $x \in S$ et $i < k$, et chercher à traduire en logique propositionnelle la condition définissant un coloriage.
2. Montrer, en utilisant le théorème de compacité, que tout ordre partiel s'étend en un ordre total.