

TD de Logique, feuille 2

28 et 30 septembre 2022

Les exercices marqués d'une flèche sont à chercher en priorité. Je recommande de les préparer à l'avance. Ceux qu'on aura pu corriger en TD sont à connaître. Les corrections seront concentrées sur ceux-là, mais vous pouvez toujours me demander des précisions concernant les autres exercices. Les questions ou exercices marqués d'une étoile sont plus difficiles.

Si $(X, <)$ est un ensemble ordonné, on note $a \wedge b$ la borne inférieure de l'ensemble $\{a, b\}$, si elle existe, et $a \vee b$ sa borne supérieure, pour $a, b \in X$.

→ **Exercice 1** (Un peu d'ordre dans les anneaux de Boole) :

Soient \mathbb{A} un anneau de Boole, et a, b, c dans \mathbb{A} . On définit une relation binaire \leq telle que $x \leq y$ lorsque $xy = x$.

1. Montrer que \leq est une relation d'ordre large sur \mathbb{A} .
2. Montrer que $a \leq b$ ssi $1 + a \geq 1 + b$.
3. Montrer que $c \leq ab$ ssi $c \leq a$ et $c \leq b$. En déduire que $a \wedge b = ab$.
4. Montrer que $c \geq a + b + ab$ ssi $c \geq a$ et $c \geq b$. En déduire que $a \vee b = a + b + ab$.
5. Montrer que $a \wedge b \leq c$ ssi $a \leq (1 + b) \vee c$. On pourra alors noter $b \rightarrow c = (1 + b) \vee c$.
6. Montrer que $a \wedge (1 + a) = 0$ et $a \vee (1 + a) = 1$. On notera parfois $\neg a = 1 + a$.
7. Montrer les égalités suivantes : $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Définition

Soit A un anneau commutatif unitaire. Un idéal de A est un ensemble $I \subseteq A$ tel que I est un sous-groupe de $(A, +)$ et, pour tout $x \in A$, on a $x \cdot I \subseteq I$. Un idéal I est *premier* s'il est propre et si, pour tous $a, b \in A$ tels que $a \cdot b \in I$, on a $a \in I$ ou $b \in I$. On note $\text{Spec } A$ l'ensemble des idéaux premiers de A .

Un idéal est *maximal* s'il est strictement inclus dans I , et maximal (pour l'inclusion) pour cette propriété.

Si a, b sont dans A , on dit que a divise b , ce qu'on note $a | b$, lorsqu'il existe $c \in A$ tel que $ac = b$.

Fait : Tout idéal propre d'un anneau commutatif unitaire est contenu dans un idéal maximal, et tout idéal maximal est premier.

→ **Exercice 2** (Un peu d'algèbre dans les anneaux de Boole) :

Attention, les résultats démontrés dans cet exercice sont faux dans des anneaux quelconques !

Soit \mathbb{A} un anneau de Boole, et soit $a \in \mathbb{A}$.

1. Rappeler pourquoi $x + x = 0$ pour tout x dans \mathbb{A} , et pourquoi \mathbb{A} est commutatif.
2. Montrer que, pour $b \in \mathbb{A}$, on a $b | a$ si et seulement si $a \cdot b = a$. (Pour l'un des sens, calculer $ab - a$.)
3. Montrer que l'idéal $(1 + a)$ est égal à l'ensemble $\{x \in \mathbb{A} \mid ax = 0\}$.
4. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de \mathbb{A} . Montrer que $a \notin \mathfrak{p}$ ssi $1 + a \in \mathfrak{p}$.
5. Soient \mathfrak{p} un idéal premier de \mathbb{A} , et $a, b \in \mathbb{A}$. Montrer que $a + b \notin \mathfrak{p}$ ssi exactement l'un des éléments a, b n'est pas dans \mathfrak{p} .
6. Soient $\mathfrak{p} \subseteq I$ des idéaux propres de \mathbb{A} , où \mathfrak{p} est premier. Montrer que $\mathfrak{p} = I$. Autrement dit, les idéaux premiers sont maximaux.
7. On suppose que l'élément a appartient à tous les idéaux premiers de \mathbb{A} . Montrer que $a = 0$. (On pourra montrer que l'élément $1 + a$ n'appartient à aucun idéal premier, en déduire qu'il est inversible, puis qu'il est égal à 1.)

→ **Exercice 3** (Spectre d'un anneau de Boole, dualité) :

Cet exercice donne une autre présentation de l'espace de Stone associé à un anneau de Boole.

Soit \mathbb{A} un anneau de Boole. On note $\text{Spec } \mathbb{A}$ l'ensemble des idéaux premiers de \mathbb{A} . Pour $a \in \mathbb{A}$, soit $D(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{A} \mid a \notin \mathfrak{p}\}$, et $V(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{A} \mid a \in \mathfrak{p}\}$. Plus généralement, si $B \subseteq \mathbb{A}$, soit $V(B) = \bigcap_{a \in B} V(a)$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{A}$. Montrer que $D(ab) = D(a) \cap D(b)$, que $V(ab) = V(a) \cup V(b)$, et que $D(a) = V(1+a)$.
2. Vérifier que la collection des $D(a)$, pour $a \in \mathbb{A}$, forme une base d'ouverts pour une topologie. On appelle cette topologie sur $\text{Spec } \mathbb{A}$ la *topologie de Zariski*. L'espace obtenu est appelé le *spectre* de \mathbb{A} , et dans notre cas, on dira aussi que c'est l'*espace de Stone* associé à l'anneau de Boole \mathbb{A} .
3. Montrer que $\text{Spec } \mathbb{A}$ est séparé, et que les $D(a)$ sont ouverts-fermés.
4. Soit $B \subseteq \mathbb{A}$, et I l'idéal engendré par B . Montrer que $V(B) = \emptyset$ si et seulement si $1 \in I$. En déduire que l'espace topologique $\text{Spec } \mathbb{A}$ est compact, et a une base d'ouverts constituée d'ouverts-fermés. Un espace ayant ces propriétés est appelé *espace de Stone*, ou *espace profini*.
5. Soit $X \subseteq \text{Spec } \mathbb{A}$ un ouvert-fermé. Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{A}$ tel que $D(a) = X$.
6. Soit $OF(\text{Spec } \mathbb{A})$ l'ensemble des ouverts-fermés de $\text{Spec } \mathbb{A}$. Montrer que la fonction $a \mapsto D(a)$ définit un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{A} \simeq (OF(\text{Spec } \mathbb{A}), \Delta, \cap)$, où Δ désigne la différence symétrique. On pourra utiliser la question 5 de l'exercice 2 pour calculer $D(a+b)$.

Exercice 4 (Quelques plongements) :

1. Soit \mathbb{A} un anneau de Boole. Montrer qu'il existe un ensemble I et un morphisme d'anneaux injectif $\mathbb{A} \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$.

Indication : on pourra chercher à voir les éléments de \mathbb{A} comme des fonctions définies sur $\text{Spec } \mathbb{A}$, en décrétant que $a(\mathfrak{p}) = \mathbf{1}_{a \notin \mathfrak{p}}$, pour $a \in \mathbb{A}$ et $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{A}$.

2. Soit X un espace de Stone. Montrer qu'il existe un ensemble I et une injection continue ouverte sur son image $X \rightarrow 2^I$, où $2^I = \{0, 1\}^I$ est muni de la topologie produit, qui en fait un espace de Stone.

Indication : On pourra chercher à identifier un élément $x \in X$ à l'ensemble des ouverts-fermés auxquels il appartient.

Exercice 5 (Produits d'anneaux de Boole) :

1. Soient \mathbb{A}, \mathbb{B} des anneaux de Boole. Quel est l'espace de Stone correspondant à l'anneau de Boole $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$?
2. Soit I un ensemble. Décrire les idéaux premiers de l'anneau de Boole $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$. On pourra, pour \mathfrak{p} un idéal premier de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$, considérer $\mathcal{U} = \{A \subseteq I \mid \mathbf{1}_A \notin \mathfrak{p}\}$, et montrer qu'il s'agit d'un ultrafiltre sur $P(I)$.

Exercice 6 (Complétude) :

Un anneau de Boole est dit *complet* si toute famille d'éléments admet une borne supérieure, pour l'ordre associé à l'anneau de Boole.

1. Soit X un espace de Stone, et \mathbb{A} l'anneau des ouverts-fermés associé. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts-fermés de X . Notons $U = \bigcup_i U_i$. Montrer que la famille $(U_i)_i$ a une borne supérieure dans \mathbb{A} si et seulement si l'ensemble \overline{U} est ouvert dans X , et que dans ce cas, on a $\overline{U} = \bigvee_i U_i$.
2. En déduire qu'un anneau de Boole \mathbb{A} est complet si et seulement si, pour tout ouvert $U \subseteq \text{Spec } \mathbb{A}$, le fermé \overline{U} est un ouvert-fermé dans $\text{Spec } \mathbb{A}$.
3. Soient \mathbb{A} un anneau de Boole complet, $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathbb{A} , et $b \in \mathbb{A}$. Montrer que $(\bigvee_i a_i) \wedge b = \bigvee_i (a_i \wedge b)$.

Exercice 7 (Atomes d'un anneau de Boole) :

Soit \mathbb{A} un anneau de Boole. On appelle *atome* de \mathbb{A} un élément $a > 0$ minimal pour l'ordre inverse de la division (qui donne l'ordre sur le treillis de Boole associé à \mathbb{A}).

1. Montrer les équivalences suivantes :
 - a) un élément $a \in \mathbb{A}$ est un atome ssi $(1 + a)$ est un idéal premier ;
 - b) un élément $a \in \mathbb{A}$ est un atome ssi $D(a) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{A} \mid a \notin \mathfrak{p}\}$ est un singleton ;
 - c) un idéal premier $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{A}$ est isolé (pour la topologie de Zariski) ss'il est principal, ss'il est engendré par un élément de la forme $1 + a$, où a est un atome.
2. Montrer que tout anneau de Boole se plonge dans un anneau de Boole sans atome.
3. Montrer que tout anneau de Boole \mathbb{A} se plonge dans un anneau de Boole \mathbb{B} tel que tout élément non nul de \mathbb{B} majore un atome. On dit alors que \mathbb{B} est *atomique*.
4. Montrer que le produit de deux atomes distincts de \mathbb{A} est nul et que x est un atome de \mathbb{A} si et seulement si $(\mathbb{A}x, +, \times) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$.
5. Montrer qu'un anneau de Boole \mathbb{A} atomique et complet est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\text{Atom}(\mathbb{A})}$, où $\text{Atom}(\mathbb{A})$ désigne l'ensemble des atomes de \mathbb{A} .
6. (*) Montrer que tout espace de Stone $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ sans point isolé, dont l'ensemble des ouverts-fermés est dénombrable, est homéomorphe à l'espace de Cantor.

Indication : Montrer qu'il existe une unique algèbre de Boole dénombrable sans atome, à isomorphisme près.

Exercice 8 (Un lemme d'extension) :

Soient \mathbb{A} un anneau de Boole, $\mathbb{B} \leq \mathbb{A}$ un sous-anneau, et $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{F}_2$ un morphisme d'anneaux de Boole. On va montrer qu'il existe une extension en $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{F}_2$.

1. Soit $a \in \mathbb{A}$. Montrer que le sous-anneau engendré par \mathbb{B} et a est $\langle \mathbb{B}, a \rangle = \{b_1a + b_2(1 + a) \mid (b_1, b_2) \in \mathbb{B}^2\}$.
2. On suppose : $\forall b (b \in \mathbb{B} \wedge b \leq a) \rightarrow f(b) = 0$. Montrer que poser $g(a) = 0$ permet d'étendre à $\langle \mathbb{B}, a \rangle$.
3. Formuler une condition symétrique sous laquelle on peut poser $g(a) = 1$, et montrer qu'au moins l'une ou l'autre se produit.
4. Conclure à la possibilité d'étendre en $g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{F}_2$.
5. Application : si $\mathfrak{q} \in \text{Spec } \mathbb{B}$, alors il existe $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{A}$ tel que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{B} = \mathfrak{q}$.

Exercice 9 (Correspondance entre filtres et idéaux propres) :

Soit \mathbb{A} un anneau de Boole. Un *filtre* sur \mathbb{A} est un ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{A}$ ayant les propriétés suivantes :

- On a $1 \in \mathcal{F}$, et $0 \notin \mathcal{F}$.
- Pour tous $a, b \in \mathcal{F}$, on a $a \cdot b \in \mathcal{F}$.
- Pour tout $a \in \mathcal{F}$, pour tout $b \in \mathbb{A}$, si $a \leq b$, alors $b \in \mathcal{F}$.

Un *ultrafiltre* sur \mathbb{A} est un filtre maximal pour l'inclusion.

1. Soit I un idéal propre de \mathbb{A} . Soit $\mathcal{F}(I) := \{1 + x \mid x \in I\}$. Montrer que $\mathcal{F}(I)$ est un filtre.
2. Donner une bijection, croissante pour l'inclusion, entre filtres et idéaux propres. En déduire une bijection entre ultrafiltres et idéaux maximaux.
3. Soit $C \subseteq \mathbb{A}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que C soit inclus dans un idéal propre de \mathbb{A} . En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que C soit inclus dans un filtre sur \mathbb{A} .
4. Soit \mathcal{F} un filtre sur \mathbb{A} . Montrer que \mathcal{F} est un ultrafiltre si et seulement si, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$ tels que $a \vee b \in \mathcal{F}$, on a $a \in \mathcal{F}$ ou $b \in \mathcal{F}$.