Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu

Corrigé du TD de Logique, feuille 1

Exercice 1 (Un peu d'ordre dans des anneaux de Boole) **:**

1. La réflexivité et l'antisymétrie sont claires. Montrons la transitivité : supposons que $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$. Alors, $abc = (ab)c = ac$. Or, on a aussi $abc = a(bc) = ab = a$. Donc $ac = a$, i.e. $a \leqslant c$.

2. On a $ab = a$ ssi $1 + ab = 1 + a$ ssi $(1+b)(1+a) = 1+b$. Autrement dit, on a $a \leqslant b$ ssi $1 + b \leqslant 1 + a$.

3. Si $ca = c$ et $cb = c$, alors $cab = cb = c$. Réciproquement, si $cab = c$, alors $ca = ca^2b = cab = c$ et $cb = cab^2 = cab = c$. La propriété universelle de la borne sup permet de conclure.

4. Il s'agit de combiner les deux questions précedentes : on a $c \geqslant a$ et $c \geqslant b$ ssi $1 + c \leqslant 1 + a$ et $1 + c \leqslant 1 + b$ ssi $1 + c \leqslant (1+a)(1+b) = 1 + a + b + ab$ ssi $c \geqslant a + b + ab$.

5. On a $a \wedge b \leqslant c$ ssi $abc = ab$ ssi $a(1 + b + bc) = a$. Or $1 + b + bc = (1+b) + c + (1+b)c = (1+b) \vee c$.

6. On a $a(1+a) = a + a^2 = 0$, et $a + (1+a) + a(1+a) = 1 + 0 = 1$.

Exercice 2 (Un peu d'algèbre dans des anneaux de Boole) **:**

1. Si $x \in \mathbb{A}$, on a $(x+1)^2 = x+1$, i.e. $x^2 + 2x + 1 = x + 1$, donc $3x + 1 = x + 1$, d'où $2x = 0$.

   Ensuite, si a, b sont dans $\mathbb{A}$, on a $(a+b)^2 = a + b$, i.e. $a^2 + b^2 + ab + ba = a + b$, donc $ab + ba = 0$. Donc $ab + ba + ba = ba$, or $ba + ba = 0$, donc $ab = ba$.

2. L'un des sens est clair. Supposons donc que b divise a. Soit $c \in \mathbb{A}$ tel que $c \cdot b = a$. Alors, on a $ab - a = cb^2 - cb = cb - cb = 0$. Donc $ab = a$.

3. Soit $x \in \mathbb{A}$. On a $ax = 0$ ssi $ax + x = x$ ssi $(1+a) \cdot x = x$ ssi $(1+a)$ divise x, par 1.

4. Soit $a \in Aa$. On sait que $a(1+a) = 0 \in \mathfrak{p}$, donc $a \in \mathfrak{p}$ ou $1 + a \in \mathfrak{p}$. De plus, comme $\mathfrak{p}$ est propre, on sait que $1 \notin \mathfrak{p}$. Donc $a \notin \mathfrak{p}$ ou $1 + a \notin \mathfrak{p}$. D'où le résultat.

5. Le sens réciproque découle du fait qu'un idéal est un sous-groupe additif, et est vrai dans tout anneau. Démontrons le sens direct. Supposons que $a + b \notin \mathfrak{p}$. Alors, par la question 3, on a $x \coloneqq 1 + a + b \in \mathfrak{p}$. Si $a \notin \mathfrak{p}$, alors $1 + a \in \mathfrak{p}$, donc $b = 1 + a + x \in \mathfrak{p}$. Symétriquement, si $b \notin \mathfrak{p}$, alors $a \in \mathfrak{p}$. D'où le résultat.

6. On va utiliser la question 3. Soit $a \in I$. Comme I est propre, on a $1 + a \notin I$. Donc $1 + a \notin \mathfrak{p}$. Donc $a \in \mathfrak{p}$. Donc $I \subseteq \mathfrak{p}$, d'où l'égalité.

7. Si a appartient à tous les idéaux premiers, alors $1 + a$ n'appartient à aucun idéal premier, donc à aucun idéal propre, donc $1 + a$ est inversible, donc $1 + a = 1$ (tout inversible dans un anneau de Boole est égal à 1). Donc $a = 0$, comme voulu.

Exercice 3 (Spectre d'un anneau de Boole, dualité) **:**

1. Pour $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}$, on a $ab \notin \mathfrak{p}$ ssi $a \notin \mathfrak{p}$ et $b \notin \mathfrak{p}$. D'où $D(ab) = D(a) \cap D(b)$. Le résultat sur $V(ab)$ en découle. Enfin, on sait que, si $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}$, on a $a \notin \mathfrak{p}$ ssi$1 + a \in \mathfrak{p}$, d'où $D(a) = V(1+a)$.

2. La question précédente nous montre que la famille est close par intersections finies non vides. Pour l'intersection vide, il suffit de constater que $D(1) = Spec\,\mathbb{A}$.

3. Le fait que les $D(a)$ soient ouverts-fermés découle de la question 1 : $D(a) = V(1+a) = D(1+a)^c$. Démontrons que l'espace est séparé. Soient $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ dans $Spec\,\mathbb{A}$. Alors, comme les idéaux premiers sont maximaux, il existe $a \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$. Autrement dit, on a $\mathfrak{q} \in D(a)$ et $\mathfrak{p} \notin D(a)$. Or, $D(a)$ est un ouvert-fermé, d'où la séparation.

4. On commence par vérifier que $V(B) = V(I)$: un idéal premier contient B ss'il contient I. Ensuite, par le fait rappelé plus haut, un idéal est inclus dans un idéal premier ss'il est propre, ss'il ne contient pas 1. D'où l'équivalence.

   Démontrons alors la compacité de $Spec\,\mathbb{A}$: soit $(F_k)_{k\in K}$ une famille de fermés, dont les intersections finies sont non vides. Montrons que l'intersection de la famille est non vide. Par définition de la topologie de Zariski, chaque fermé F_k est de la forme $V(B_k)$, pour un certain $B_k \subseteq \mathbb{A}$. Pour $J \subseteq K$, notons I_J li'déal engendré par l'union des B_k, $k \in J$. Par hypothèse, si J est fini, on a $1 \notin I_J$. Par conséquent, on a $1 \notin I_K$, d'où $V(I_K) \neq \varnothing$, comme voulu.

5. Démontrons l'unicité : soient a, b dans $\mathbb{A}$ tels que $D(a) = D(b)$. Alors, par la question 5 de l'exercice 2, l'élément $a + b$ est dans tous les idéaux premiers, donc, par 6 de l'exercice 2, cet élément est nul.

   Pour l'existence, on utilise la compacité : soit U un ouvert-fermé, qu'on écrit comme une union *finie* d'ouverts de base $D(a)$, disons $U = \bigcup_{i<n} D(a_i)$. Alors, on a $U^c = \bigcap_{i<n} D(1 + a_i) = D(\prod_i(1 + a_i))$. Donc $U = D(1 + \prod_i(1 + a_i))$.

6. On sait que la fonction $a \mapsto D(a)$ définit une bijection $\mathbb{A} \simeq OF(Spec\,\mathbb{A})$. De plus, on a $D(0) = \varnothing$, $D(1) = Spec\,\mathbb{A}$, et $D(ab) = D(a) \cap D(b)$, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$. Enfin, par la question 5 de l'exercice 2, on a $D(a + b) = D(a)\Delta D(b)$, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$. On a donc bien défini un isomorphisme d'anneaux.

Exercice 4 (Quelques plongements) **:**

1. Pour $a \in \mathbb{A}$ et $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}$, on définit $a(\mathfrak{p}) = 0$ si $a \in \mathfrak{p}$, et $a(\mathfrak{p}) = 1$ sinon. (En fait, cela revient à définir $a(\mathfrak{p})$ comme étant l'image de a dans l'anneau quotient $\mathbb{A}/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.)

   Soit alors $f : \mathbb{A} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Spec\,\mathbb{A}}$ la fonction définie par $f(a) = (a(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p}\in Spec\,\mathbb{A}}$. On constate que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. De plus, par la question 4 de l'exercice 1, on a $(a + b)(\mathfrak{p}) = a(\mathfrak{p}) + b(\mathfrak{p})$, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$ et $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}$. Enfin, la définition d'idéal premier entraîne l'égalité $(a \cdot b)(\mathfrak{p}) = a(\mathfrak{p}) \cdot b(\mathfrak{p})$, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$ et $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}$. La fonction f est donc un morphisme d'anneaux. L'injectivité découle de la question 6 de l'exercice 1.

2. Soit I l'ensemble des ouverts-fermés de l'espace X. Soit $f : X \to 2^I$ définie par $f(x) = (\mathbf{1}_{x\in A})_{A\in I}$. On vérifie facilement que f est continue, car l'image réciproque d'un cylindre est une intersection finie d'ouverts-fermés, qui est un ouvert-fermé. De plus, l'image par f d'un ouvert-fermé de X est l'intersection avec Imf d'un cylindre, qui est un ouvert de 2^I. Donc, l'image par f d'un ouvert de X est l'intersection avec Imf d'un ouvert de 2^I, car tout ouvert de X est union d'ouverts-fermés.

   Montrons alors l'injectivité de f. Soient $x \neq y$ des éléments de x. Alors, comme X est séparé, il existe des ouverts U, V disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$. Comme les ouverts sont unions d'ouverts-fermés, quitte à prendre un U plus petit, on peut supposer que U est un ouvert-fermé. Alors, $f(x)(U) = 1$ et $f(y)(U) = 0$. Donc $f(x) \neq f(y)$, d'où l'injectivité de f.

Exercice 5 (Produits d'anneaux de Boole) **:**

1. On commence par constater que, si $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A} \times \mathbb{B}$, alors exactement l'un des éléments $(1, 0)$ et $(0, 1)$ appartient à $\mathfrak{p}$.

   Supposons que $(1, 0) \in \mathfrak{p}$. Soit $I = \{b \in \mathbb{B} \mid (0, b) \in \mathfrak{p}\}$. En utilisant le fait que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, on montre que I est un idéal premier de $\mathbb{B}$. Notamment, $1 \notin I$, car $(0, 1) \notin \mathfrak{p}$. On vérifie alors que $\mathfrak{p} = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{A}, b \in I\}$.

   Réciproquement, si $I \in Spec\,\mathbb{B}$, l'ensemble $\mathfrak{p}(I) := \{(a, b) \mid a \in \mathbb{A}, b \in I\}$ est un idéal premier de $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$, et on a $(1, 0) \in \mathfrak{p}(I)$. De plus, on vérifie que $I = \{b \in \mathbb{B} \mid (0, b) \in \mathfrak{p}(I)\}$.

   Ainsi, on a construit une bijection $I : \{\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A} \times \mathbb{B} \mid (1, 0) \in \mathfrak{p}\} \to Spec\,\mathbb{B}$. Notons $e_1 = (1, 0) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$. Alors, on sait que $V(e_1) := \{\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A} \times \mathbb{B} \mid (1, 0) \in \mathfrak{p}\}$ est un ouvert-fermé de $Spec\,\mathbb{A} \times \mathbb{B}$. Pour montrer que I est un homéomorphisme, on vérifie les faits suivants :

   - Si $(a, b) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$, et $\mathfrak{p} \in V(e_1)$, alors $(a, b) \in \mathfrak{p}$ ssi $(0, b) \in \mathfrak{p}$ ssi $b \in I(\mathfrak{p})$.

- Si $b \in \mathbb{B}$ et $\mathfrak{q} \in Spec\,\mathbb{B}$, alors $b \in \mathfrak{q}$ ssi $(1,b) \in I^{-1}(\mathfrak{q})$.

Le premier point montre que I est ouverte, et le deuxième qu'elle est continue. On a donc un homéomorphisme $V(e_1) \simeq Spec\,\mathbb{B}$. Symétriquement, en notant $V(e_2) = \{\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}\times\mathbb{B} \,|\, (0,1) \in \mathfrak{p}\}$, on définit un homéomorphisme $V(e_2) \simeq Spec\,\mathbb{A}$. Donc, en recollant les deux, qui sont définis sur des ouverts-fermés disjoints de $Spec\,\mathbb{A}\times\mathbb{B}$, on obtient un homéomorphisme $Spec\,\mathbb{A}\times\mathbb{B} \simeq Spec\,\mathbb{A} \bigsqcup Spec\,\mathbb{B}$.

2. Notons $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$. Pour $A \subseteq I$, soit $e_A := (\mathbf{1}_{i\in A})_{i\in I}$ la suite de 0 et de 1 définie par A. On voit e_A comme un élément de $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$. Pour $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{B}$, soit $\mathcal{U}(\mathfrak{p}) := \{A \subseteq I \,|\, 1 + e_A \in \mathfrak{p}\}$. Alors, on vérifie que $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$ a les propriétés suivantes :

   - On a $I \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$, et $\varnothing \notin \mathcal{U}(\mathfrak{p})$.
   - Si A, B sont dans $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$, alors $A \cap B \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$. En effet, on calcule : $1 + e_{A\cap B} = 1 + e_A \cdot e_B = (1+e_A) + (1+e_B) + (1+e_A)(1+e_B) \in \mathfrak{p}$.
   - Si $A \subseteq B$ et $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$, alors $B \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$. En effet, $e_A e_B = e_A$, donc $e_A(1+e_B) = 0 \in \mathfrak{p}$, donc $e_A \in \mathfrak{p}$ ou $(1+e_B) \in \mathfrak{p}$. Or $1 + e_A \in \mathfrak{p}$, donc $e_A \notin \mathfrak{p}$, donc $(1+e_B) \in \mathfrak{p}$, i.e. $B \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$.
   - Si $A \cup B = I$, alors $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$ ou $B \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$. En effet, on calcule que $1 = e_{A\cup B} = e_A + e_B + e_{A\cap B} = e_A + e_B + e_A e_B$. Autrement dit, on a $0 = 1 + 1 = 1 + e_A + e_B + e_A e_B = (1+e_A)(1+e_B)$. Donc $(1+e_A)(1+e_B) \in \mathfrak{p}$, donc $1 + e_A \in \mathfrak{p}$ ou $1 + e_B \in \mathfrak{p}$, comme voulu.

   Réciproquement, si $\mathcal{U} \in P(I)$ a les quatre propriétés ci-dessus, on dit que $\mathcal{U}$ est un *ultrafiltre* sur I, et on définit $\mathfrak{p}(\mathcal{U}) := \{1 + e_A \,|\, A \in \mathcal{U}\}$. On vérifie qu'alors $\mathfrak{p}(\mathcal{U})$ est un idéal premier de $\mathbb{B}$.

   Enfin, on calcule que ces deux constructions sont réciproques l'une de l'autre. Le spectre de Zariski de $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$ est donc isomorphe à l'espace des ultrafiltres sur I.

Exercice 6 (Complétude) **:**

1. Supposons que $(U_i)_i$ a une borne supérieure V dans $\mathbb{A}$. Montrons que $\overline{U}$ est ouvert dans X, et que $\overline{U} = \bigvee_i U_i$. On sait que, pour tout i, on a $U_i \subseteq V$. Donc $V \supseteq \bigcup_i U_i = U$. Or, V est ouvert-fermé dans X, donc $V \supseteq \overline{U}$. Par l'absurde, si $V \neq \overline{U}$, alors l'ouvert non vide $V \setminus \overline{U}$ contient un ouvert-fermé non vide A. Alors, l'ouvert-fermé $V \setminus A$ contient $\overline{U}$, mais est strictement inclus dans la borne sup des U_i, ce qui est absurde.

   Réciproquement, supposons que $\overline{U}$ est ouvert dans X. On sait qu'un ouvert-fermé W contient tous les U_i ss'il contient U ss'il contient $\overline{U}$. Donc $\overline{U}$ est bien la borne sup des U_i.

2. Il s'agit simplement d'appliquer la dualité de Stone.

3. On va vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{A}$, on a $x \geqslant (\bigvee_i a_i) \wedge b$ ssi $x \geqslant \bigvee_i (a_i \wedge b)$. On rappelle que, pour x, y, z éléments d'un anneau de Boole $\mathbb{B}$, on a $y \wedge z \leqslant x$ ssi $y \leqslant (1+z) \vee x$. Ainsi, en notant $s = \bigvee_i a_i$, on a $x \geqslant s \wedge b$ ssi $s \leqslant (1+b) \vee x$ ssi $a_i \leqslant (1+b) \vee x$ pour tout i, ssi $a_i \wedge b \leqslant x$ pour tout i, ssi $x \geqslant \bigvee_i (a_i \wedge b)$. Donc $s \wedge b = \bigvee_i (a_i \wedge b)$.

Exercice 7 (Atomes d'un anneau de Boole) **:**

1. a) Par l'exercice 1, on sait que $(1+a) = \{x \in \mathbb{A} \,|\, ax = 0\}$. Supposons que a est un atome. Comme $a \neq 0$, on a $1 \notin (1+a)$. Soient x, y dans $\mathbb{A}$ tels que $xya = 0$. Alors, comme a est un atome, on a $xa, ya \in \{0, a\}$. Comme $a \neq 0$, on a donc $xa = 0$ ou $ya = 0$. Donc $(1+a)$ est premier.

   Réciproquement, supposons que $(1+a)$ est premier. On commence par constater que $a \neq 0$, car $1 \notin (1+a)$. Par la question 1 de l'exercice 1, il reste donc à montrer que, pour tout $x \in \mathbb{A}$, on a $xa \in \{0, a\}$. On sait que $x(1+x) = 0$, donc $ax(1+x) = 0$, i.e. $x(1+x) \in (1+a)$. Par primalité, on a donc $x \in (1+a)$ ou $1 + x \in (1+a)$, donc $ax = 0$ ou $a(1+x) = 0$, donc $ax \in \{0, a\}$, comme voulu.

b) Si a est un atome, alors $a \neq 0$, donc $1 \notin (1+a)$, donc $a \notin (1+a)$. Par la question a), on en déduit que $(1+a) \in D(a)$. Par ailleurs, si $\mathfrak{p} \in D(a)$, alors $1+a \in \mathfrak{p}$, donc $(1+a) \subseteq \mathfrak{p}$. Donc, par la question 5 de l'exercice 1, on a $\mathfrak{p} = (1+a)$. Donc $D(a) = \{(1+a)\}$.

Pour démontrer la réciproque, raisonnons par contraposée. Supposons que a n'est pas un atome. Si $a = 0$, alors $D(a)$ est vide, donc n'est pas un singleton. Supposons donc que $a \neq 0$. Donc, il existe un élément x tel que $ax \neq 0$ et $ax \neq a$. Comme $ax \neq 0$, par la question 6 de l'exercice 1, soit $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}$ tel que $ax \notin \mathfrak{p}$. Donc $x \notin \mathfrak{p}$ et $a \notin \mathfrak{p}$, donc $\mathfrak{p} \in D(a)$. De même, comme $ax + a = a(1+x)$ est non nul, il existe $\mathfrak{q} \in Spec\,\mathbb{A}$ tel que $a(1+x) \notin \mathfrak{q}$. Alors, $1+x \notin \mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q} \in D(a)$. On vérifie alors que $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$: en effet, on a $x \notin \mathfrak{p}$, donc $1+x \in \mathfrak{p}$, et $1+x \notin \mathfrak{q}$.

c) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier. Si $\mathfrak{p}$ est un point isolé de $Spec\,\mathbb{A}$, alors il est isolé par un $D(a)$, donc $\mathfrak{p} = (1+a)$ est principal. Si $\mathfrak{p} = (b)$, alors $\mathfrak{p}$ est isolé par $D(1+b)$.

2. Plongeons $\mathbb{A}$ dans un anneau de Boole dans lequel tout élément non nul a un minorant non nul strict. Remarquons que $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}^{\mathbb{A}}$ muni des opérations coordonnées à coordonnées de $\mathbb{A}$ est encore un anneau de Boole. $\mathbb{A}$ se plonge dans $\mathbb{A}^{\mathbb{A}}$ en associant à $a \in \mathbb{A}$ la fonction constante égale à a. Alors toute fonction constante égale à a est minorée par $(0, \cdots, 0, a, 0 \cdots)$. Donc $\mathbb{A}$ ne contient aucun atome de $\mathbb{A}_1$. Par récurrence, on construit en réitérant le même procédé une suite croissante d'anneaux $\mathbb{A}_n$ telle que $\mathbb{A}_n$ ne contient aucun atome de $\mathbb{A}_{n+1}$. Donc $\mathbb{A}$ se plonge dans l'union croissante $\mathbb{A}_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{A}_n$ qui ne contient pas d'atome.

3. Par la question 1 de l'exercice 3, on sait que tout anneau de Boole se plonge dans un anneau de la forme $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$. Il suffit alors de vérifier qu'un tel anneau est atomique, les atomes étant les indicatrices de singletons de I.

4. Le deuxième point est clair, car x est un atome de $\mathbb{A}$ si et seulement si $\mathbb{A}x$ contient exactement deux éléments, à savoir 0 et x. Démontrons le premier point. Soient a, b des atomes distincts. Alors, on sait que $ab \in \{0, a\}$ et $ab \in \{0, b\}$. Comme $a \neq b$, on a nécessairement $ab = 0$.

5. Soit $\mathbb{A}$ un atome de Boole atomique et complet. Soit $f : \mathbb{A} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Atom(\mathbb{A})}$ définie par $f(x) = (\mathbf{1}_{x \geqslant a})_{a \in Atom(\mathbb{A})}$. Pour $x \in \mathbb{A}$ et $a \in Atom(\mathbb{A})$, on constate que $x \geqslant a$ ssi $ax = a$ ssi $a(1+x) = 0$ ssi $1+x \in (1+a)$. Comme $(1+a)$ est un idéal premier, on peut alors, comme dans l'exercice 3, vérifier que f est un morphisme d'anneaux. L'injectivité s'en déduit : si $x \in \mathbb{A}$ ne majore aucun atome, alors, par atomicité de $\mathbb{A}$, on sait que $x = 0$. La surjectivité de f utilise la complétude de l'anneau de Boole $\mathbb{A}$. Soit $e = (e_a)_{a \in Atom(\mathbb{A})}$ un élément de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Atom(\mathbb{A})}$. Soit x la borne sup, dans $\mathbb{A}$, de l'ensemble des atomes a tels que $e_a = 1$. Il est clair qu'on a $x \wedge a = a$ pour tout a tel que $e_a = 1$. Par la question 3 de l'exercice 4 (la distributivité de l'inf sur le sup), et la question 4, on calcule que $x \wedge a = 0$ pour tout a tel que $e_a = 0$.

6. Supposons que S est un espace de Stone sans point isolé, tel que l'anneau $\mathbb{A}$ des ouverts-fermés de S est dénombrable. L'absence de point isolé entraîne que $\mathbb{A}$ est sans atome.

   Pour obtenir le résultat souhaité, nous allons montrer qu'il n'existe qu'une seule algèbre de Boole dénombrable sans atome à isomorphisme près. Un fois montré ce résultat, il viendra que $\mathbb{A}$ est isomorphe à l'anneau des ouverts-fermés de l'espace de Cantor, et le théorème de Stone permettra de conclure.

   Pour montrer le lemme, prenons A et B deux algèbres de Boole dénombrables sans atome et construisons un isomorphisme entre A et B. Par récurrence nous allons définir des suites, croissantes pour l'inclusion, de sous-algèbres finies $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $A = \bigcup A_n$, $B = \bigcup B_n$, et une suite croissante d'isomorphismes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entre A_n et B_n. Alors $f = \bigcup f_n$ sera un isomorphisme de A dans B. Énumérons $A = \{a_0, a_1, \cdots\}$ et $B = \{b_0, b_1, \cdots\}$.

   On pose $A_0 = \{0, 1\}$ et $B_0 = \{0, 1\}$ et f_0 l'application de A dans B qui envoie 0 sur 0 et 1 sur 1. Alors f_0 est un isomorphisme entre deux algèbres de Boole.

   Si n est pair, supposons avoir construit A_n, B_n et $f_n : A_n \xrightarrow{\sim} B_n$ un isomorphisme entre les deux. A_n et B_n sont finies, donc atomiques. Par la question 5 (par exemple), on vérifie que l'ensemble $Atom(A_n) = \{p_0, \cdots, p_r\}$ engendre A_n et $f_n(Atom(A_n)) = Atom(B_n)$. Soit x le premier élément de l'énumération de A qui n'est pas dans A_n, et A_{n+1} l'anneau de Boole engendré par A_n et x. alors A_{n+1} est finie, donc atomique et ses atomes sont les éléments non nuls de $X = \{xp_0, (1-x)p_0, \cdots, xp_r, (1-x)p_r\}$ et on choisit alors $y \in B$ comme suit : pour tout $i \leqslant r$, on pose $x_i = xp_i$, et on choisit $y_i \in B$ tel que

$$\begin{array}{cc} y_i = 0 & \text{si } x_i = 0 \\ y_i = f_n(x_i) & \text{si } x_i = p_i \\ 0 < y_i < f_n(x_i) & \text{sinon.} \end{array}$$

Alors on pose $y = \bigvee_{i \leqslant r} y_i$ et B_{n+1} la sous-algèbre de B engendrée par B_n et y. Comme précédement, B_{n+1} est finie et ses atomes sont donnés par les éléments non nuls de $Y = \{yf_n(p_0), (1-y)f_n(p_0), \cdots, yf_n(p_r), (1-y)f_n(p_r)\}$. Alors on étend f_n en envoyant x sur y. Cela induit une bijection entre X et Y, qui s'étend de manière unique en un isomorphisme f_{n+1} entre A_{n+1} et B_{n+1}.

Si n est impair on procède de la même manière mais en inversant les rôles de A_n et B_n et en prenant f_n^{-1}. Cette inversion est nécessaire pour assurer que $A = \bigcup A_n$ et $B = \bigcup B_n$.

Exercice 8 (Un lemme d'extension) **:**

1. Soit $C = \{b_1 a + b_2(1+a) \,|\, (b_1, b_2) \in \mathbb{B}^2\}$. Il est clair que C est inclus dans le sous-anneau engendré par $\mathbb{B}$ et a. Pour l'inclusion réciproque, on vérifie que C est un sous-anneau de $\mathbb{A}$ contenant $\mathbb{B}$, en développant les produits de la forme $(b_1 a + b_2(1+a))(b_3 a + b_4(1+a))$.

2. On veut définir g en imposant $g(b_1 a + b_2(1+a)) = f(b_2)$. On commence par vérifier que cela ne dépend pas de l'écriture choisie. En effet, si $b_1 a + b_2(1+a) = b_3 a + b_4(1+a)$, où les b_i sont dans $\mathbb{B}$, on a $(b_1+b_3)a = (b_2+b_4)(1+a)$. En multipliant par a ou $1+a$ cet élément, on constate qu'il est nul, car $a(1+a) = 0$. Donc $b_2 + b_4(1+a) = 0$, donc $b_2 + b_4 \leqslant a$, donc $f(b_2+b_4) = 0$ par hypothèse, donc $f(b_2) = f(b_4)$. Ainsi, la fonction g est bien définie. Le fait que la valeur de g ne dépende pas de l'écriture choisie parmet alors de vérifier facilement que c'est bien un morphisme d'anneaux étendant f.

3. La condition symétrique est $\forall b(b \in \mathbb{B} \wedge b \geqslant a) \rightarrow f(b) = 1$. Montrons par l'absurde que l'une des deux conditions est vérifiée. Supposons donc qu'il existe $b_1, b_2 \in \mathbb{B}$ tels que $b_1 \leqslant a$, $b_2 \geqslant a$, $f(b_1) \neq 0$ et $f(b_2) \neq 1$. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a alors $f(b_1) = 1$ et $f(b_2) = 0$. Or $b_1 \leqslant a \leqslant b_2$, donc $b_1 b_2 = b_1$, donc $f(b_1)f(b_2) = f(b_1)$, donc $1 \cdot 0 = 1$, absurde.

4. Il s'agit simplement d'énumérer $\mathbb{A}$, ou d'appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble des morphismes d'anneaux étendant f, définis sur un sous-anneau de $\mathbb{A}$ contenant $\mathbb{B}$, pour une relation d'ordre raisonnable.

5. Soit $\mathfrak{q} \in \mathit{Spec}\,\mathbb{B}$, soit $g : \mathbb{B} \to \mathbb{B}/\mathfrak{q} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le morphisme quotient. Soit alors $f : \mathbb{A} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ étendant g. On vérifie que le noyau de f est un idéal premier de $\mathbb{A}$, et qu'il contient $\mathfrak{q}$.

Exercice 9 (Correspondance entre filtres et idéaux propres) **:**

1. On commence par constater que, comme $1 \notin I$ et $0 \in I$, on a $0 \notin \mathcal{F}(I)$ et $1 \in \mathcal{F}(I)$. Ensuite, soient $a, b \in \mathcal{F}(I)$. Montrons que $ab \in \mathcal{F}(I)$. On sait que $1+a$ et$1+b$ sont dans l'idéal I. On calcule alors $1 + ab = (1+a)(1+b) + (1+a) + (1+b)$, donc $1 + ab \in I$, donc $ab \in \mathcal{F}(I)$, comme voulu. Enfin, soient $a, b \in \mathbb{A}$ tels que $a \in \mathcal{F}(I)$ et $a \leqslant b$. Montrons que $b \in \mathcal{F}(I)$. On a $ab = a$, donc $1+b = 1+b+a+ab = (1+a)(1+b) \in I$. Donc $b \in \mathcal{F}(I)$.

2. Si $\mathcal{F}$ est un filtre, soit $I(\mathcal{F}) = \{1 + x \,|\, x \in \mathcal{F}\}$. On vérifie alors que $I(\mathcal{F})$ est un idéal propre de $\mathbb{A}$: par exemple, si $a \in I(\mathcal{F})$ et $b \in \mathbb{A}$, alors $1+a \in \mathcal{F}$, et $(1+ab)(1+a) = 1+ab+a+ab = 1+a$, donc $1+ab \geqslant 1+a \in \mathcal{F}$, donc $1+ab \in \mathcal{F}$, i.e. $ab \in I(\mathcal{F})$. On vérifie alors que ces deux constructions sont réciproques l'une de l'autre, et préservent bien l'inclusion.

3. On sait que l'idéal engendré par C est le sous-groupe engendré par les ac, pour $a \in \mathbb{A}$ et $c \in C$. Par ailleurs, pour toute famille finie d'éléments de $\mathbb{A}$, on sait que la borne sup est plus grande que la somme, et que le sup d'éléments d'un idéal est dans l'idéal. Ainsi, l'élément 1 n'est pas dans l'idéal engendré par C si et seulement si aucune borne sup (finie) d'éléments de la forme ac, pour $a \in \mathbb{A}$ et $c \in C$, ne vaut 1. On constate que cela équivaut à ce qu'aucune borne sup finie d'éléments de C ne vaut 1. Par la correspondance entre filtres et idéaux construite plus haut, on en déduit que C est inclus dans un filtre si et seulement si aucune borne inf finie d'éléments de C ne vaut 0.

   On appelle cette propriété la *propriété de l'intersection finie*.

4. Par la question 2, on a une correspondance entre (ultra)filtres et idéaux propres (maximaux). La propriété qu'on cherche à démontrer est alors équivalente à celle-ci : pour I un idéal propre, I est maximal si et seulement si, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$ tels que $1 + ((1 + a) \vee (1 + b))$ est dans I, on a $1 + (1 + a) \in I$ ou $1 + (1 + b) \in I$. Or, on a $1 + ((1 + a) \vee (1 + b)) = 1 + ((1 + a)(1 + b) + 1 + a + 1 + b) = ab$. De plus, on sait par l'exercice 1 qu'un idéal propre I est maximal si et seulement si, pour tous a, b dans $\mathbb{A}$ tels que $ab \in I$, on a $a \in I$ ou $b \in I$.