

TD de Logique, feuille 1

21 et 23 septembre 2022

Les exercices marqués d'une flèche sont à chercher en priorité. Les corrections seront concentrées sur ceux-là, mais vous pouvez toujours me demander des précisions concernant les autres exercices. Les questions ou exercices marqués d'une étoile sont plus difficiles.

→ **Exercice 1** (Calculs de cardinalités) :

- Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables (i.e. en bijection avec \mathbb{N}) ou indénombrables.
 - L'ensemble \mathbb{N}^2 ,
 - l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers,
 - l'ensemble des suites de rationnels qui convergent vers 0.
 - l'ensemble des suites de rationnels qui sont constantes à partir d'un certain rang.
- Montrer que \mathbb{R} , $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.

→ **Exercice 2** (Plongements d'ordres, exemples) :

Un *plongement* d'un ensemble ordonné $(X, <)$ dans un autre $(Y, <)$ est une application injective $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(x) < f(x')$ ssi $x < x'$ pour tout $x, x' \in X$.

- Montrer que tout ordre total dénombrable ou fini se plonge dans $(\mathbb{Q}, <)$. (Construire un plongement par récurrence, en définissant une suite de plongements partiels)
- Quels sont les bons ordres qui admettent un plongement dans $(\mathbb{R}, <)$?

→ **Exercice 3** (Plongements de bons ordres et segments initiaux) :

Un *segment initial* d'un ordre $(E, <)$ est une partie $I \subseteq E$ telle que, pour $x, y \in E$, si $y \in I$ et $x < y$, alors $x \in I$. Si $x \in E$, on note $E_{<x}$ le segment initial constitué des éléments de E qui sont strictement inférieurs à x . On dira que $(X, <)$ se plonge initialement dans $(Y, <)$ s'il existe un plongement $f : X \rightarrow Y$ dont l'image est un segment initial de Y . Un tel f sera appelé plongement initial. On fixe deux bons ordres $(X, <)$ et $(Y, <)$.

- Montrer que tout segment initial propre de X est de la forme $X_{<x}$, pour un certain $x \in X$.
- Soit $f : X \rightarrow X$ un plongement. Montrer que, pour tout $x \in X$, on a $f(x) \geq x$. En supposant de plus que f est un plongement initial, montrer que $f = id_X$. En déduire que deux bons ordres se plongeant initialement l'un dans l'autre sont isomorphes.
- Montrer que $(X, <)$ se plonge initialement dans $(Y, <)$ ou $(Y, <)$ se plonge initialement dans $(X, <)$. Indication : Considérer l'ensemble R des couples (x, y) tels que $(X_{<x}, <)$ est isomorphe à $(Y_{<y}, <)$. On pourra montrer que les projections de R , sur X et Y respectivement, sont des segments initiaux.
- Montrer que $(X, <)$ se plonge dans $(Y, <)$ si et seulement si $(X, <)$ se plonge *initialement* dans $(Y, <)$, et que, dans ce cas, le plongement initial $X \rightarrow Y$ est unique.

Exercice 4 (Bons ordres et anti-bons ordres) :

On suppose que $(X, <)$ est un bon ordre et que $(X, >)$ est également un bon ordre. Montrer que X est fini.

Exercice 5 (Un peu de structure sur les bons ordres) :

Cet exercice utilise les résultats de l'exercice 3. Pour deux bons ordres $(X, <)$ et $(Y, <)$, on notera $(X, <) \leq (Y, <)$, ou même $X \leq Y$, si $(X, <)$ se plonge (initialement) dans $(Y, <)$. Si de plus, $(Y, <)$ ne se plonge pas dans $(X, <)$, on pourra écrire $X < Y$.

1. Soit $(X, <)$ un bon ordre.

- a) Montrer qu'il existe un ensemble bien ordonné $(Y, <)$ tel que $X < Y$, et, tel que, pour tout bon ordre $(Z, <)$, si $X < Z$, alors $Y \leq Z$.
- b) Montrer qu'un tel $(Y, <)$ est unique à isomorphisme près.

Autrement dit, $(Y, <)$ est le plus petit bon ordre ne se plongeant pas dans $(X, <)$. On notera $Y = X + 1$.

2. Soit $(X_i, <_i)_{i \in I}$ une famille non vide de bons ordres. Montrer qu'il existe un $i_0 \in I$ tel que, pour tout $j \in I$, on a $X_{i_0} \leq X_j$. Autrement dit, toute famille non vide de bons ordres a un plus petit élément.

Indication : on pourra fixer un $i \in I$, et considérer l'ensemble des $x \in X_i$ tels que $(X_i)_{<x}$ est l'image d'un plongement initial d'un des X_j dans X_i .

Exercice 6 (Axiomes du choix) :

On considère les trois énoncés suivants :

(AC) : tout produit d'ensembles non vides est non vide

(ACD) : si \mathcal{R} est une partie de $X \times X$ telle que, pour tout $x \in X$, il existe $y \in X$ tel que $(x, y) \in \mathcal{R}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X vérifiant $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dont on peut choisir le premier élément.

(ACden) : tout produit dénombrable d'ensembles non vides est non vide

(AC) est appelé *axiome du choix*, (ACD) est appelé *axiome des choix dépendants* et (ACden) est appelé *axiome du choix dénombrable*.

1. Montrer que (ACD) implique (ACden).

2. Une fonction de choix pour un ensemble X est une fonction $f : \mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ telle que pour tout $x \in \mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, $f(x) \in x$. Montrer que (AC) est équivalent à l'assertion que tout ensemble admet une fonction de choix.

3. Montrer que (AC) est équivalent au fait que toute surjection admet une section, i.e. pour toute surjection $g : X \rightarrow Y$ il existe $h : Y \rightarrow X$ telle que $g \circ h$ est l'identité sur Y .

4. Montrer que (AC) implique (ACD).

5. Montrer, en utilisant (ACden), que toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

(*) **Exercice 7** (Ordinaux) :

Un ensemble X est dit *transitif* si, pour tout $x \in X$, on a $x \subseteq X$. Un *ordinal* est un ensemble α qui est *transitif* et tel que la relation \in induit sur α une relation d'ordre strict, qui est un bon ordre.

1. Montrer que tout élément d'un ordinal est un ordinal.

2. Montrer que les segments initiaux propres d'un ordinal (pour la relation \in) sont exactement ses éléments.

3. Soient α, β des ordinaux tels que $(\alpha, \in) \simeq (\beta, \in)$. Montrer que $\alpha = \beta$.

Indication : soit f un tel isomorphisme. Par l'absurde, considérer $\gamma = \min\{x \in \alpha \mid f(x) \neq x\}$.

4. Soient α, β des ordinaux. Montrer que (α, \in) se plonge initialement dans (β, \in) si et seulement si $\alpha \subseteq \beta$ (on pourra utiliser les questions 3 et 4 de l'exercice 3 pour comprendre à quoi ressemble un éventuel plongement initial). En déduire que $\alpha \subseteq \beta$ ou $\beta \subseteq \alpha$.

5. Soient α, β des ordinaux distincts. Montrer que $\alpha \in \beta$ ou $\beta \in \alpha$.

6. Soit X un ensemble transitif dont les éléments sont des ordinaux. Montrer que X est un ordinal. En déduire que, pour tout ordinal α , l'ensemble $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal.

7. Montrer que tout bon ordre est isomorphe à un unique ordinal. En déduire que toute famille de bons ordres admet une borne supérieure, pour la relation \leq définie dans l'exercice 5.