

# Corrigé du TD de Logique, feuille 1

## Exercice 2 (Plongements d'ordres : exemples) :

1. Soit  $(X, <)$  un ordre total dénombrable. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une énumération bijective de  $X$ . On construit par récurrence un plongement  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{Q}$ , en définissant successivement des plongements de  $\{x_0, \dots, x_n\}$  dans  $\mathbb{Q}$ . Si  $f(x_0), \dots, f(x_{n-1})$  ont été définis, on considère  $I_n = \{i < n \mid x_i < x_n\}$ . Si  $I_n$  est vide, prenons  $f(x_n) = \min(f(x_0), \dots, f(x_{n-1})) - 1$ . Symétriquement, si  $I_n = \{0, \dots, n-1\}$ , prenons  $f(x_n) = \max(f(x_0), \dots, f(x_{n-1})) + 1$ . Enfin, dans le dernier cas, soit  $a = \max\{f(x_i) \mid i \in I_n\}$  et  $b = \min\{f(x_i) \mid i \notin I_n\}$ . Prenons alors  $f(x_n) = \frac{a+b}{2}$ .

Le cas fini se traite de la même manière.

2. Par 1, tous les bons ordres au plus dénombrables se plongent dans  $\mathbb{Q}$ , donc dans  $\mathbb{R}$ . Réciproquement, soit  $(X, <)$  est un bon ordre se plongeant dans  $(\mathbb{R}, <)$ . Choisissons un plongement, et identifions  $X$  avec son image dans  $\mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $x \in X$  non maximal, l'élément  $s(x) = \min\{y \in X \mid y > x\}$  est dans  $X$ , et on a  $s(x) > x$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe un rationnel  $r_x$  tel que  $x < r_x < s(x)$ . La fonction  $x \mapsto r_x$  est strictement croissante sur son domaine de définition, et est donc injective. Comme il y a au plus un élément maximal dans  $X$ , on en déduit que  $X$  est au plus dénombrable.

## Exercice 3 (Plongements de bons ordres et segments initiaux) :

1. Soit  $I$  un segment initial propre, et  $b \in X \setminus I$ . Alors, pour tout  $a \in I$ , on a  $b > a$ . Considérons alors  $x = \min(X \setminus I)$ . On sait que, pour tout  $a \in I$ , on a  $a < x$ . De plus, par minimalité, comme l'ordre est total, si  $b \notin I$ , on a  $b \geq x$ . Donc  $I = X_{<x}$ .
2. Soit  $f : X \rightarrow X$  un plongement. Par l'absurde, soit  $E = \{x \in X \mid f(x) < x\}$ , et  $a = \min E$ . Alors,  $f(a) < a$ . Mais, comme  $f$  est strictement croissante, on a  $f(f(a)) < f(a)$ . Donc  $f(a) \in E$ , or  $f(a) < a = \min E$ , ce qui est une contradiction.

Supposons que  $f$  est un plongement initial. Soit  $x \in X$ . Alors  $f(x) \geq x$ , or  $f(x) \in \text{Im}(f)$ , donc  $x \in \text{Im}(f)$ . Donc  $f$  est surjective, donc bijective, donc un automorphisme de  $(X, <)$ . En appliquant le point précédent à  $f^{-1}$ , on déduit que, pour tout  $x \in X$ , on a  $f(x) \leq x$ . Donc  $f = \text{id}$ .

Si  $f : (X, <) \rightarrow (Y, <)$  et  $g : (Y, <) \rightarrow (X, <)$  sont des plongements initiaux entre bons ordres, on vérifie que  $f \circ g : (Y, <) \rightarrow (Y, <)$  et  $g \circ f : (X, <) \rightarrow (X, <)$  sont encore des plongements initiaux (une composée de plongements initiaux entre ordres totaux est un plongement initial). Donc, par le point précédent, on a  $f \circ g = \text{id}_Y$  et  $g \circ f = \text{id}_X$ . Donc  $f$  et  $g$  sont des isomorphismes.

3. Soit  $R \subseteq X \times Y$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que  $(X_{<x}, <)$  est isomorphe à  $(Y_{<y}, <)$ . On commence par constater que, si  $(X_{<x_1}, <)$  est isomorphe à  $(X_{<x_2}, <)$ , avec  $x_1 \leq x_2$ , alors on a un plongement initial  $X_{<x_2} \rightarrow X_{<x_1}$  obtenu comme composée  $X_{<x_2} \simeq X_{<x_1} \hookrightarrow X_{<x_2}$ . Par 2, on sait que ce plongement initial est l'identité. En particulier, on en déduit que l'inclusion  $X_{<x_1} \hookrightarrow X_{<x_2}$  est surjective, donc  $X_{<x_1} = X_{<x_2}$ , donc  $x_1 = x_2$ . Ainsi, on a montré que, si  $(x_1, y) \in R$  et  $(x_2, y) \in R$ , alors  $x_1 = x_2$ . De même, si  $(x, y_1) \in R$  et  $(x, y_2) \in R$ , alors  $y_1 = y_2$ .

Ensuite, montrons que  $\pi_1(R)$  est un segment initial de  $X$ . Soient  $a < x$  des éléments de  $X$ , avec  $x \in \pi_1(R)$ . Soit alors  $y \in Y$  tel que  $(x, y) \in R$ , et  $f : X_{<x} \rightarrow Y_{<y}$  un isomorphisme. Par transitivité, on a  $(X_{<a})_{<a} = X_{<a}$  et  $(Y_{<y})_{<f(a)} = Y_{<f(a)}$ . L'isomorphisme  $f$  se restreint alors en un isomorphisme  $X_{<a} \rightarrow Y_{<f(a)}$ . Donc  $(a, f(a)) \in R$ , donc  $a \in \pi_1(R)$ . Notons que  $f(a) < y$  et  $a < x$ , ce qui démontrera que la fonction définie par  $R$  est un plongement. Par symétrie,  $\pi_2(R)$  est un segment initial de  $Y$ .

Montrons par l'absurde que  $\pi_1(R) = X$  ou  $\pi_2(R) = Y$ . Soient donc  $x = \min(X \setminus \pi_1(R))$  et  $y = \min(Y \setminus \pi_2(R))$ . Autrement dit,  $\pi_1(R) = X_{<x}$  et  $\pi_2(R) = Y_{<y}$ . Alors,  $R$  est le graphe d'un isomorphisme  $(X_{<x}, <) \rightarrow (Y_{<y}, <)$ . Donc  $(x, y) \in R$ , contradiction. Finalement, si  $\pi_1(R) = X$ , alors  $R$  est le graphe d'un plongement initial  $X \rightarrow Y$ . Si  $\pi_2(R) = Y$ , alors  $\{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$  est le graphe d'un plongement initial  $Y \rightarrow X$ .

4. Une implication est claire. Supposons que  $(X, <)$  se plonge dans  $(Y, <)$ . Montrons que  $(X, <)$  se plonge initialement dans  $(Y, <)$ . On raisonne par disjonction de cas, en utilisant 3. Si  $(X, <)$  se plonge initialement dans  $(Y, <)$ , on n'a rien à faire. Supposons donc que  $(Y, <)$  se plonge initialement dans  $(X, <)$ . On a donc un plongement  $g \circ f : X \rightarrow X$ , obtenu par composition de  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$ . Par 2, on a, pour tout  $x \in X$ ,  $g(f(x)) \geq x$ . Or  $g(f(x)) \in \text{Im}(g)$ , donc, comme  $g$  est un plongement initial,  $x \in \text{Im}(g)$ . Donc  $g$  est surjective, donc est un isomorphisme, donc  $X$  se plonge initialement dans  $Y$ .

Montrons l'unicité du plongement initial. Soient  $f, g : X \rightarrow Y$  deux plongements initiaux. En utilisant 1, on montre que  $\text{Im}f$  est un segment initial de  $\text{Im}g$  ou  $\text{Im}g$  est un segment initial de  $\text{Im}f$ . Supposons par exemple que  $\text{Im}g$  est un segment initial de  $\text{Im}f$ . Considérons  $h = g \circ f^{-1} : \text{Im}f \rightarrow \text{Im}g$ . On sait que  $h$  est un plongement initial. En composant par l'inclusion  $\text{Im}g \rightarrow \text{Im}f$ , on a un plongement initial de  $\text{Im}f$  dans lui-même, qui est donc l'identité. Donc, pour tout  $x \in X$ , on a  $g(x) = f(x)$ .

**Exercice 4** (Bons ordres et anti-bons ordres) :

Supposons que  $(X, <)$  soit un bon ordre infini. On construit par récurrence une suite infinie strictement croissante de  $X$  en choisissant  $x_0 = \min X$  et  $x_{i+1} = \min(X \setminus \{x_j : j \leq i\})$ . On montre ainsi que  $(X, >)$  n'est pas un bon ordre.

**Exercice 5** (Un peu de structure sur les bons ordres) :

1. Soit  $(X, <)$  un bon ordre.

- a) On définit  $Y = X \sqcup \{0\}$ , où l'union disjointe est définie, par exemple, via  $A \sqcup B := \{0\} \times A \cup \{1\} \times B$ . On munit ensuite  $Y$  d'un ordre total étendant celui sur  $X$ , en décrétant que l'élément 0 est plus grand que tous les éléments de  $X$ . En utilisant le fait que l'ordre sur  $X$  est un bon ordre, on montre que  $Y$  est bien ordonné. Le plongement initial de  $X$  dans  $Y$  est clair.

Montrons que  $Y$  vérifie la propriété universelle voulue. Soit  $(Z, <)$  un bon ordre tel que  $(X, <) < (Z, <)$ . Soit  $f : X \rightarrow Z$  un plongement initial non surjectif. Soit  $b = \min(Z \setminus \text{Im}f)$ . On étend alors  $f$  à  $Y$ , en envoyant le plus grand élément de  $Y$  sur  $b$ . En raisonnant par disjonction de cas, on montre que cela définit un plongement initial de  $Y$  dans  $Z$ .

- b) Soient  $Y_1, Y_2$  des bons ordres vérifiant la propriété voulue. On sait que  $X < Y_1$ , donc  $Y_2 \leq Y_1$ . De même,  $Y_1 \leq Y_2$ . Donc  $Y_1$  et  $Y_2$  sont isomorphes.

2. Soit  $(X_i, <_i)_{i \in I}$  une famille non vide de bons ordres. Soit  $i \in I$ . Soit  $X$  l'ensemble des  $x \in X_i$  tels que  $(X_i)_{<_x}$  est l'image d'un plongement initial d'un des  $X_j$  dans  $X_i$ . Si  $X$  est vide, cela implique par le point 1 de l'exercice 3 qu'il n'y a pas de plongements initiaux propres d'un  $X_j$  vers  $X_i$ . On peut alors prendre  $i_0 = i$ . Supposons donc  $X \neq \emptyset$ . Soit  $a = \min X$ . Soient  $i_0 \in I$  et  $f : X_{i_0} \rightarrow X_i$  un plongement initial tel que  $(X_i)_{<_a} = \text{Im}f$ . On va montrer que, pour tout  $j \in I$ , on a  $X_{i_0} \leq X_j$ .

Soit  $j \in I$ . Si  $X_{i_0} \leq X_j$ , on n'a rien à faire. Par la question 3 de l'exercice 3, supposons donc que  $X_j \leq X_{i_0}$ . Soit  $g : X_j \rightarrow X_{i_0}$  un plongement initial. En composant, on a donc un plongement initial  $f \circ g : X_j \rightarrow X_i$ , dont l'image est un segment initial de  $\text{Im}f = (X_i)_{<_a}$ . Par minimalité de  $a$ , et par la question 1 de l'exercice 3, cette image est égale à  $\text{Im}f$ . Comme  $f$  est injective, cela implique que  $g$  est surjective, donc bijective. Donc  $X_j$  est isomorphe à  $X_{i_0}$ , donc  $X_{i_0} \leq X_j$ .

**Exercice 6** (Axiomes du choix) :

4. Soit  $f$  une fonction de choix sur  $X$ . On définit la suite suivante par récurrence,  $x_{n+1} = f(\{y : (x, y) \in \mathcal{R}\})$ . Cette suite a les propriétés requises.
5. On peut injecter  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  dans  $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  en envoyant chaque  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  sur  $(x, \min\{n : x \in X_n\})$ . Par axiome du choix dénombrable, on trouve une famille  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , où  $f_i$  est une bijection entre  $X_i$  et  $\mathbb{N}$ . On peut alors construire une bijection entre  $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  et  $\mathbb{N}^2$  (qui est dénombrable) en envoyant  $(x, i)$  sur  $(f_i(x), i)$ .

**Exercice 7** (Ordinaux) :

1. Soit  $\alpha$  un ordinal, et  $a \in \alpha$ . Montrons d'abord que  $a$  est transitif. Comme  $\alpha$  est transitif, on sait que  $a \subseteq \alpha$ . Soit  $x \in a$ . Montrons que  $x \subseteq a$ . Soit donc  $t \in x$ , montrons que  $t \in a$ . On sait que  $x \in a \subseteq \alpha$ , donc  $x \in \alpha$ . Or  $\alpha$  est transitif, donc  $x \subseteq \alpha$ . Donc  $t \in x \subseteq \alpha$ , donc  $t \in \alpha$ . Ainsi, les ensembles  $a, x, t$  sont des éléments de  $\alpha$ . De plus, on a  $t \in x$  et  $x \in a$ . Or, la relation  $\in$  définit sur  $\alpha$  une relation d'ordre strict. Donc, par transitivité (pour les relations d'ordre), on a bien  $t \in a$ .

Il reste à montrer que  $a$  est bien ordonné par  $\in$ . Comme  $a \subseteq \alpha$ , il s'agit simplement d'utiliser le fait que la restriction d'un bon ordre est un bon ordre.

2. Il s'agit simplement d'utiliser la question 1 de l'exercice 3.
3. Soient  $\alpha, \beta$  des ordinaux tels que  $(\alpha, \in) \simeq (\beta, \in)$ . Montrons que  $\alpha = \beta$ . Supposons par l'absurde que  $\alpha \neq \beta$ . Soit  $f : \alpha \rightarrow \beta$  un isomorphisme. Soit  $\gamma = \min\{x \in \alpha \mid f(x) \neq x\}$ . Alors, si  $x \in \gamma$ , on sait que  $x \in \alpha$ , et donc, par minimalité,  $f(x) = x$ . De plus, comme  $f$  est un isomorphisme, on sait que, pour  $x \in \alpha$ , on a  $x \in \gamma$  si et seulement si  $f(x) \in f(\gamma)$ . Donc  $f(\gamma) = \{f(x) \mid x \in \gamma\} = \{x \mid x \in \gamma\} = \gamma$ . Donc  $f(\gamma) = \gamma$ , ce qui est absurde.

4. Soient  $\alpha, \beta$  des ordinaux. Si  $\alpha \subseteq \beta$ , comme  $\alpha$  est transitif, l'inclusion canonique est un plongement initial pour  $\in$ . Supposons donc que  $\alpha$  se plonge initialement dans  $\beta$ , et montrons que  $\alpha \subseteq \beta$ . Par unicité du plongement initial (question 4 de l'exercice 3), on sait que l'application  $f$  qui à  $x \in \alpha$  associe l'unique  $y \in \beta$  tel que  $(\alpha_{<x}, <) \simeq (\beta_{<y}, <)$ , où  $<$  est la relation  $\in$ . Or, par transitivité, on a  $\alpha_{<x} = x$  pour tout  $x \in \alpha$ , et  $\beta_{<y} = y$  pour tout  $y \in \beta$ . Donc, par la question précédente, on a  $f(x) = x$  pour tout  $x \in \alpha$ . Donc  $\alpha \subseteq \beta$ , comme voulu.

Le dernier point découle alors de la question 3 de l'exercice 3.

5. Soient  $\alpha, \beta$  des ordinaux distincts. Supposons que  $\alpha \subseteq \beta$ . Alors,  $\alpha$  a un plongement initial propre dans  $\beta$ , qui, par unicité, est l'inclusion canonique. Donc  $\alpha$  est un segment initial propre de  $\beta$ , donc, par 2,  $\alpha \in \beta$ .
6. Soit  $X$  un ensemble transitif dont les éléments sont des ordinaux. Montrons que  $X$  est un ordinal. Il s'agit de montrer que  $X$  est bien ordonné par  $\in$ . Montrons d'abord que  $\in$  définit bien une relation d'ordre strict sur  $X$ .

Montrons l'antiréflexivité. Soit  $x \in X$ . Montrons que  $x \notin x$ . On sait que  $x$  est un ordinal. Or, la relation  $\in$  définit sur  $x$  un ordre strict. Si  $x \in x$ , alors l'élément  $x$  de  $x$  est strictement inférieur à lui-même, ce qui est en contradiction avec le fait que  $(x, \in)$  est un ordre strict. Donc  $x \notin x$ .

Montrons la transitivité. Soit  $x, y, z$  des éléments de  $X$  tels que  $x \in y$  et  $y \in z$ . On sait que  $z$  est un ordinal, donc est transitif. Ainsi,  $x \in y \subseteq z$ , donc  $x \in z$ , comme voulu.

Pour finir, démontrons la propriété de bon ordre. Notons d'abord que, par la question précédente, l'ordre est total. Soit  $A \subseteq X$  une partie non vide. Soit  $a \in A$ . On sait que  $a$  est un ordinal, donc est bien ordonné par  $\in$ . Donc  $a \cap A$  est aussi bien ordonné par  $\in$ . On raisonne alors par disjonction de cas.

Supposons que  $a \cap A$  est non vide. Soit  $b = \min(a \cap A)$ . Alors,  $b \in A$ . De plus, si  $c \in A$  est différent de  $b$ , on a  $b \in c$  ou  $c \in b$ . Or,  $b$  est un élément de  $a$ , qui est transitif, et  $b = \min(a \cap A)$ . Donc, pour tout  $c \in A$ ,  $c = b$  ou  $b \in c$ . Donc  $b$  est bien le plus petit élément de  $A$ .

Supposons que  $a \cap A = \emptyset$ . Soit  $c \in A$ . Par 5, on a  $a \in c$  ou  $c \in a$  ou  $c = a$ . Le deuxième cas est exclu, car  $a \cap A = \emptyset$ . On en déduit que  $a$  est le minimum de  $A$ . Donc  $X$  est bien ordonné par  $\in$ , comme voulu.

7. L'unicité découle de la question 3. Soit  $(X, <)$  un bon ordre. Soit  $R$  l'ensemble des couples  $(x, \alpha)$  tels que  $\alpha$  est un ordinal et  $(X_{<x}, <) \simeq (\alpha, \in)$ . On vérifie comme dans l'exercice 3 que  $R$  définit une bijection d'un segment initial  $I$  de  $X$  avec un ensemble  $Y$  d'ordinaux. De plus, l'ensemble  $Y$  est transitif : en effet, si  $(x_1, \alpha_1)$  est dans  $R$ , et  $\beta$  est un ordinal, avec  $\beta \in \alpha_1$ , on peut restreindre l'isomorphisme  $\alpha_1 \simeq X_{<x_1}$  à  $\beta$ , ce qui donne un isomorphisme entre  $\beta$  et un segment initial propre de  $X$ . Donc  $\beta \in Y$ , donc  $Y$  est transitif. Alors, par la question précédente,  $Y$  est lui-même un ordinal. On montre alors, comme dans l'exercice 3, que  $I = X$ . Enfin, la fonction définie par  $R$  préserve l'ordre : si  $x < y$  sont dans  $X$ , si  $\alpha, \beta$  sont des ordinaux tels que  $X_{<x} \simeq \alpha$  et  $X_{<y} \simeq \beta$ , alors  $\alpha$  se plonge initialement dans  $\beta$  de manière stricte, donc  $\alpha \in \beta$ .

On en déduit que toute famille d'ordinaux admet une borne supérieure, à savoir l'union de cette famille. En effet, une union d'ordinaux est un ensemble d'ordinaux, dont on vérifie facilement qu'il est transitif.