Le problème de la rigidité des graphes

Quang-Cuong Pham   Thanh-Trung Nguyen

12 juin 2005

1 Généralités

1.1 Le problème de la réalisation unique

Considérons un graphe $G = (V, E)$ constitué de $n = |V|$ sommets et de $m = |E|$ arêtes. Une réalisation de G est une application $p : V \to \mathbb{R}^d$ qui à tout sommet de G associe un point de l'espace euclidien. On s'intéresse au problème de savoir si $p(G)$, appelée aussi charpente, peut se fléchir tout en gardant les longueurs des arêtes constantes.

Définition 1 (Réalisation générique) *Une réalisation est dite générique si les coordonnées des sommets sont algébriquement indépendantes sur le corps des rationnels.*

Définition 2 (Flexion finie) *Une flexion finie d'une charpente $p(G)$ est une famille de réalisations de G paramétrées par t telle que la position de chaque sommet i soit une fonction différentiable de t et que $(p_i(t) - p_j(t))^2 =$ constante. Une flexion finie est dite triviale s'il s'agit d'un mouvement de l'espace euclidien lui-même, par exemple une rotation ou une translation.*

En différentiant la dernière relation par rapport à t, on trouve $(v_i - v_j).(p_i - p_j) = 0$ pour tout $(i, j) \in E$, où v_i est la vitesse intantanée du sommet i.

Définition 3 (Mouvement infinitésimal) *Un mouvement infinitésimal est un assignement de vitesses qui satisfait l'équation précédente pour une charpente particulière.*

Clairement, l'existence d'une flexion finie implique celle d'un tel mouvement, et la réciproque est également vraie pour les réalisations génériques.

Une charpente est dite infinitésimalement flexible lorsqu'elle possède un mouvement infinitésimal non trivial. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est infinitésimalement rigide.

Théorème 1 (Gluck) *Si un graphe possède une réalisation infinitésimalement rigide, alors toutes ses réalisations génériques aussi.*

Les différentes charpentes d'un graphe sont donc ou bien toutes flexibles, ou bien presque toutes rigides. Ainsi, on pourra parler de *graphe* infinitésimalement flexible ou rigide, sans faire référence à une réalisation particulière.

1.2 Conditions générales de rigidité

En dimension d, un ensemble de n points a nd mouvements indépendants. Cependant, un corps rigide de dimension d' a d translations et $d(d-1)/2$ rotations, si $d = d'$, ou $d'(2d - d' - 1)/2$ si $d' < d$. Ainsi, le nombre de mouvements non-rigides d'un ensemble de n points vaut $S(n, d)$ où

$$S(n,d) = \begin{cases} nd - d(d+1)/2 & si \quad n \geq d \\ n(n-1)/2 & sinon \end{cases}$$

Si chaque arête ajoute une contrainte indépendante, alors $S(n, d)$ arêtes sont nécessaires et suffisantes pour éliminer tout mouvement non-rigide du graphe. Le problème est donc décider quand un ensemble d'arêtes est libre (*id est* quand il est constitué d'arêtes indépendantes).

Lemme 1 *Soit $G = (V, E)$. Si $m > S(n, d)$ où $m = |E|$ et $n = |V|$, alors les m arêtes ne sont pas indépendantes.*

Théorème 2 *Si un graphe $G = (V, E)$ ayant exactement $S(n, d)$ arêtes est rigide, alors il ne possède aucun sous-graphe $G' = (V', E')$ avec plus de $S(n', d)$ arêtes.*

Voir la démostration dans la partie suivante.

Lemme 2 *Tout graphe rigide possède un sous-graphe rigide avec exactement $S(n, d)$ arêtes.*

Le théorème 2 combiné au lemme 2 nous fournit une condition nécessaire pour décider la rigidité d'un graphe. Cependant, on ne connait pas de caractérisation suffisante d'un graphe rigide en dimension $d \geq 3$.

2 Le cas de la dimension 2

2.1 Théorème de Laman et conséquences

Définition 4 (Sous-graphe induit) *Soit $G = (V, E)$ un graphe et E' un sous-ensemble de E. Le sous-graphe de G induit par E' est le graphe $G' = (\{v \in V | \exists v' \in V, \exists e \in E', e = (v, v')\}, E')$. On pourra le noter $\mathcal{G}(E')$.*

Désormais, lorsqu'on parlera d'un sous-graphe G' de G, il faudra comprendre un sous-graphe G' de G induit par un certain sous-ensemble d'arêtes

E'. On parlera éventuellement de sous-graphe induit par un sous-ensemble de sommets, mais dans ce cas, on le précisera explicitement.

Pour alléger les notations, on conviendra désormais que $m = |E|$, $n = |V|$, $m' = |E'|$, $n' = |V'|$, etc.

Théorème 3 (Laman) *Les arêtes d'un graphe $G = (V, E)$ sont indépendantes en dimension 2 si et seulement s'il n'existe aucun sous-graphe $G' = (V', E')$ de G tel que $m' > 2n' - 3$.*

Corollaire 1 *Un graphe G tel que $m = 2n - 3$ est rigide en dimension 2 si et seulement s'il n'existe aucun sous-graphe G' de G tel que $m' > 2n' - 3$.*

$\Rightarrow$ Supposons par l'absurde qu'il existe un sous-graphe G' tel que $m' > 2n' - 3$. Par Laman, les $2n - 3$ arêtes de G seraient alors non indépendantes. On peut donc supprimer une des arêtes qui dépend des autres sans changer le caractère rigide ou non de G. Mais alors G ne dispose plus que de $2n - 2$ arêtes, ce qui est insuffisant pour assurer sa rigidité.

$\Leftarrow$ Supposons qu'il n'existe aucun sous-graphe G' de G tel que $m' > 2n' - 3$. Les $2n - 3$ arêtes de G sont alors indépendantes d'après Laman. On sait que $2n - 3$ arêtes indépendants suffisent pour rendre un système de n points rigides.

Corollaire 2 (Reformulation de Laman) *Pour un graphe $G = (V, E)$, il y a équivalence entre :*

1. *(i) Les arêtes de G sont indépendantes*
2. *(ii) Pour toute arête e de G, le graphe $G_{4e} = (E \cup \{e', e'', e'''\}, V)$, où e', e'', e''' sont des copies de e, n'a pas de sous-graphe $(G_{4e})'$ tel que $(m_{4e})' > 2(n_{4e})'$.*

$\neg(ii) \Rightarrow \neg(i)$ Supposons qu'il existe une arête e telle que G_{4e} possède un sous-graphe $(G_{4e})'$ dans lequel $(m_{4e})' > 2(n_{4e})'$. Retirons (éventuellement) e', e'', e''' de $(G_{4e})'$ pour obtenir G'. G' est évidemment un sous-graphe de G. Or $m' \geq (m_{4e})' - 3 > 2(n_{4e})' - 3 \geq 2n' - 3$, ce qui montre, d'après Laman, que les arêtes de G ne sont pas indépendantes.

$\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$ Supposons que les arêtes de G ne sont pas indépendantes. Il existe alors un sous-graphe G' de G tel que $m' > 2n' - 3$. Soit e une arête de ce sous-graphe. $(G')_{4e}$, le graphe obtenu de G' en quadruplant e, vérifie alors $(m')_{4e} > 2(n')_{4e}$ et de manière évidente $(G')_{4e}$ est un sous-graphe de G_{4e}.

Lemme 3 *Soit $\widehat{E}$ un sous-ensemble libre d'arêtes de G. Notons $\widetilde{E} = \widehat{E} \cup \{e\}$ et $\widetilde{G} = \mathcal{G}(\widetilde{E})$. Il y a équivalence entre :*

1. *(i) $\widetilde{E}$ est libre.*
2. *(ii) $\widetilde{G}_{4e}$ n'as pas de sous-graphe $(\widetilde{G}_{4e})'$ tel que $(\tilde{m}_{4e})' > 2(\tilde{n}_{4e})'$.*

$(i) \Rightarrow (ii)$ Évident par le théorème précédent.

$\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$ Supposons que les arêtes de $\widetilde{E}$ ne sont pas indépendantes. Il existe alors f telle que $\widetilde{G}_{4f}$ possède un sous-graphe $(\widetilde{G}_{4f})'$ dans lequel $(\tilde{m}_{4f})' > 2(\tilde{n}_{4f})'$. Ce sous-graphe contient nécessairement e (car sinon, f est telle que $\mathcal{G}(\widehat{E})_{4f}$ possède un sous graphe ...). Maintenant, on supprime (éventuellement) f', f'', f''' et on les remplace par e', e'', e''' pour obtenir un graphe $\check{G}$. Ce faisant, on a conservé le nombre d'arêtes et on n'a pas augmenté le nombre de sommets. On a ainsi construit $\check{G}$, sous-graphe de $\widetilde{G}_{4e}$ tel que $\check{m} > 2\check{n}$.

Pour tester l'indépendance d'un ensemble d'arêtes E, on peut ainsi faire croître un sous-ensemble $\widehat{E}$ libre de E en y ajoutant des arêtes une à une, une arête pouvant être ajoutée si elle satisfait les conditions du lemme ci-dessus.

2.2 Le jeu de cailloux

On présente dans ce paragraphe un jeu de cailloux (« Pebble Game ») qui teste si une arête peut être ajoutée à un ensemble d'arêtes $\widehat{E}$ libre, en préservant cet invariant.

Chaque sommet d'un graphe G dispose initialement de deux cailloux, qu'on représente par des disques noirs. Il peut décider de couvrir une ou deux de ses arêtes incidentes avec ces cailloux, une arête ne pouvant accueillir plus d'un caillou à la fois. Un caillou utilisé est repeint en blanc, et on note sa provenance par une flèche.

Supposons que G dispose initialement d'une couverture de caillou. L'algorithme présenté intuitivement par les figures 1 et 2 permet de trouver une couverture lorsqu'une nouvelle arête est ajoutée.

Lemme 4 *Soit $G = (E, V)$ un graphe (induit) disposant initialement d'une couverture, et e une arête n'appartenant pas à E. Si l'algorithme de recherche de couverture partant de e échoue lorsqu'on ajoute e à E, alors le sous-ensemble $\check{E}$ de $E \cup \{e\}$ visité par l'algorithme induit un graphe $\check{G}$ tel que $\check{m} > 2\check{n}$.*

Supposons donc que l'algorithme échoue et considérons $\check{E}$ l'ensemle défini dans l'énoncé et $\check{V}$ le sous-ensemble de V induit par $\check{E}$.

Montrons d'abord que les cailloux de $\check{V}$ sont utilisés pour couvrir les arêtes de $\check{E}$, et uniquement celles-là. Supposons par l'absurde qu'un caillou de $v \in \check{V}$ est utilisé pour couvrir $f \notin \check{E}$. Alors la flèche de f est dirigée de v vers w, avec $w \notin \check{V}$. Mais alors l'algorithme aussi doit visiter f, donc $f \in \check{E}$, ce qui est absurde.

Puisque chaque sommet v de $\check{V}$ possède initialement 2 cailloux, que ces cailloux servent uniquement à couvrir $\check{E}$, mais qu'il n'y en a pas assez, on a bien $\check{m} > 2\check{n}$.

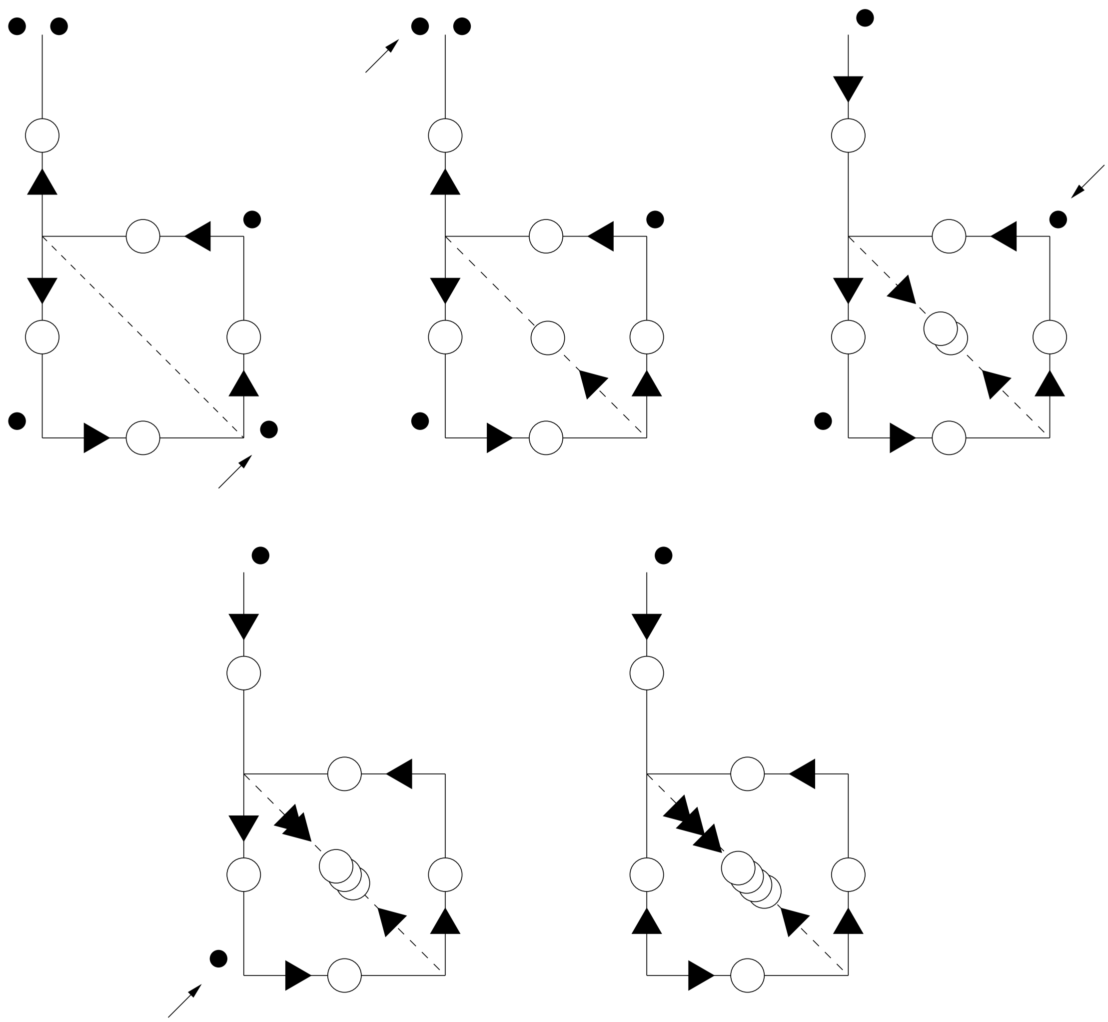

FIG. 1 – Recherche réussie

Lemme 5 *Soit $\widehat{E}$ un ensemble libre. On suppose qu'au départ $\widehat{G} = \mathcal{G}(\widehat{E})$ dispose d'une couverture. Alors, pour $e \notin \widehat{E}$, $\widehat{G}_{3e}$ dispose aussi d'une couverture de cailloux.*

Si ce n'est pas le cas, le lemme précédent montre qu'on peut trouver un sous-graphe $(\widehat{G}_{3e})'$ dans lequel $(\hat{m}_{3e})' > 2(\hat{m}_{3e})'$. Retirons (éventuellement) les trois copies de e et quadruplons n'importe quelle autre arête de ce sous-graphe. Ce faisant, on n'a pas changé le nombre d'arête ni n'a augmenté le nombre de sommets, mais on a obtenu un sous-graphe $\widehat{G}'$ de $\widehat{G}$ tel que $\hat{m}' > 2\hat{n}'$. Ceci est contradictoire avec le fait que $\widehat{E}$ est libre.

Lemme 6 *Si $\widehat{G}_{4e}$ n'a pas de couverture, alors les* sommets *visités par l'algorithme induisent un sous-graphe $\widehat{G}'$ de $\widehat{G}$ tel que $\hat{m}' = 2\hat{n}' - 3$.*

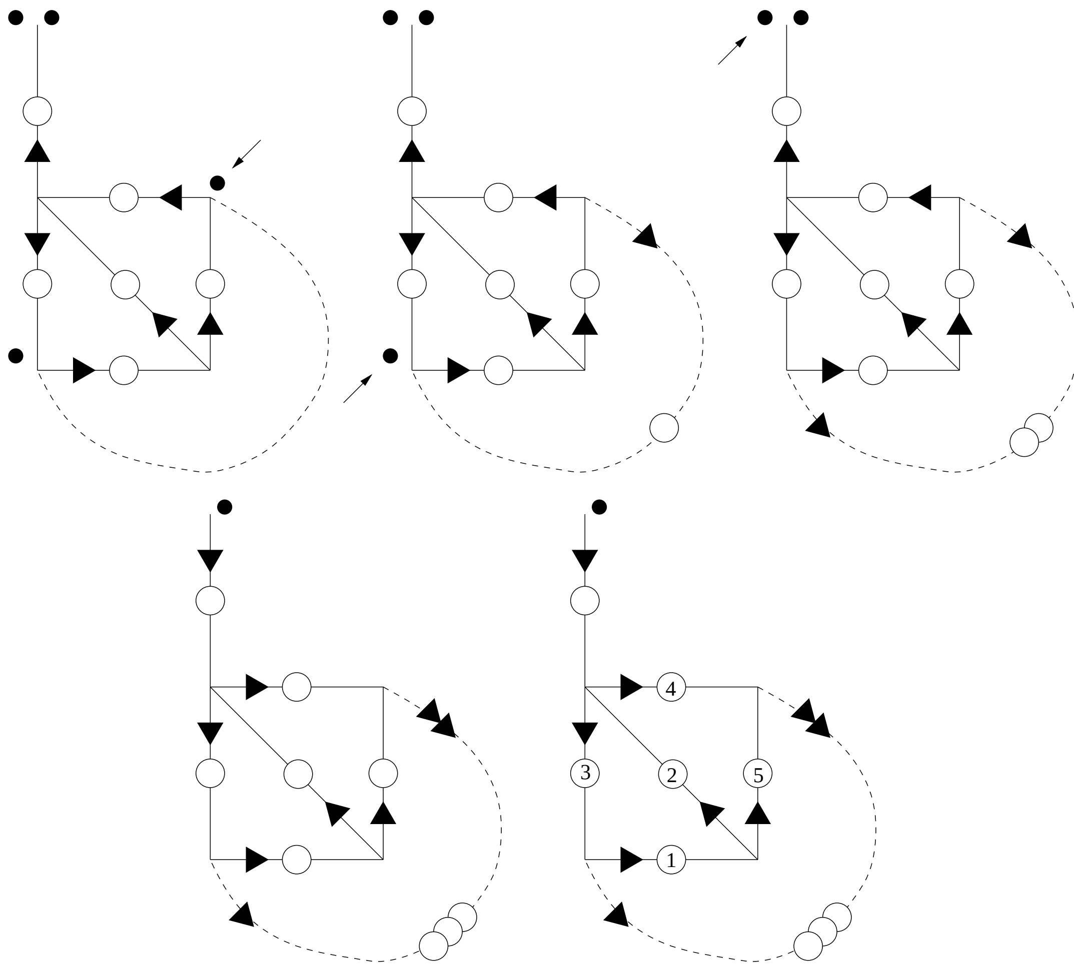

FIG. 2 – Recherche ratée

On a vu que les trois premières copies de e peuvent être couvertes. Comme on n'a pu trouver de caillou pour la quatrième copie, tous les cailloux des sommets visités sont utilisés, donc le sous-graphe induit par ces sommets sur $\widehat{G}$ vérifie $\hat{m}' \geq 2\hat{n}' - 3$. Puisque les $\hat{m}'$ arêtes sont indépendantes, on a égalité.

Théorème 4 *Soit $\widehat{E}$ un ensemble libre, et $e \notin \widehat{E}$. Alors $\widehat{E} \cup \{e\}$ reste libre si et seulement s'il existe une couverture lorsque e est quadruplée.*

$\Rightarrow$ Supposons qu'il n'existe pas de couverture quand e est quadruplé. Par le lemme précédent on peut identifier un sous-ensemble $\widehat{V}$ de V qui induit un sous-graphe $\widehat{G}'$ avec $\hat{m}' = 2\hat{n}' - 3$. Si les sommets adjacents de e ne sont pas dans $\widehat{V}$, le problème ne se pose pas. Dans le cas contraire, en ajoutant e à $\widehat{G}'$ on obtient un sous-graphe de $\widetilde{G} = \mathcal{G}(\widehat{E} \cup \{e\})$ tel que $\tilde{m} = 2\tilde{n} - 2 > 2\tilde{n} - 3$.

$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe une couverture. Soit un sous-graphe $(\widehat{G}_{4e})' = (E', V')$ de $\widehat{G}_{4e}$. Le nombre de cailloux disponibles pour couvrir E' est au plus $2n'$. Puisque toutes les arêtes dans E' sont couvertes, on a bien $m' \leq 2n'$. On conclut grâce au corollaire 2.

Références

[1] Bruce Hendrickson, *Conditions for unique graph realization*, 1992.

[2] Donald Jacobs, Bruce Hendrickson *An algorithm for two dimensional rigidity percolation*, 1997.