

Modularité, synchronisation, bruit: étude de réseaux neuronaux par la Contraction nonlinéaire

Quang-Cuong Pham

Laboratoire de Physiologie de la Perception et de l'Action (LPPA)

Collège de France, Paris, France

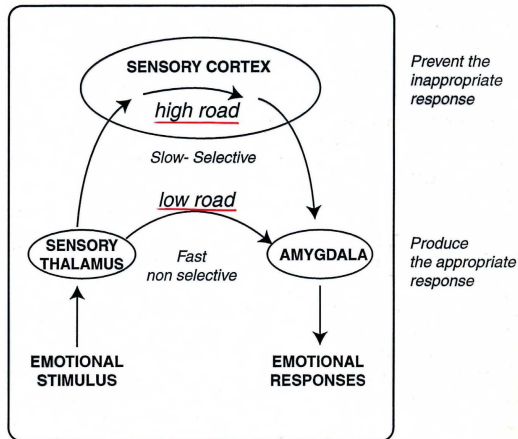
Travail réalisé en collaboration avec
J.-J. Slotine (MIT), N. Tabareau (INRIA Nantes),
B. Girard (Paris VI), A. Berthoz (CdF)

- 1 Théorie de la contraction nonlinéaire, modularité
- 2 Synchronisation stable, synchronization concurrente
- 3 Contraction stochastique
- 4 Synchronisation et protection contre le bruit

- 1 Théorie de la contraction nonlinéaire, modularité
- 2 Synchronisation stable, synchronization concurrente
- 3 Contraction stochastique
- 4 Synchronisation et protection contre le bruit

- Les systèmes biologiques (comme les réseaux neuronaux) sont **complexes** avec de **multiples boucles de rétroaction**
- Probabilité d'être stable décroît avec la taille du système (Grey Walter, 1951)

- L'Évolution: accumulation de composants stables?
- Comment la accumulation peut-elle **préserver** la stabilité?



Ledoux, *The Emotional Brain*, 1996

La *contraction*: un outil pour l'analyse de la stabilité

Considérons le système dynamique

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

Si $\exists \Theta(\mathbf{x}, t)$ tel que

$$\forall \mathbf{x}, t \quad \lambda_{\max}(\mathbf{J}_s) < -\lambda$$

où

$$\mathbf{J} = \left(\dot{\Theta} + \Theta \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \Theta^{-1} \quad \Theta(\mathbf{x}, t)^\top \Theta(\mathbf{x}, t) > 0$$

alors **toutes les trajectoires du systèmes** convergent exponentiellement vers une trajectoire unique, indépendamment des conditions initiales

Preuve: Considérer un chemin lisse entre chaque paire de trajectoires, et dériver sa longueur. . .

- Analyse exacte et globale (contrairement aux techniques de linéarisation)
 - Théorème inverse (stabilité exponentielle globale $\Rightarrow$ contraction dans une certaine métrique)
 - Propriétés de combinaison:
 - Parallèle
 - Hiérarchie
 - Feedback négatif
 - Petits gains
- $\Rightarrow$ Accumulation de systèmes **contractants**

Slotine, *Int J Adap Contr Sig Proc*, 2002

Example: feedback négatif

- Considérons la combinaison

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \end{cases}$$

où le système $\mathbf{x}_i$ est contractant avec taux λ_i dans la métrique $\mathbf{M}_i = \mathbf{\Theta}_i^T \mathbf{\Theta}_i$

- Supposons que la combinaison est en **feedback négatif**, i.e.

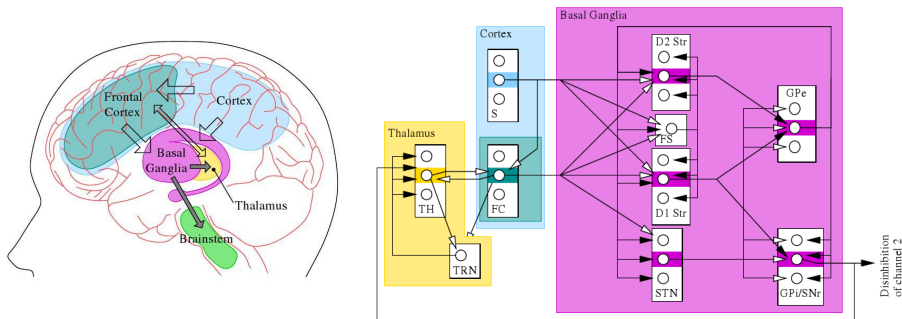
$$\mathbf{\Theta}_1 \mathbf{J}_{12} \mathbf{\Theta}_2^{-1} = -k \mathbf{\Theta}_2 \mathbf{J}_{21}^T \mathbf{\Theta}_1^{-1}$$

- Alors le système global est contractant avec taux $\min(\lambda_1, \lambda_2)$ dans la métrique $\mathbf{M} = \mathbf{\Theta}^T \mathbf{\Theta}$ où

$$\mathbf{\Theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Theta}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{k} \mathbf{\Theta}_2 \end{pmatrix}$$

Application: modélisation des ganglions de la base

- Ganglions de la base: rôle dans la sélection de l'action motrice
- Multiple boucles hiérarchiques et de rétroaction identifiées physiologiquement
- Construction d'un modèle contractant respectant les connexions identifiées

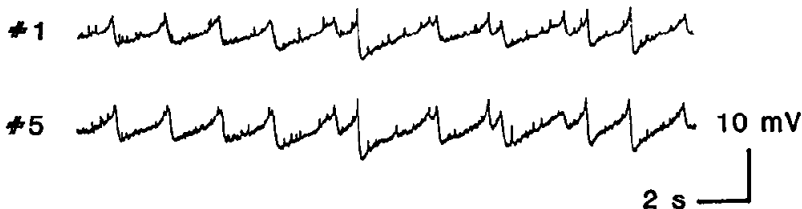


Girard, Tabareau, Pham, Berthoz & Slotine, *Neural Networks*, 2008

- 1 Théorie de la contraction nonlinéaire, modularité
- 2 Synchronisation stable, synchronization concurrente**
- 3 Contraction stochastique
- 4 Synchronisation et protection contre le bruit

Phénomènes de synchronisation

- Observation: comportement similaire dans le temps de neurones différents



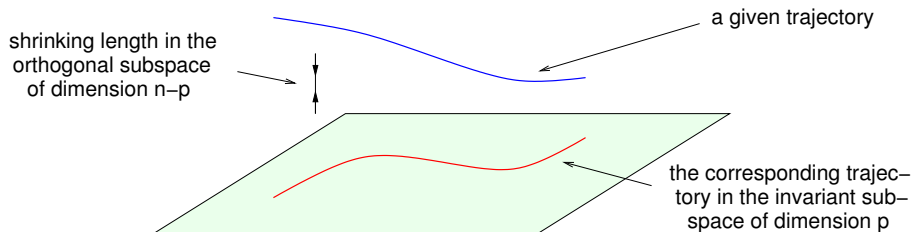
Christie et al, *J Neurosci*, 1989

- Mécanismes: connexions des neurones via des synapses chimiques ou électriques, phénomènes de réseau

- Permettre la communication et la coopération entre sites distants.
Exemple: relier différents attributs – couleur, forme, mouvement – d'un objet (le problème du “binding”, Engel et Singer, *Trends Cog Sci*, 2001)
- Amplification d'un signal ou protection contre le bruit (voir plus tard)
- ...

Synchronisation et contraction

Synchronisation = convergence vers un sous-espace vectoriel



Exemple: $\{\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3\}$ sous-espace de dimension 2 (dans l'espace global des états, de dimension 3)

Contraction vers un sous-espace flot-invariant

Considérons le système $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ (en général non contractant)

- Supposons qu'il existe un sous-espace flot-invariant $\mathcal{M}$, i.e. :

$$\forall t : \mathbf{f}(\mathcal{M}, t) \subset \mathcal{M}$$

- Considérons une “projection” orthonormale sur $\mathcal{M}^\perp$, décrite par une matrice $\mathbf{V}$ et contruisons le système auxiliaire

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{V}\mathbf{f}(\mathbf{V}^\top \mathbf{y} + \mathbf{U}^\top \mathbf{U}\mathbf{x}, t)$$

- Si le système $\mathbf{y}$ est contractant alors toutes les solutions du système $\mathbf{x}$ convergent exponentiellement vers $\mathcal{M}$.

Application à l'analyse de la synchronisation

- Considérons le réseau d'oscillateurs

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t) + \sum_{j \neq i} \mathbf{K}_{ji}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad i = 1 \dots n$$

- Écriture sous forme matricielle

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = \widehat{\mathbf{f}}(\widehat{\mathbf{x}}) - \mathbf{L}\widehat{\mathbf{x}}$$

où $\widehat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ et $\mathbf{L}$ est la matrice Laplacienne du système

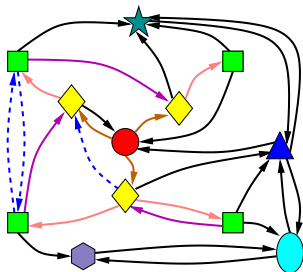
- Sous-espace flot-invariant $\{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) : \mathbf{x}_1 = \dots = \mathbf{x}_n\}$
- $\Rightarrow$ Si la dynamique des oscillateurs est bornée supérieurement, ces oscillateurs synchronisent pour un gain de couplage **L assez fort** (structure du réseau, gains $\mathbf{K}_{ij}$)

Hérite naturellement des propriétés de la contraction nonlinéaire

- Analyse exacte et globale
- Combinaisons: synchronisation concurrente (voir transparent suivant)
 - Hiérarchie
 - Feedback négatif
 - Petits gains

Synchronisation concurrente

Multiples groupes d'oscillateurs synchronisés à l'intérieur d'un groupe mais pas entre les groupes

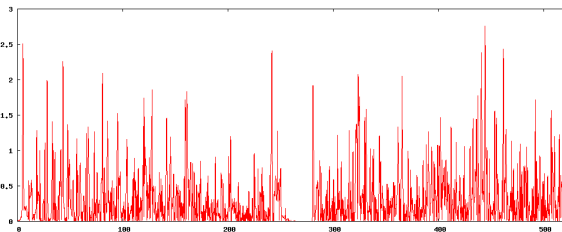
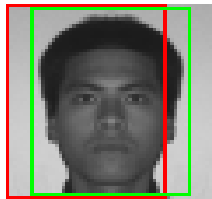
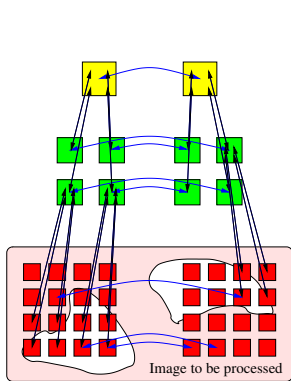


- Sous des conditions simples, le groupe **vert** synchronise exponentiellement (délivrant ainsi un input synchronisé aux éléments extérieurs)
- Pareil pour le groupe **jaune**
- Indépendamment des dynamiques, connections, délais des autres systèmes

Pham & Slotine, *Neural Networks*, 2007

⇒ Accumulation et cohabitation de multiples ensembles de neurones synchronisés

Exemple: détection de symétrie



Pham & Slotine, *Neural Networks*, 2007

- 1 Théorie de la contraction nonlinéaire, modularité
- 2 Synchronisation stable, synchronization concurrente
- 3 Contraction stochastique**
- 4 Synchronisation et protection contre le bruit

- Les systèmes (biologiques, artificiels, ...) sont souvent soumis à des perturbation aléatoires
- **Bénéficier** des propriétés de la contraction
 - Outil simple et puissant, analyse exacte et globale
 - Propriétés de combinaisons
 - Synchronisation concurrente

Modélisation du bruit à l'aide des équations différentielles stochastiques
d'Itô

$$d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)dt + \sigma(\mathbf{x}, t)dW$$

- $\mathbf{f}$ est la dynamique sans bruit
- σ est la matrice de variance du bruit
- W est un processus de Wiener ($dW/dt = \text{"bruit blanc"}$)

Le théorème de contraction stochastique

- Si le système sans bruit est **contractant**

$$\lambda_{\max}(\mathbf{J}_s) \leq -\lambda$$

- et que la variance du bruit est **bornée supérieurement**

$$\text{tr} \left(\sigma(\mathbf{x}, t)^T \sigma(\mathbf{x}, t) \right) \leq C$$

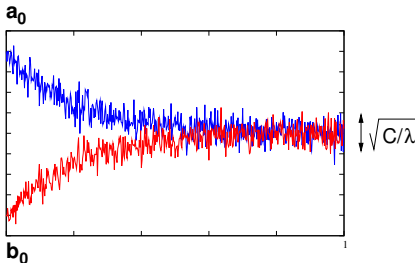
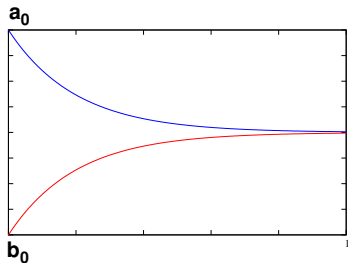
- Alors

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{E} \left(\|\mathbf{a}(t) - \mathbf{b}(t)\|^2 \right) \leq \frac{C}{\lambda} + \|\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0\|^2 e^{-2\lambda t}$$

Pham, Tabareau & Slotine, *IEEE Trans Aut Contr*, 2009

Après un temps caractéristique de $1/\lambda$, on a

$$\mathbb{E}(\|\mathbf{a}(t) - \mathbf{b}(t)\|) \leq \sqrt{\frac{C}{\lambda}}$$

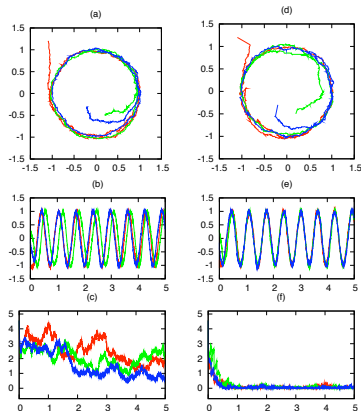


Les résultats en contraction **déterministe** peuvent être appliqués naturellement au domaine stochastique:

- Parallèle
- Hiérarchie
- Feedback négatif
- Petits gains

Synchronisation

- d'oscillateurs soumis aux perturbations aléatoires

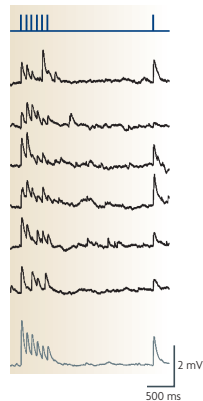


- Construction d'observateurs

- 1 Théorie de la contraction nonlinéaire, modularité
- 2 Synchronisation stable, synchronization concurrente
- 3 Contraction stochastique
- 4 Synchronisation et protection contre le bruit

Bruit dans le système nerveux

- Observation: réponse variable d'un neurone à des simulations identiques



- Causes: bruit de canal, bruit synaptique, etc.

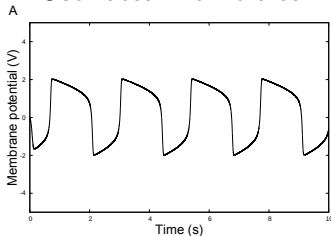
Effet du bruit sur la synchronisation

- Le bruit peut **détruire** la synchronisation
- ou, au contraire, la **rendre possible**: Mainen et Sejnowski (*Science* 1995), Teramae et Tanaka (*PRL* 2004)

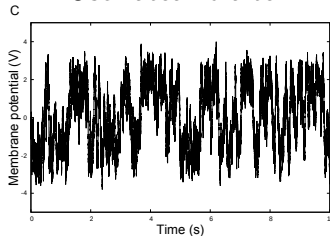
- Nous étudions ici la relation inverse: l'effet de la synchronisation sur le bruit
- Ce faisant, nous identifions un autre rôle pour la synchronisation (cf section précédente)

Le bruit perturbe la trajectoire des oscillateurs

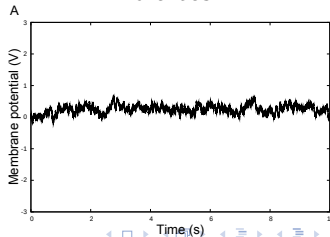
Oscillateur non bruité



Oscillateur bruité



Moyenne de 100 oscillateurs
bruités



Le **moyennage** ne permet pas de supprimer le bruit

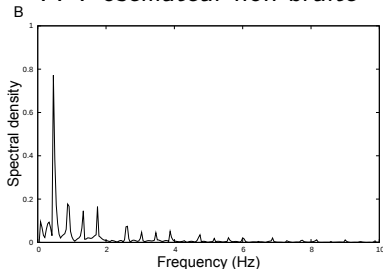
Le bruit perturbe la trajectoire des oscillateurs

En présence de perturbations importantes, les codages

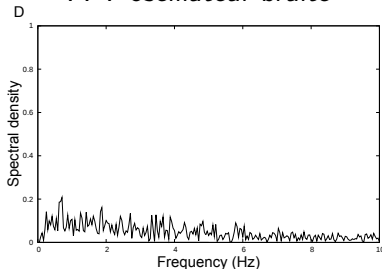
- temporel
- fréquentiel
- de population (averaging)

sont impraticables!

FFT oscillateur non bruité

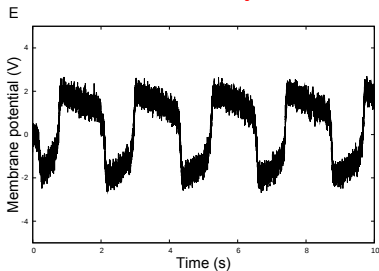


FFT oscillateur bruité

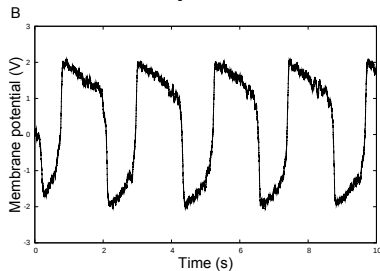


La synchronisation protège contre le bruit

Oscillateur bruité **synchronisé**



Moyenne de 100 oscillateurs
bruités synchronisés

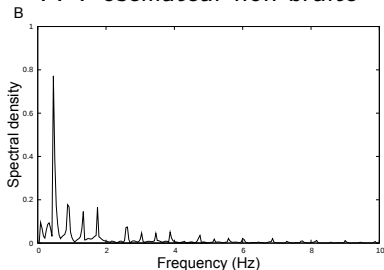


Tabareau, Slotine & Pham, *PLoS Comput Biol*, 2010

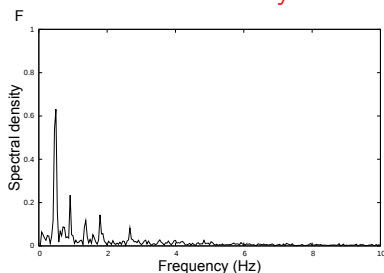
La synchronisation protège contre le bruit

En fréquentiel

FFT oscillateur non bruité



FFT oscillateur bruité **synchronisé**



Hypothèses

Réseau de n oscillateurs **bruités** et couplés diffusivement (équations d'Itô):

$$d\mathbf{x}_i = \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t) + \sum_{j \neq i} \mathbf{K}_{ji}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \right) dt + \sigma dW_i, \quad i = 1 \dots n$$

Ou “à la physicienne”

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t) + \sum_{j \neq i} \mathbf{K}_{ji}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + \sigma \xi_i, \quad i = 1 \dots n$$

avec ξ représentant du “bruit blanc”

Hypothèses (suite)

Quatre assumptions:

- A1 Le réseau est équilibré: pour chaque oscillateur,
 $\sum_j \mathbf{K}_{ji} = \sum_j \mathbf{K}_{ij}$
- A2 La nonlinéarité de $\mathbf{f}$ est bornée: $|\lambda_{\max}(\mathbf{H}_j)| \leq \frac{1}{\sqrt{d}} \mathbf{H}_{bd}$
- A3 La dynamique de $\mathbf{f}$ est résistante aux **petites** perturbations
- A4 Les oscillateurs sont **synchronisés**:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i < j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 \right) \leq \rho$$

Sous ces hypothèses, quand $\rho/n^2 \rightarrow 0$ et $n \rightarrow \infty$, l'effet du bruit sur chaque oscillateur évolue comme

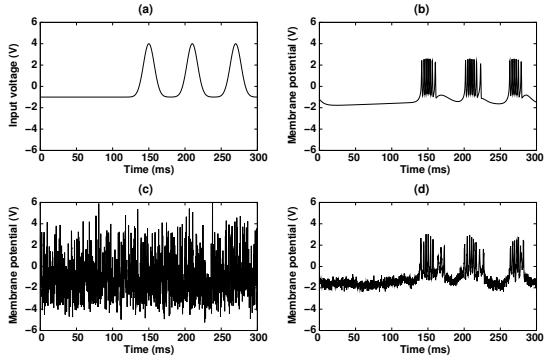
$$\frac{\rho \mathbf{H}_{bd}}{2n^2} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Remarque: quand les systèmes sont linéaires, on a $\mathbf{H}_{bd} = 0$ et on retrouve le résultat connu pour les systèmes linéaires

- Comparer la trajectoire moyenne à une trajectoire sans bruit
- Puisque les trajectoires sont proches entre elles (A4), elles sont proches de la trajectoire moyenne

Entrées variables dans le temps

- a Entrée
- b Sortie non bruitée
- c Sortie bruitée
- d Sortie bruitée
synchronisée



⇒ Préserve le signal même en présence de perturbations importantes

Merci de votre attention!