

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS — UFR Sciences
École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences
de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue par
Rémy OUDOMPHENG

Dualité rang-niveau des blocs conformes du groupe GL_n — périodes des surfaces d'Enriques polarisées par un réseau D_6

Thèse dirigée par Arnaud BEAUVILLE
soutenue le 2 décembre 2010

devant le jury composé de

Arnaud Beauville (Nice)	Professeur émérite	Directeur de thèse
Olivier Debarre (Paris – ENS)	Professeur des universités	Examineur
André Hirschowitz (Nice)	Professeur des universités	Examineur
Carlos Simpson (Nice)	Directeur de recherche	Examineur
Christoph Sorger (Nantes)	Professeur des universités	Rapporteur
Claire Voisin (Paris VI)	Directrice de recherche	Rapporteuse

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2

Merci...

Comme le veut probablement la tradition, je commencerai par remercier mon directeur de thèse, Arnaud Beauville, qui m'a toujours impressionné par sa grande sagesse, sa culture, qu'elle soit scientifique ou non, et dont j'ai en toutes circonstances apprécié le point de vue sur les mathématiques. Je remercie aussi Christoph Sorger et Claire Voisin d'avoir accepté de rapporter sur ce mémoire, ainsi qu'Olivier Debarre d'avoir accepté de se déplacer pour la soutenance.

Je tiens à saluer tous ceux avec qui j'ai pu avoir des discussions passionnantes au laboratoire Dieudonné : Antoine Ducros, Clemens Berger, Carlos Simpson, André Hirschowitz, Alexandru Dimca, Samuel Boissière, Bruno Vallette, Georges Comte. Ainsi qu'à Paris, François Charles, Olivier Benoist, David Madore, Joël Riou notamment. Je remercie aussi Frédéric Paulin et François Loeser, qui entre de nombreuses autres choses m'ont suggéré de venir travailler ici. Et Gilles, Guillaume, Mathieu, Rachel, Claire, Léo, Valentin, Sam, François, Léo, Florian pour tous les bons souvenirs, ainsi que les mauvais, qu'on a pu vivre ensemble.

Merci à Chiara, qui m'a accompagné tout le long et notamment dans les papiers de fin de thèse.

Merci à Véronique, Daniel, Sébastien, Pierre, David, Olivier, Mehdi, Cédric et Boris pour l'énergie qu'ils m'ont donnée ces derniers jours.

Je n'oublie pas tous les thésards qui m'ont accompagné, fréquenté ou subi pendant mon séjour : Thomas, Pierre, Delphine, Nicolas, Patrick, Michel, Hugues, Julianna, Joan, Xavier, qui sont déjà partis ; Hugo et Olivia, qui m'ont lâchement abandonné pour partir dans les pays lointains ; ceux qui sont encore là : Brice, Salima, Paul-Éric, Damien, Julien, Kruna, Hamad, Alain, Damien, Gaël, Benjamin, Benedikt, Amine, Mathieu, Camille, Thierry.

Merci aussi à tout le personnel du laboratoire, plus particulièrement à Stéphanie, Andrée, Angélique, Jean-Louis.

Je tiens aussi à ne pas laisser tomber ceux sans qui cette thèse n'aurait pas pu écrite, du moins pas sous la présente forme. Je tiens à remercier Jean-Marc et Julien, qui font un travail formidable ici, les contributeurs de `LuaTeX`, Taco Hoekwater, Arthur Reutenauer notamment, le travail formidable de Will Robertson concernant `LATEX3`, `fontspec` et `unicode-math`, et mes camarades d'*Arch Linux*, notamment François Charette et Ionuț Bîru. Je n'ai jamais rencontré certains d'entre eux, peut-être liront-ils un jour ces lignes.

Je remercie mes parents et ma famille, qui m'ont soutenu et aidé durant les derniers mois de la thèse, notamment pour l'organisation.

Et parce que c'est grâce à eux que mon séjour sur la Côte d'Azur me laissera des souvenirs inoubliables, je remercie aussi Anthony, Thibaut, Laurent, Christophe, Pascal et Sylvain grâce à qui j'ai pu passer d'excellents moments, ainsi que Tanguy, Anthony, Jean-Stéphane, Edwige, Florian, Erwan, Alexandre, Florian, Nicolas, et Richard.

Table des matières

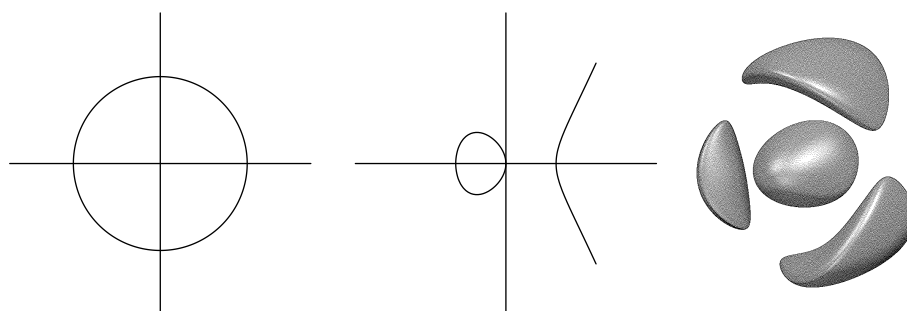
Table des matières	iii
Avant-propos	v
I Dualité rang-niveau des blocs conformes de GL_n	1
Introduction	3
1 Espaces de modules de fibrés, blocs conformes	7
2 Cellules de Schubert et structures paraboliques	21
3 Nombres d'intersections «quantiques» et preuve de la dualité	29
Conventions de notation	41
Références	43
II Périodes des surfaces d'Enriques polarisées par un réseau D_6	47
Introduction	49
4 Applications de périodes et anneaux jacobiens	53
5 Géométrie des surfaces de Campedelli et d'Enriques	61
6 Bijectivité de l'application de périodes	87
Conventions de notation	107
Références	109
Index	113
Table des matières	114

Avant-propos

Ce mémoire est consacré à deux travaux concernant des thèmes différents de géométrie algébrique. La géométrie algébrique étudie des objets définis par des équations polynomiales : ce sont des courbes, des surfaces, ou des objets ayant plusieurs dimensions, désignés par le terme générique de *variété*. La figure 1 en donne quelques exemples.

La géométrie algébrique entremêle traditionnellement deux approches. L'une algébrique, qui concerne la manipulation des équations, et leur interprétation géométrique : l'étude des équations permet de répondre par exemple à la question de l'intersection de plusieurs variétés, en utilisant la notion de coordonnées cartésiennes ou projectives, et l'algèbre commutative, qui est l'algèbre de la manipulation des polynômes en une ou plusieurs inconnues. Au vingtième siècle, la théorie des schémas et la notion de faisceau cohérent ont dégagé une manière de raisonner abstraitement sur ces équations, sans s'encombrer des problèmes calculatoires inhérents aux changements de coordonnées et d'équations.

L'autre approche, analytique, permet de considérer les objets de la géométrie algébrique comme mesurables et quantifiables. On se permettra ainsi de considérer nos variétés algébriques comme des variétés différentiables, d'y pratiquer l'analyse complexe, et d'y calculer des intégrales. Ces deux approches apparaissent en proportion variable dans les deux parties.



Ces figures représentent un cercle (d'équation $x^2 + y^2 = 1$), une courbe elliptique (d'équation $y^2 = x^3 - x$), et une surface K3 d'équation $z^2 + (x^2 + x + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 1)^2 - y^2) + 0.1 = 0$.

FIGURE 1: Quelques variétés algébriques

MODULES DES OBJETS GÉOMÉTRIQUES

La terminologie, aujourd'hui un peu vieillissante, de *modules* désigne la façon dont un objet géométrique (ou mathématique en général) peut varier : dans le cas le plus simple

où cet objet est défini par des paramètres variables, le terme de *modules* désigne simplement les paramètres en question. Ces paramètres peuvent être par exemple les coefficients d'une équation (ou plusieurs).

L'un des passe-temps favoris des géomètres consiste à rechercher, pour toutes sortes d'objets géométriques, un bon *espace de modules*, c'est-à-dire une entité géométrique, par exemple une variété, qui paramètre au mieux le type d'objet considéré. Un espace de modules parfait (on dit *fin*) serait en bijection exacte avec les variations possibles d'un objet ; le plus souvent, un compromis doit être trouvé entre la fidélité du paramétrage et la simplicité de l'objet qui fait office d'espace de modules.

Certaines techniques standard, comme la théorie des invariants, permettent de produire facilement des espaces de modules qui sont des variétés projectives, et fournissent des outils qui décrivent assez simplement en quoi ces espaces de modules sont *grossiers* (par opposition à *fins*). Il s'agit en général de trouver, pour un type d'objet fixé (nous en verrons quelques exemples dans la suite), de définir un paramétrage le plus explicite possible, quitte à accepter des paramètres redondants. Cette redondance doit s'exprimer par l'action d'un groupe de transformations : celui-ci doit traduire en quoi des changements de coordonnées peuvent modifier les paramètres sans changer l'objet produit. On cherche alors des *invariants*, c'est-à-dire des quantités, s'exprimant en fonction des paramètres, qui ne varient pas sous l'action du groupe de transformations.

La théorie géométrique des invariants, due à Mumford, est aujourd'hui omniprésente, et permet, avec un nombre de calculs très réduit, de comparer la variété décrite par les invariants à l'objet auquel on penserait naïvement, le quotient par le groupe de transformations.

LES FIBRÉS VECTORIELS

La première partie de cette thèse concerne un aspect de l'étude des fibrés vectoriels sur les courbes algébriques, qui sont le pendant de ce qui en analyse complexe est plus souvent appelé *surface de Riemann*. L'étude de ces fibrés vectoriels peut se faire d'un point de vue analytique : on peut les voir comme des systèmes d'équations différentielles linéaires (connexions plates), ou encore comme les représentations du *groupe fondamental* de la surface (travaux de Weil, Narasimhan et Seshadri, Donaldson, Atiyah et Bott).

Le point de vue algébrique sur les fibrés vectoriels les considère plutôt comme des faisceaux cohérents, c'est-à-dire des objets qui codent des fonctions à valeurs de type *vectoriel* (c'est-à-dire à plusieurs composantes), mais pour lesquelles le choix d'une base d'écriture ne peut pas nécessairement se faire de manière uniforme sur la totalité de l'objet géométrique considéré (la courbe algébrique).

Les modules des fibrés vectoriels peuvent être abordés à l'aide des schémas Quot de Grothendieck. Il s'agit essentiellement d'écrire les fibrés vectoriels à l'aide de générateurs (fixes) et de relations (variables) qui servent de paramètres. On construit ainsi des espaces de modules (*grossiers*) qui sont des variétés projectives.

Les coordonnées naturelles qui décrivent ces espaces de modules sont appelées *fonctions thêta non abéliennes ou généralisées*, ou encore *blocs conformes*. La version analytique de l'étude des modules des fibrés vectoriels fait apparaître des objets en relation étroite avec la physique (les équations de Yang-Mills, cf. l'article d'Atiyah et Bott), et d'autre part la théorie des cordes motive fortement l'étude des surfaces de Riemann : pour toutes ces raisons, les blocs conformes ont été étudiés par la physique mathématique, et les travaux de Verlinde et Witten ont permis d'énoncer des conjectures mathématiques les concernant.

Celle qui nous intéresse est la *dualité rang-niveau*, qui met en correspondance deux blocs conformes en apparence sans relation, et dont on démontre ici (avec des techniques similaires) une version un peu plus générale que celle établie par Belkale en 2007. La preuve proposée ici est inspirée du travail d'Alina Marian et Dragos Oprea.

Cette partie supposera une familiarité préalable avec la notion de faisceau cohérent et le langage des champs algébriques.

PÉRIODES DE SURFACES ALGÈBRIQUES

Dans certains cas, les périodes de variétés algébriques constituent une manière alternative de décrire leurs modules. Contrairement au paramétrage des variétés par leurs équations, les périodes ne permettent pas facilement de reconstruire la variété dont elles proviennent, et leur définition fait intervenir des outils *transcendants*, c'est-à-dire qui sortent du pur cadre de la manipulation algébrique.

Les périodes ont un comportement adéquat lorsque l'on travaille dans le cadre des variétés complexes : cela signifie que les objets géométriques considérés seront les solutions à coordonnées complexes des équations données. Ainsi l'équation $x^2 + y^2 = 1$ donnera une variété de la forme d'une sphère, les courbes elliptiques auront la forme de tores, et la surface K3 indiquée dans l'exemple du début sera vue comme une variété de dimension 4, dont la forme est particulièrement compliquée.

On a besoin de considérer des formes différentielles algébriques de degré maximal, par exemple $\omega = dx/2y$ (la 1-forme différentielle standard sur une courbe elliptique), et la valeur de leurs intégrales sur des courbes ou des surfaces fermées (ou plus généralement sur des variétés fermées appelées *cycles*). Toutes ces intégrales s'expriment en fait en fonction d'un nombre fini d'entre elles : celles sur des cycles formant une base de l'*homologie* de la variété. On les appelle *périodes* de la forme ω . Lorsque la variété varie, sa topologie reste inchangée tant que l'on évite certaines valeurs spéciales : c'est l'un des intérêts de travailler avec les nombres complexes (lorsque les coefficients sont réels, l'espace de modules est souvent découpé en morceaux déconnectés, qui correspondent à des topologies très différentes). En revanche, ω varie : on associe ainsi à chaque point de l'espace des paramètres le vecteur des périodes de ω , et on appelle *application des périodes* la fonction obtenue.

Dans la deuxième partie, nous étudions les périodes d'un type particulier de surfaces, les surfaces de Campedelli. À l'instar des surfaces étudiées par Todorov, celles-ci ne sont pas déterminées par la seule valeur de leurs périodes. Les périodes ne permettent de reconstruire qu'une surface d'Enriques, en raison de certaines propriétés de symétrie : on s'intéressera alors au type des surfaces d'Enriques obtenues, et à la comparaison entre l'espace de modules (algébrique) associé à leurs équations, et l'espace de modules (transcendant) construit à partir des périodes.

PREMIÈRE PARTIE

Dualité rang-niveau pour les blocs conformes du groupe linéaire

Introduction

ESPACES DE MODULES DE FIBRÉS ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Soit X une surface de Riemann compacte (ou, ce qui est équivalent, une courbe projective lisse sur \mathbb{C}). La structure complexe de X en fait un cadre naturel pour l'étude, en physique mathématique, d'analogues en deux dimensions de théories classiques. Witten a ainsi observé que certaines propriétés et quantités, calculées sur une surface, ne dépendaient que de sa topologie et pas de sa structure (pseudo)-riemannienne ou holomorphe : on parle alors de théorie quantique des champs *topologique* (TQFT).

La théorie qui apparaît ici est le modèle de Wess-Zumino-Witten, qui étudie les fibrés principaux sur X , modelés sur un groupe de Lie fixés, munis d'une connexion de classe \mathcal{C}^∞ , et leurs sections, considérés dans les équations comme des champs physiques. Asymptotiquement (dans sa limite *semi-classique*), ce modèle conduit à effectuer des calculs sur l'espace de modules des G -fibrés principaux *holomorphes*, qui est de dimension finie [W1]. La version mathématique de cette propriété prend la forme d'une réduction hamiltonienne (de dimension infinie), de l'espace de modules des connexions sur un G -fibré différentiable fixé (Atiyah-Bott [AB]).

Le procédé de *quantification géométrique*, dans ce contexte, fait apparaître de façon naturelle les *blocs conformes*, des espaces vectoriels qui sont ici les sections de certains fibrés en droites sur l'espace de modules. Ceux-ci sont des objets habituellement issus de la théorie des champs *conformes*, plus proche du monde des algèbres *vertex*, et notamment des algèbres de Lie affines. Les propriétés importantes de ces blocs conformes ont été dégagées, d'un point de vue mathématique, par Tsuchiya, Ueno et Yamada [TUY]. Le travail de Faltings [F] et Beauville-Laszlo [BL] établit quant à lui le lien, dans le monde mathématique, entre les espaces de modules de fibrés (holomorphes ou algébriques) et ces blocs conformes.

DUALITÉ RANG-NIVEAU

Soit $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r)$ le champ de modules des fibrés vectoriels de rang r et de déterminant trivial sur X . Il n'est pas gênant dans cette section de le remplacer par $SU_X(r)$, la variété de modules (grossière) des fibrés vectoriels *semi-stables* de rang r et déterminant trivial sur X . On définit sur $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r)$ le fibré déterminant \mathcal{L} : c'est un fibré en droites, dont les sections (ainsi que celles de \mathcal{L}^ℓ) forment les espaces de fonctions thêta généralisées, ou *blocs conformes*. Drézet et Narasimhan [DN] ont montré que \mathcal{L} engendrait le groupe de Picard de $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r)$: de plus, les classes de diviseurs associées ont une interprétation modulaire élégante.

Théorème (Diviseurs thêta généralisés [DN]). *Soit F un fibré vectoriel sur X de rang ℓ et de pente $g - 1$ (i.e. de degré $\ell(g - 1)$). L'ensemble $\Theta_F = \{E \in \mathcal{S}\mathcal{U}_X(r), H^0(E \otimes F) \neq 0\}$ peut être vu comme un sous-champ algébrique, lieu d'annulation d'une section du fibré en droites \mathcal{L}^ℓ .*

Lorsque celle-ci est non nulle, Θ_F est un diviseur de Cartier de $SU_X(r)$, qui appartient au système linéaire $|\mathcal{L}^\ell|$, appelé diviseur Thêta associé à F .

On peut en fait construire une application rationnelle $F \mapsto \Theta_F$, de $U_X(\ell)$, l'espace de modules des fibrés vectoriels de rang ℓ et de degré zéro, vers le système linéaire \mathcal{L}^ℓ sur $SU_X(r)$, dont on peut montrer [DT] qu'elle est la restriction d'une application linéaire (projectivée) de dualité rang-niveau

$$SD : H^0(\mathcal{U}_X(\ell), \mathcal{L}^r)^\vee \rightarrow H^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r), \mathcal{L}^\ell)$$

que l'on peut construire aussi bien de façon géométrique (en traduisant algébriquement la définition des diviseurs thêta), ou algébrique (en revenant à la définition des blocs conformes). Les diviseurs Θ_F ne sont en effet que les spécialisations du diviseur thêta «universel»

$$\Theta = \{(E, F) \in \mathcal{S}\mathcal{U}_X(r) \times \mathcal{U}_X(\ell) \text{ tels que } H^0(E \otimes F) \neq 0\}$$

lui-même défini par une section de $\mathcal{L}^\ell \boxtimes \mathcal{L}^r$.

La formule de Verlinde [V, B] calcule la dimension des blocs conformes, et donc, celle des espaces de sections reliés par le morphisme SD : ces dimensions sont égales, et ne dépendent d'ailleurs que des entiers g , r et ℓ . Le théorème suivant a été conjecturé par Beauville et Donagi-Tu [DT], et démontré dans [BNR] pour le cas $\ell = 1$, par Belkale [B1, B2] et Marian et Oprea [MO1].

Théorème (Dualité rang-niveau ; Belkale, Marian, Oprea...). *L'application SD est un isomorphisme.*

L'une des conséquences de la dualité rang-niveau est par exemple que le système linéaire $|\mathcal{L}^\ell|$ est engendré par les diviseurs de la forme Θ_F .

FIBRÉS VECTORIELS PARABOLIQUES

Les constructions précédentes peuvent se généraliser au cadre des fibrés vectoriels paraboliques [B3, P2] : ceux-ci permettent de compléter la relation entre la théorie des champs conformes associée à l'algèbre de Lie affine de type $\widehat{\mathfrak{sl}}_{r,r}$, et les sections de fibrés déterminants apparaissant en géométrie algébrique.

Dans ce cadre X est remplacée par une courbe pointée (X, \mathbf{p}) , sur laquelle on choisit un diagramme de Young λ_{p_i} pour chaque point dans $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$. Les diagrammes de Young choisis ont r rangées (que l'on représentera verticalement dans les figures), et on leur associe naturellement une représentation de SL_r , correspondant à une variété de drapeaux partiels. Une structure parabolique sur un fibré E de rang r est le choix en chaque point p_i d'un drapeau partiel dans la fibre E_{p_i} du type indiqué par λ_{p_i} .

On définit des espaces de modules $\mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \lambda)$ et $\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \lambda)$, pour les fibrés vectoriels de rang r , munis de structures paraboliques de type λ sur (X, \mathbf{p}) , et respectivement de déterminant trivial ou de degré zéro. Ils sont naturellement munis de fibrés en droites notés $\mathcal{L}^{\ell, \lambda}$ qui généralisent le fibré déterminant usuel.

Lorsque le niveau des poids λ est au plus ℓ , c'est-à-dire que leurs rangées ont au plus ℓ cases, on peut définir un choix de poids transposés λ^T , dont les diagrammes de Young correspondants ont ℓ rangées.

On démontre le théorème suivant :

Théorème (Dualité rang-niveau parabolique). *Lorsque le nombre total de cases de λ est un multiple de $r\ell$, on peut définir un accouplement naturel, parfait, entre*

$$H^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \lambda), \mathcal{L}^{\ell, \lambda})^\vee \text{ et } H^0(\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(\ell, \lambda^T), \mathcal{L}^{r, \lambda^T})^\vee.$$

Cet accouplement est encore une fois relié à la notion de diviseur thêta : celle-ci doit être convenablement généralisée, au sens où si F est un fibré vectoriel (de degré convenable) le diviseur Θ_F lorsqu'il existe s'écrit

$$\Theta_F = \{E \in \mathcal{S}\mathcal{U}_{X,p}(r, \lambda) \text{ tel que } H^0(E \otimes_{\text{qpar}} F) \neq 0\}$$

Le produit tensoriel quasi-parabolique $E \otimes_{\text{qpar}} F$ qui apparaît ici est un sous-fibré naturel de $E \otimes F$. Il est peut-être plus pratique de le définir en voyant $E \otimes F$ comme $\mathbf{Hom}(E^\vee, F)$: $E \otimes_{\text{qpar}} F$ est alors le sous-fibré vectoriel $\mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(E^\vee, F)$ des morphismes de E^\vee dans F qui préservent les filtrations naturellement définies par les structures paraboliques.

Il est à noter que la dualité rang-niveau sous sa forme complète, c'est-à-dire pas seulement pour les espaces de *vides* (qui correspondent aux fibrés vectoriels sans structure supplémentaire) mais pour les blocs conformes quelconques, est énoncée dans le cadre de la théorie des champs conformes par Nakanishi et Tsuchiya [NT], dans le cas où $X = \mathbb{P}^1$ (les blocs conformes eux-mêmes ne satisfont pas la dualité proprement dite en genre supérieur). L'approche de Belkale s'applique aussi dans ce cadre. Il s'agit ici d'expliquer comment les assertions de [NT] peuvent être démontrées rigoureusement dans l'univers de la géométrie algébrique, cette fois en utilisant les techniques un peu différentes introduites par Marian et Oprea.

PLAN DE L'EXPOSÉ

Le chapitre 1 est consacré à une série de définitions et de propriétés bien connues des spécialistes. On définit notamment les espaces de modules qui interviennent, et les fibrés en droites que l'on y considère. Une partie est consacrée à la formule de Verlinde et aux algèbres de fusion : elle reprend notamment l'exposition faite dans [B], pour l'utilisation qui en sera faite ici.

Le chapitre 2, qui reprend les sections 1 et 2 de [O], définit les notions et les notations qui seront utilisées au cours de la preuve. Il s'agit notamment d'expliciter le lien entre variétés de Schubert et structures paraboliques sur un espace vectoriel, car ces deux notions font intervenir des diagrammes de Young.

La preuve de la dualité rang-niveau parabolique proposée dans le chapitre 3 suit très fidèlement les lignes de la preuve de Marian et Oprea [MO1]. Celle-ci est basée par la remarque, formulée par Witten [W2] et déjà exploitée par P. Belkale, que l'algèbre de fusion qui calcule la dimension des blocs conformes de $\widehat{\mathfrak{sl}}$, est très proche de la *cohomologie quantique* de la grassmannienne, qui calcule le nombre de courbes passant par des variétés de Schubert fixées dans une grassmannienne.

La technique introduite par Marian et Oprea permet de donner une démonstration directe de la dualité, en montrant que la dimension des blocs conformes s'identifie à un nombre d'intersection sur un schéma Quot, qui s'identifie lui-même à un dénombrement de sous-fibrés de degré maximal contenus dans un fibré vectoriel (générique) fixé. Un raisonnement analogue pour les fibrés paraboliques permet d'identifier la dimension du bloc conforme au nombre de sous-fibrés de degré maximal choisis dans un fibré vectoriel parabolique fixé, dont la structure parabolique induite est de type λ : cette contrainte se traduit justement à l'aide de variétés de Schubert.

Espaces de modules de fibrés vectoriels et blocs conformes

Dans ce chapitre, on désigne par la lettre X une courbe lisse projective fixée, de genre $g \geq 2$, munie d'un point fixé x_0 . On fixe également deux entiers r et d . Sauf indication contraire, toutes les variétés et schémas considérés seront définis sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} . Les résultats présentés ici sont exposés dans le livre de Laumon et Moret-Bailly [LMB], celui de Le Potier [LP], pour les modules des fibrés vectoriels, et dans l'article de Beauville [B], pour les calculs concernant les algèbres de fusion.

1.1 FAMILLES DE FIBRÉS VECTORIELS, CHAMPS DE MODULES

DÉFINITIONS

Définition 1.A (Fibré vectoriel). *Un fibré vectoriel (algébrique) de rang r sur X est un faisceau cohérent de \mathcal{O}_X -modules, localement isomorphe, pour la topologie de Zariski, au faisceau $\mathcal{O}^{\oplus r}$.*

On s'intéresse à l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels, muni d'une structure géométrique convenable. La première étape consiste à définir la notion de *famille* de fibrés vectoriels.

Définition 1.B (Famille de fibrés vectoriels). *Soit S un schéma. Une famille de fibrés vectoriels de rang r paramétrée par S est la donnée d'un fibré vectoriel \mathcal{E} de rang r sur $X \times S$, et d'un isomorphisme entre le déterminant $(\wedge^r \mathcal{E})|_{\{x_0\} \times S}$ et le faisceau $\mathcal{O}_{\{x_0\} \times S}$.*

La donnée supplémentaire qui figure dans cette définition est un ajout technique qui fait du déterminant $\det \mathcal{E} = \wedge^r \mathcal{E}$ une *famille de fibrés en droites rigidifiés* sur X (paramétrée par S). Cette propriété est essentielle pour la plupart des constructions qui suivent.

La notion de *champ* [G1, LMB] permet d'effectuer une forme très générale de recollement de ces familles, afin d'obtenir un objet sur lequel le langage de la géométrie algébrique possède encore un sens. On a pour cela besoin d'une notion de morphisme de familles de fibrés vectoriels :

Définition 1.C. *Soient \mathcal{E} et \mathcal{E}' deux familles de fibrés vectoriels, paramétrées par des schémas S et S' respectivement : un morphisme $(\mathcal{E}, S) \rightarrow (\mathcal{E}', S')$ est la donnée d'un morphisme $f : S \rightarrow S'$ et d'un isomorphisme $\varphi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} f^* \mathcal{E}'$ (compatible avec la rigidification, ou encore de déterminant 1 en x_0).*

Avec cette définition, les familles de fibrés vectoriels forment une *catégorie* qui est naturellement *fibrée en groupoïdes* sur la catégorie des schémas.

Définition 1.D (Champ de modules des fibrés vectoriels). *Le foncteur $(\mathcal{E}, S) \mapsto S$ définit une structure de catégorie fibrée en groupoïdes sur la catégorie des schémas : avec cette structure, les familles de fibrés vectoriels forment un champ, noté $\mathcal{U}_X(r)$. Ce champ se décompose naturellement en parties déconnectées $\mathcal{U}_X(r, d)$ paramétrant les fibrés vectoriels de degré d .*

Le foncteur $E \mapsto E(x_0)$ définit un isomorphisme entre les champs $\mathcal{U}_X(r, d)$ et $\mathcal{U}_X(r, d + r)$.

ALGÈBRICITÉ DES MODULES DE FIBRÉS VECTORIELS

Une façon naturelle de décrire l'ensemble des fibrés vectoriels sur une courbe X par une variété algébrique est d'utiliser la construction par Grothendieck des schémas Quot, qui paramètrent les sous-faisceaux cohérents d'un faisceau cohérent fixé. Pour n'en garder que les classes d'isomorphisme, il faut quotienter ces espaces par des relations d'équivalence provenant d'actions de groupe, ce qui se fait par la théorie des invariants : ceci occasionne un certain nombre de problèmes, décrits par la théorie géométrique des invariants de Mumford [MFK]. La construction d'espaces de modules qui en résulte est récapitulée par exemple dans l'article de Drézet et Narasimhan [DN].

Définition 1.E (Familles de sous-faisceaux). *Soit S un schéma et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X . Une famille de sous-faisceaux cohérents de \mathcal{F} , paramétrée par S est la donnée d'un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{O}_S$, plat sur S ou ce qui est équivalent, la donnée d'un faisceau cohérent \mathcal{Q} sur $X \times S$, plat sur S et d'un morphisme surjectif $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{Q}$.*

Étant donné un morphisme de schémas $f : Y \rightarrow S$, on dit qu'un faisceau cohérent \mathcal{M} sur Y est plat sur S (ou \mathcal{O}_S -plat), si le foncteur qui associe à un faisceau cohérent \mathcal{N} sur S le faisceau $\mathcal{M} \otimes f^* \mathcal{N}$ est exact.

Les familles de sous-faisceaux forment aussi une catégorie fibrée sur la catégorie des schémas, où un morphisme $(\mathcal{G}, S) \mapsto (\mathcal{G}', S')$ est la donnée d'un morphisme $f : S' \rightarrow S$ tel que le morphisme naturel $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{O}_S \mapsto \mathcal{F} \boxtimes f^*(\mathcal{O}_{S'})$ envoie \mathcal{G} sur $f^*(\mathcal{G}')$. Mais celle-ci provient simplement du foncteur contravariant

$$S \mapsto \text{Quot}(\mathcal{F})(S) = \{ \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{O}_S \text{ tels que } \mathcal{G} \text{ est plat sur } S \}$$

au sens où elle est équivalente à sa *catégorie des éléments*, dont les objets sont les couples $(S, q \in \text{Quot}(\mathcal{F})(S))$ et les morphismes sont des flèches $(S', f^*q) \rightarrow (S, q)$ données par $f : S' \rightarrow S$.

Proposition 1.1 (Schémas Quot de Grothendieck). *Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X . Le foncteur des familles de sous-faisceaux de \mathcal{F} est représentable par un schéma $\text{Quot}(\mathcal{F})$, qui est naturellement la réunion disjointe de schémas $\text{Quot}_p(\mathcal{F})$, qui représentent les familles de sous-faisceaux de polynômes de Hilbert fixés.*

La construction habituelle construit en fait les schémas $\text{Quot}_p(\mathcal{F})$ de manière relativement explicite, comme un sous-schéma d'une Grassmannienne. Il est clair que les schémas $\text{Quot}_p(\mathcal{F})$ paramètrent aussi bien les quotients de \mathcal{F} que ses sous-faisceaux. L'utilité de cette construction peut-être vue dans la remarque suivante : soit $\hat{\mathcal{Q}}(r, N)$ le champ de modules des triplets (S, \mathcal{E}, Φ) où \mathcal{E} est une famille paramétrée par S de fibrés vectoriels (rigidifiés), engendrés par leurs sections globales, acycliques, et Φ est un isomorphisme entre $\mathcal{O}_S^{\oplus N}$ et $\pi_* \mathcal{E}$. Le schéma en groupes GL_N transforme Φ en agissant sur $\mathcal{O}_S^{\oplus N}$.

Proposition 1.2. *Le morphisme $\hat{\mathcal{Q}}(r, N) \rightarrow \mathcal{U}_X(r)$ est un torseur de groupe GL_N sur son image, et le morphisme canonique $\hat{\mathcal{Q}}(r, N) \rightarrow \text{Quot}$ qui à (\mathcal{E}, Φ) associe le morphisme surjectif naturel $\hat{\Phi} : \mathcal{O}_{X \times S}^{\oplus N} \rightarrow \mathcal{E}$, est un torseur sous l'action de \mathbb{G}_m/μ_r sur son image dans $\text{Quot}(\mathcal{O}_{X \times S}^{\oplus N})$, notée $Q(r, N)$.*

Démonstration. Si E est un fibré vectoriel rigidifié, les choix de Φ sont naturellement un torseur sous l'action du groupe GL_N , et la fibre de $\hat{\mathcal{Q}}(r, N) \rightarrow \mathcal{U}_X(r)$ au point E est le groupoïde des couples $(E', \Phi', f : E' \rightarrow E)$ où f est un isomorphisme rigidifié, qui est en bijection avec l'ensemble GL_N . On peut d'ailleurs, à équivalence près, fixer f à une

certaines valeurs, par exemple $\text{id} : E \rightarrow E$: on voit alors que deux choix de Φ' sont reliés par exactement un élément de GL_N . Ce raisonnement reste valable si on remplace E par une famille de fibrés vectoriels sur une base S . Deux choix de Φ seront alors reliés par un élément de $\text{GL}_N(\mathcal{O}_S)$.

Examinons maintenant le morphisme $\widehat{Q}(r, N) \rightarrow \text{Quot}$. Étant donné un quotient fixé $\bar{q} : \mathcal{O}^N \rightarrow \mathcal{Q}$, sa fibre en q est le groupoïde des triplets $(E, \Phi, f : E \rightarrow \mathcal{Q})$ tels que $f\bar{\Phi} = \bar{q}$. En appliquant le morphisme f , on voit que tout tel triplet est équivalent à $((\mathcal{Q}, \rho), q, \text{id})$, où ρ est un choix de rigidification de \mathcal{Q} . La fibre est donc l'ensemble des rigidifications possibles, qui est naturellement un tore sous l'action de \mathbb{G}_m/μ_r par homothéties. On a en fait $(\mathcal{Q}, \rho, q) \simeq (\mathcal{Q}, \rho, \zeta q)$ pour $\zeta \in \mu_r$.

L'image de $\widehat{Q}(r, N)$ est le sous-schéma $Q(r, N) \subset \text{Quot}(\mathcal{O}_X^{\oplus N})$ constitué des quotients localement libres, acycliques, engendrés par leurs sections globales qui s'identifient à \mathbb{C}^N . \square

On obtient la structure suivante :

Corollaire 1.3. *L'image de $\widehat{Q}(r, N)$ dans $\mathcal{U}_X(r)$ est une gerbe de lien μ_r sur le quotient (au sens des champs) $[Q(r, N)/\text{PGL}(N)]$.*

Cette gerbe n'est en général pas neutre : ceci n'arrive que lorsque l'on considère des fibrés de degré d premier avec r . On peut résumer tout cela sous la forme d'un diagramme, dans lequel les flèches correspondent soit à des toreseurs, soit à des gerbes :

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{Q}(r, N) & \xrightarrow{\mathbb{G}_m/\mu_r} & Q(r, n) \\
 \downarrow \mathbb{G}_m & \searrow \mathbf{B}\mu_r & \downarrow \text{PGL}_N \\
 [\widehat{Q}(r, N)/\mathbb{G}_m] & \xrightarrow{\mathbf{B}\mu_r} & Q(r, n) \\
 \downarrow \text{PGL}_N & & \downarrow \text{PGL}_N \\
 \mathcal{U}_X(r, N + r(g-1)) & \xrightarrow{\mathbf{B}\mu_r} & [Q(r, N)/\text{PGL}_N]
 \end{array}$$

Le foncteur $(E, \Phi : \mathbb{C}^{d+r(k+1-g)} \rightarrow H^0(E)) \mapsto E \otimes \mathcal{O}_X(-kx_0)$ permet de définir un morphisme lisse $\widehat{Q}(r, d + r(k+1-g))$ dans $\mathcal{U}_X(r, d)$. Comme la propriété d'être acyclique et engendré par ses sections globales est ouverte, on obtient un sous-champ ouvert de $\mathcal{U}_X(r, d)$: les sous-champs de la forme $\widehat{Q}(r, N_k)/\text{GL}_{N-k}$ en forment un recouvrement, et on montre ainsi que les champs $\mathcal{U}_X(r, d)$ sont algébriques.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES INVARIANTS ET VARIÉTÉS DE MODULES

Pour les définitions et propriétés énoncées dans cette section, on pourra se reporter au livre de J. Le Potier [LP].

Définition 1.F. *Si E est un fibré vectoriel de rang r et de degré d sur X , sa pente $\mu(E)$ est le nombre rationnel d/r . On dit que E est semi-stable (resp. stable) si pour tout sous-fibré vectoriel F (différent de 0 et de E), $\mu(F) \leq \mu(E)$ (resp. $\mu(F) < \mu(E)$).*

La notion de stabilité (resp. semi-stabilité) est stable par dualité, et par produit tensoriel par un fibré en droites.

Proposition 1.4. *Il existe un entier k , ne dépendant que de g , tel que tout fibré vectoriel semi-stable E tel que $\mu(E) > k$, soit acyclique et engendré par ses sections globales.*

Démonstration. Par dualité de Serre, il suffit de trouver un entier l_1 tel que si F (choisi égal à $E^\vee \otimes K_X$) est de pente inférieure à l_1 , F n'a pas de section globale. Mais une section

globale correspond à l'inclusion d'un fibré en droites de degré positif ou nul dans F , donc par définition $l_1 = 0$ convient : si $\mu(E) > 2g - 2$, E est acyclique.

Par ailleurs, pour que E soit engendré par ses sections globales, il suffit que pour tout point x de X , $E \otimes \mathcal{O}_x(-x)$ soit acyclique, ce qui est le cas dès que $\mu(E) > 2g - 1$. \square

Les notions de stabilité et de semi-stabilité ont également un sens pour les points d'une variété munie d'une action de groupe, par exemple, pour l'action du groupe GL_N sur $Q(r, n)$. Dans les généralités énoncées ci-dessous, on suppose s'être placés sur un corps de caractéristique zéro, noté \mathbb{K} .

Définition 1.G (Quotient en théorie des invariants). Soit $X = \mathrm{Proj} A \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective, donnée par son algèbre de fonctions homogènes, et G un groupe algébrique dont V est une représentation, de sorte que G agit également sur l'algèbre A .

De manière équivalente, on peut supposer que le fibré en droites $L = \mathcal{O}_X(1)$ est très ample et G -linéarisé, c'est-à-dire qu'on se donne des applications $\varphi_g : L \simeq g^* L$ telles que $g^*(\varphi_h) \circ \varphi_g = \varphi_{hg}$, qui donneront l'action de G sur $A = \bigoplus H^0(L^n)$.

Le quotient GIT de X par G est noté $X // G$, on le définit comme la variété projective $\mathrm{Proj} A^G$ engendrée par l'algèbre des éléments G -invariants de A .

Les notions de stabilité et semi-stabilité permettent d'exprimer à quel point ce quotient diffère d'un quotient parfait.

Définition 1.H. Soit X une variété projective, $X // G$ son quotient GIT par un groupe G , et $X \dashrightarrow X // G$. Un point $x \in X$ est dit semi-stable si l'application rationnelle de quotient est définie en x , ou si, de manière équivalente, il existe une section G -invariante s de L^n , pour un certain n , telle que $s(x) \neq 0$.

Le point x est dit stable si un point associé \hat{x} dans le cône \hat{X} de X (qui est une sous-variété de V) a une orbite sous l'action de G qui est fermée et de dimension $\dim G$. Un point est dit instable si son image dans le quotient n'est pas définie.

Soit r et d deux entiers tels que $\mu = r/d$ est supérieur à $2g$. On s'intéresse au schéma $\mathrm{Quot}_{r,d}(\mathcal{O}_X^N)$ où $N = d + r(1 - g)$, sur lequel agit naturellement le groupe GL_N .

Lemme 1.5. On peut trouver un entier l , s'exprimant en fonction de g , r et d uniquement, tel qu'une suite exacte de fibrés vectoriels $0 \rightarrow K \rightarrow \mathcal{O}_X^N \rightarrow Q \rightarrow 0$ (où Q est de rang r et de degré d) est entièrement déterminée par la suite (exacte) d'espaces vectoriels

$$0 \rightarrow H^0(K(lx_0)) \rightarrow \mathcal{O}_X(lx_0)^N \rightarrow H^0(Q(lx_0)) \rightarrow 0$$

pour $l \geq 2g + d$. On demande aussi que $K(lx_0)$ soit régulier, c'est-à-dire que les morphismes naturels

$$H^0(K(lx_0)) \otimes H^0(\mathcal{O}_X(mx_0)) \rightarrow H^0(K(lx_0 + mx_0))$$

soient surjectifs.

Ceci permet de réaliser $\mathrm{Quot}_{r,d}(\mathcal{O}_X^N)$ comme un sous-schéma localement fermé de la grassmannienne des quotients de dimension $r(\mu + l + 1 - g)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^{l+1-g}$.

Proposition 1.6. Un point V de la Grassmannienne $\mathrm{Gr}(k, MN)$ est stable (resp. semi-stable) sous l'action de SL_N si et seulement si pour tout sous-espace W de \mathbb{C}^N ,

$$\frac{\dim V \cap (\mathbb{C}^M \otimes W)}{\dim(\mathbb{C}^M \otimes W)} < \frac{\dim V}{\dim(\mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N)}$$

(respectivement \leq).

Démonstration. Ceci se voit de la manière suivante : si $g(t)$ est l'élément de SL_N qui agit par multiplication par t^a sur W et t^{-b} sur un supplémentaire W' de W (où $a = \dim W'$ et $b = \dim W$, $g(t)$ agit par une puissance positive de t sur les coordonnées de Plücker x_I où

I comprend p indices de W^M , q indices de $(W')^M$ et $ap > bq$, ou encore $q/(p+q) < b/(a+b)$, soit $q/k < b/N$.

Soit V un point dont les coordonnées de Plücker non nulles vérifient toutes cette propriété : c'est le cas si et seulement si la projection de V sur $(W')^M$ est de dimension $< bk/N$, et son intersection avec W^M est de dimension strictement supérieure à $k - bk/N = ak/N$. Dans ce cas V est instable.

Un raisonnement analogue permet d'étudier la stabilité et la semi-stabilité. \square

On a ici travaillé avec les sous-espaces $V \subset \mathbb{C}^{MN}$. Notons qu'on peut travailler avec les quotients $\mathbb{C}^{MN} \rightarrow V$ en remplaçant la pente de $V \cap W^M$ par la pente de l'image de W^M dans V , en renversant les inégalités.

En choisissant $V = H^0(Q(lx_0))$ et $W \subset \mathbb{C}^N$, on obtient le critère :

Proposition 1.7. *Un point Q du schéma Quot est stable (resp. semi-stable), si pour tout $W \subset \mathbb{C}^N$, le sous-faisceau $Q'(lx_0)$ engendré par $W \otimes H^0(\mathcal{O}_X(lx_0))$ dans $Q(lx_0)$ vérifie*

$$\frac{H^0(Q'(lx_0))}{\dim W} > \frac{H^0(Q(lx_0))}{N}$$

(resp. \geq).

Cette propriété permet de montrer que la (semi-)stabilité au sens de l'action du groupe SL_N coïncide avec la (semi-)stabilité définie par les pentes. On peut trouver une preuve complète de cela, dans un cadre plus général, dans le livre de D. Huybrechts et M. Lehn [HL] ou celui de J. le Potier [LP].

On notera $U_X(r, d)$ (avec une lettre droite), la variété projective obtenue lorsque $d > 2rg$. Si d ne vérifie pas cette propriété, on posera $U_X(r, d) := U_X(r, d + rl)$, en choisissant un entier l suffisamment grand, cette identification devant correspondre à un isomorphisme $\mathcal{U}_X(r, d) \simeq \mathcal{U}_X(r, d + rl)$.

On dit que $U_X(r, d)$ est l'espace de modules grossier des fibrés vectoriels semi-stables (de rang r et de degré d) sur X : il n'est pas isomorphe au champ de modules $\mathcal{U}_X(r, d)$, ni même à un sous-champ plein de celui-ci en général (mais lorsque r et d sont premiers entre eux, il existe un plongement fidèle de $U_X(r, d)$ dans $\mathcal{U}_X(r, d)$).

1.2 FIBRÉS DÉTERMINANTS ET ESPACES DE BLOCS CONFORMES

CONSTRUCTION DU FIBRÉ DÉTERMINANT

Définition 1.I (cf. [BL, exemple 3.8]). *Soit S un schéma et \mathcal{E} une famille de fibrés vectoriels sur X , paramétrée par S . On note π la projection de $X \times S$ sur S . Alors, si l est un entier suffisamment grand, $R^1\pi_*\mathcal{E}(lx_0)$ est nul, et $\pi_*\mathcal{E}(lx_0)$ est localement libre.*

On appelle fibré déterminant de \mathcal{E} (avec la notation $\det(R\pi_*\mathcal{E})$) la puissance extérieure maximale de $\pi_*\mathcal{E}(lx_0)$.

La suite exacte $\pi_*\mathcal{E}(lx_0) \rightarrow \pi_*\mathcal{E}(lx_0 + x_0) \rightarrow \mathcal{E}_{x_0}$ donne la formule $\det \pi_*\mathcal{E}(lx_0 + x_0) = \det \pi_*\mathcal{E}(lx_0) \otimes \det \mathcal{E}_{x_0}$; ceci montre que la définition précédente ne dépend pas du choix de l : on s'est en effet fixé un isomorphisme de $\det \mathcal{E}_{x_0}$ avec le fibré trivial (les familles de fibrés vectoriels ont un déterminant rigidifié). Le fibré déterminant est fonctoriel : si $f : S' \rightarrow S$ est un morphisme de schémas, on a un isomorphisme canonique entre $f^*R\pi_*\mathcal{E}$ et $R\pi'_*(f^*\mathcal{E})$, qui identifie le fibré déterminant sur S' à l'image réciproque du fibré déterminant sur S (cette propriété découle de la platitude des familles de fibrés vectoriels, comme dans EGAI [G2, 6.9.9.2]).

On obtient ainsi un morphisme du champ de modules des fibrés vectoriels sur X , $\mathcal{U}_X(r)$ dans le champ de modules \mathbf{BG}_m des fibrés en droites : c'est ce qui correspond à la notion de *fibré en droites* sur $\mathcal{U}_X(r)$. On peut le décrire simplement comme la donnée, pour toute famille de fibrés vectoriels \mathcal{E} sur S , d'un fibré en droites sur S , avec des conditions de fonctorialité. Les classes d'isomorphismes de fibrés en droites sur $\mathcal{U}_X(r)$ forment un groupe abélien, noté comme d'habitude $\text{Pic } \mathcal{U}_X(r)$.

On peut en fait généraliser cette construction [DN] en choisissant un fibré vectoriel F sur X et en lui associant le fibré déterminant $\det R\pi_*(\mathcal{E} \otimes (\mathcal{O}_S \boxtimes F))$: la multiplicativité du déterminant dans les suites exactes montre que ce fibré en droites ne dépend que de la classe de F dans le *groupe de Grothendieck* $K^0(X)$, il est parfois noté $\lambda_{\mathcal{E}}(F)$.

Soit $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r, \mathcal{O}_X)$ (aussi noté simplement $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r)$), le sous-champ de modules des fibrés vectoriels de déterminant (rigidifié) trivial. Le déterminant de tels fibrés étant le fibré trivial \mathcal{O}_X , toute rigidification de ce déterminant en un point de la courbe X induit automatiquement une rigidification en tous les points. Ainsi, ayant fixé un fibré en droites L , pour tout point p de X , si \mathcal{E} est une famille de fibrés vectoriels de déterminant constant, on a un isomorphisme *canonique* entre $\det R\pi_*(\mathcal{E} \otimes (\mathcal{O}_S \boxtimes L))$ et $\det R\pi_*(\mathcal{E} \otimes (\mathcal{O}_S \boxtimes L(p)))$.

On obtient alors un isomorphisme *canonique* entre les $\lambda_{\mathcal{E}}(L)$ pour tous les fibrés en droites L . Le fibré en droites $\lambda(F)$ ne dépend alors que du rang k de F : c'est \mathcal{L}^k , où \mathcal{L} est le fibré déterminant usuel $\det R\pi_* \mathcal{E}$.

Théorème 1.8 (Drézet, Narasimhan [DN]). *Soit $SU_X(r, \mathcal{O}_X)$ l'espace de modules grossier des fibrés vectoriels semi-stables sur X . On peut définir comme ci-dessus un morphisme*

$$\lambda : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic } SU_X(r, \mathcal{O}_X)$$

et il s'agit d'un isomorphisme.

Théorème 1.9 (Beauville-Laszlo [BL, sec. 8]). *Les fibrés en droites \mathcal{L}^k et leurs sections sont «les mêmes» sur le champ $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r)$ et sur la variété $SU_X(r)$. On entend par là, qu'il existe des ouverts de l'un et l'autre, où les fibrés en droites et leurs sections s'identifient canoniquement, et que les sections de \mathcal{L}^k sur ces ouverts sont les mêmes que les sections globales.*

Idée de démonstration. On vérifie que dans l'un et l'autre cas, les sections de \mathcal{L}^k correspondent aux sections GL_N invariantes du même fibré en droites sur $Q(r, N)$ ou $\widehat{Q}(r, N)$. Un argument de type théorème de Hartogs permet de conclure. \square

Les espaces $H^0(SU_X(r), \mathcal{L}^k)$ sont parfois appelés *espaces de fonctions thêta non-abéliennes de rang r et de niveau k* .

En général, on a un morphisme naturel $\det : S \rightarrow \text{Pic}(X)$, qui associe au point s le point représentant le fibré en droites $\det \mathcal{E}_s$ (la variété $\text{Pic } X$ paramètre les fibrés en droites sur X rigidifiés en p_0). Si p est un point de X , identifié à l'application constante $p : S \rightarrow X$, on peut considérer l'application

$$(\text{id}_S, p) : S \rightarrow S \times X$$

et le déterminant de $(\text{id}_S, p)^* \mathcal{E}$ est alors l'image inverse du fibré en droites $(\text{id}_{\text{Pic}(X)}, p)^* \mathcal{P}$ sur $\text{Pic } X$ (on a noté \mathcal{P} le fibré de Poincaré sur $\text{Pic } X \times X$).

Celui-ci, comme fibré en droites sur $\text{Pic } X$, est représenté par le point $p - p_0$ de la variété duale de $\text{Pic } X$, qui est aussi $\text{Pic } X$. Lorsqu'il n'y a pas de confusion (par exemple, dans la notation $\det^* p$), on notera souvent simplement p pour ce fibré en droites, p_0 ayant été choisi comme origine.

Le fibré en droites $\lambda(F) = \det R\pi_*(\mathcal{E} \otimes F)$ sur le champ $\mathcal{U}_X(r, 0)$ dépend donc de F . Nous reviendrons sur ce problème au début du chapitre 3.

Les idées issues de la physique mathématique suggéraient que les espaces de sections des fibrés en droites \mathcal{L}^k apparaissent naturellement dans l'étude des modèles de Wess-Zumino-Witten (voir par exemple [W2,A]). Ces modèles soulèvent un certain nombre de problèmes mathématiques : par exemple, l'expression de l'espace de modules de fibrés (sous la forme de connexions unitaires) comme réduction symplectique d'un espace de dimension infinie [AB], ou l'existence d'une connexion projectivement plate et les propriétés de décomposition des espaces de *blocs conformes* [TUY,H1]. L'article de Beauville et Laszlo [BL] fait le lien entre les blocs conformes (des espaces définis à l'aide de représentations d'algèbres de Lie affines) et les espaces de fonctions thêta non-abéliennes. Un théorème semblable, valable dans une situation plus générale, a également été démontré par Kumar, Narasimhan et Ramanathan [KNR].

Le point-clé est la représentation des fibrés vectoriels par des matrices de transition *formelles*, c'est-à-dire à valeurs dans un corps de séries de Laurent.

Lemme 1.10 (Beauville, Laszlo). *Soit \mathcal{G} une famille de fibrés vectoriels de déterminant trivial paramétrée par une base S . Alors, il existe un recouvrement de S par des ouverts de Zariski U tels que la restriction de \mathcal{G} à U est triviale sur $(X \setminus \{x_0\}) \times U$.*

Ceci permet de démontrer le théorème important :

Théorème 1.11 (Beauville, Laszlo [BL]). *Le champ de modules $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r)$ est isomorphe au champ quotient de la grassmannienne affine $\mathcal{G}_r = \mathrm{SL}_r((z))/\mathrm{SL}_r[[z]]$ par le groupe $\mathrm{SL}_r(A)$, où A est l'algèbre des fonctions de $X \setminus \{x_0\}$. Le fibré en droites \mathcal{L}^k tiré à \mathcal{G}_r correspond au fibré en droites associé à la représentation basique de poids 0 et de niveau k de l'algèbre de Lie affine $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$.*

L'espace de sections correspondant est donc l'espace des covariants $(\mathcal{H}_{k,0}^*)^{\mathrm{SL}_r(A)}$, où $\mathcal{H}_{k,0}$ est la représentation intégrable de poids 0 et de niveau k de $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$, aussi appelé espace des (états) vides, en référence à la terminologie utilisée en théorie quantique des champs, ou *bloc conforme*, une terminologie utilisée en théorie des champs conformes.

Expliquons brièvement ce qu'est cette représentation : l'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$ est une algèbre de Lie de dimension infinie, qui est un cas particulier d'*algèbre de Kac-Moody* [K]. Les algèbres de Kac-Moody sont les généralisations naturelles des algèbres de Lie classiques associées aux diagrammes de Dynkin classiques (comme A_n, D_n) à des diagrammes de Dynkin et matrices de Cartan quelconques, autrement dit, à des systèmes de racines qui ne sont pas nécessairement plongés dans des espaces euclidiens : on les décrit par générateurs et relations (les relations de Chevalley).

Le système de racines de l'algèbre $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$ est associé au diagramme de Dynkin \widehat{A}_{r-1} , qui est un polygone régulier à r côtés : l'espace dans lequel il se plonge naturellement est de dimension r , et de signature $(r-1, 0)$. Dans l'espace \mathbb{R}^{r+1} muni de la forme euclidienne standard sur \mathbb{R}^r , et d'un vecteur isotrope f , une base de racines simples est donnée par

$$\alpha_0 = e_r - e_1 + f, \alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_{r-1} = e_{r-1} - e_r$$

et on peut définir des poids «dominants» fondamentaux :

$$\pi_0 = \iota, \pi_1 = \iota + \varpi_1, \dots, \pi_{r-1} = \iota + \varpi_{r-1}$$

où les $\varpi_i = e_1^* + \dots + e_i^*$ pour $i > 0$ sont les poids dominants habituels de \mathfrak{sl}_r , et ι est tel que $\iota(f) = 1$.

Avec ces définitions, un poids dominant est de la forme $\ell\iota + \lambda$, donné par un couple (ℓ, λ) où ℓ est un entier positif et λ est un poids dominant de \mathfrak{sl}_r , de niveau inférieur à ℓ . La condition $\langle \ell\iota + \lambda, \alpha_0 \rangle \geq 0$ est en effet équivalente à $\langle \lambda, \theta \rangle \leq \ell$, lorsqu'on note $\theta = e_1 - e_r$ la plus haute racine.

Ces poids décrivent les classes de représentations *intégrables* de l'algèbre de Lie affine $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$. Celle-ci peut s'écrire comme une extension centrale $\mathbb{C}c \rtimes \mathfrak{sl}_r((z))$. On y distingue la sous-algèbre «d'Iwahori» $\widehat{\mathfrak{b}} = \mathbb{C}c \oplus \mathfrak{S}$ où $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{sl}_r[[z]]$ est la sous-algèbre des éléments g tels que $g(0)$ appartient à la sous-algèbre de Borel standard $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{sl}_r$.

On définit alors des *modules de Verma*

$$V_{\ell, \lambda} = \text{Ind}_{\widehat{\mathfrak{b}}}^{\widehat{\mathfrak{sl}}_r} \mathbb{C}_{\ell, \lambda}$$

comme représentations induites de $\widehat{\mathfrak{b}}$ à $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$. La sous-algèbre d'Iwahori agit sur $\mathbb{C}_{\ell, \lambda}$ en faisant agir c par multiplication par ℓ et \mathfrak{b} par le poids λ .

Si $\ell + \lambda$ est un poids dominant comme ci-dessus, $V_{\ell, \lambda}$ admet un sous-module maximal, et un quotient $\mathcal{H}_{\ell, \lambda}$, la *représentation intégrable irréductible de poids λ et de niveau ℓ* . Les représentations intégrables sont les analogues des représentations de dimension finie dans le cas des algèbres de Lie affines.

Théorème 1.12 (Kumar [K], Mathieu [M]). *Soit I un sous-groupe parabolique (ou d'Iwahori) du groupe $\widehat{\text{SL}}_r$ (extension centrale de $\text{SL}_r((z))$), et (ℓ, λ) un poids dominant adapté à I . Alors les sections du fibré en droites naturellement associé $\mathcal{L}^{\ell, \lambda}$ sur $\widehat{\text{SL}}_r/I$ forment un espace dual de $\mathcal{H}_{\ell, \lambda}$.*

L'identification entre $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r)$ et $\mathcal{G}/\text{SL}_r(A)$ identifie ainsi les sections de \mathcal{L}^k aux covariants de $\mathcal{H}_{k, 0}$, c'est-à-dire les formes linéaires sur lesquelles l'action de $\mathfrak{sl}_r(A)$ est nulle. Cet espace est parfois appelé espace des [états] *vides* sur X .

1.3 FORMULE DE VERLINDE ET ALGÈBRES DE FUSION

La formule de Verlinde est une formule purement combinatoire qui permet de calculer certains invariants en théorie des champs conformes, notamment la dimension des *blocs conformes* qui sont les sections des fibrés déterminants définis précédemment. Moyennant un certain nombre de résultats fondamentaux [TUY] qui permettent de faire entrer dans cette théorie les espaces qui nous intéressent, on peut alors exprimer leur dimension en utilisant seulement les données combinatoires habituelles de la théorie des algèbres de Lie.

ALGÈBRES DE FUSION

Définition 1.J (Algèbre de Frobenius). *Une algèbre de Frobenius commutative est une \mathbb{k} -algèbre commutative (de dimension finie) A munie d'une forme linéaire t telle que la forme bilinéaire $(a, b) \mapsto t(ab)$ est non dégénérée (elle est alors symétrique).*

Proposition 1.13. *Soit V un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie, munie d'applications multilinéaires $t_n : \text{Sym}^n V \rightarrow \mathbb{k}$. On définit une application $\mu : \text{Sym}^2 V \rightarrow V$ par la condition $t_2(\mu(a, b), c) = t_3(a, b, c)$. Alors (V, μ, t_1) est une algèbre commutative de Frobenius, telle que $t_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = t_1(a_1 \cdots a_n)$ si et seulement si :*

- t_2 est non dégénérée, et il existe un élément 1 tel que $t_1(a) = t_2(a \otimes 1)$;
- si $p + q = n$ et \mathbf{x}, \mathbf{y} sont des éléments de $\text{Sym}^p V$ et $\text{Sym}^q V$ respectivement,

$$t_n(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \sum_{\lambda} t_{p+1}(\mathbf{x} \otimes \lambda) \cdot t_{q+1}(\mathbf{y} \otimes \lambda^*)$$

où l'on a noté λ et λ^* des bases duales de V par rapport à la forme bilinéaire t_2 .

Démonstration. Si V est une algèbre de Frobenius, la formule $t_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = t_1(a_1 \cdots a_n)$ vérifie les propriétés demandées. En effet, si $\mu : \text{Sym}^2 V \rightarrow V$ est l'application de multiplication $\mu(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} t_{p+1}(\mathbf{x} \otimes \lambda) \cdot \lambda^*$ (les deux expressions ont même accouplement avec les

éléments de base λ), donc

$$t_{p+q}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = t(\mu(\mathbf{x}) \cdot \mu(\mathbf{y})) = \sum_{\lambda, \nu} t_{p+1}(\mathbf{x} \otimes \lambda) \cdot t_{q+1}(\mathbf{y} \otimes \nu^*) t(\lambda^* \nu)$$

donne la formule demandée.

Réciproquement, si t_2 est non dégénérée, μ est définie de manière unique, et est commutative. De plus

$$\begin{aligned} t_2(\mu(a, \mu(b, c)), d) &= t_3(a, \mu(b, c), d) \\ &= \sum_{\lambda} t_3(a, d, \lambda) \cdot t_2(\mu(b, c), \lambda^*) = \sum_{\lambda} t_3(a, d, \lambda) \cdot t_3(b, c, \lambda^*) = t_4(a, b, c, d) \end{aligned}$$

ce qui montre que μ est associative. \square

Les algèbres de Frobenius sont les objets qui encodent exactement les théories quantiques des champs topologiques de dimension 1+1, au sens d'Atiyah-Segal [A]. Il se trouve que le calcul de la dimension des blocs conformes obéit exactement à ces axiomes, vérifiés dans le travail de Tsuchiya-Ueno-Yamada [TUY]. La prise en compte de courbes de genre g quelconque relie ces axiomes à l'action naturelle de graphes sur les algèbres de Frobenius (on pourra se reporter à la notion d'*opétrade modulaire* introduite par Getzler et Kapranov, pour décrire ces actions).

Définition 1.K (Opérations modulaires). Soit V une algèbre de Frobenius commutative. Les opérations de genre g sont définies de la manière suivante : si \mathbf{x} est un élément de $\text{Sym}^n V$, l'opérateur $t_n : \text{Sym}^{n+2g} V \rightarrow \mathbb{k}$ et \mathbf{x} induisent une forme $\text{Sym}^{2g} V \rightarrow \mathbb{k}$ que l'on peut interpréter, par dualité, comme un endomorphisme de $V^{\otimes g}$. On pose alors

$$t_n^{(g)}(\mathbf{x}) = \text{Tr}_{V^{\otimes g}}(t_{n+2g}(\mathbf{x}, \bullet, \bullet))$$

c'est la trace de l'endomorphisme en question.

On vérifie facilement la propriété de contraction :

$$t_n^{(g+h)}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \sum_{\lambda} t_{p+1}^{(g)}(\mathbf{x}, \lambda) \cdot t_{q+1}^{(h)}(\mathbf{y}, \lambda^*)$$

lorsque $p + q = n$.

ALGÈBRE DE FUSION ASSOCIÉE À UNE ALGÈBRE DE LIE SIMPLE

Définition 1.L (Bloc conforme). Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple, et X une surface de Riemann de genre g . Étant donné un n -uplet de points $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, munis de coordonnées locales et un n -uplet de poids dominants de niveau $\leq \ell$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on définit les blocs conformes de la théorie des champs conforme de niveau ℓ associée à \mathfrak{g} sur X comme les espaces $V_{(X, \mathbf{p})}(\lambda)$:

$$V_{(X, \mathbf{p})}(\lambda) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}(X \setminus \mathbf{p})}(\mathcal{H}_{\ell, \lambda_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{\ell, \lambda_n}, \mathbb{C})$$

ici $\mathcal{H}_{\ell, \lambda_i}$ sont des représentations irréductibles intégrables de $\hat{\mathfrak{g}}$ comme précédemment. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(X \setminus \mathbf{p})$ est l'algèbre des fonctions holomorphes sur $X \setminus \mathbf{p}$ à valeurs dans \mathfrak{g} : son action sur $\mathcal{H}_{\ell, \lambda_i}$ est donnée par les développements en série entière autour de p_i (une coordonnée locale holomorphe étant choisie une fois pour toutes).

Le travail de Tsuchiya, Ueno et Yamada [TUY] a permis de démontrer que les blocs conformes satisfaisaient les propriétés d'une théorie quantique topologique des champs, induite par une théorie conforme des champs : ils démontrent ainsi des *propriétés de factorisation*, dont le contenu combinatoire est le suivant.

Théorème 1.14 (Tsuchiya-Ueno-Yamada). Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple, et $\hat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie affine associée. On note P_ℓ l'ensemble des poids dominants de niveau $\leq \ell$ de \mathfrak{g} ,

L'algèbre de fusion \mathcal{O}_ℓ de \mathfrak{g} au niveau ℓ est l'algèbre de Frobenius commutative, dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\bigoplus \mathbb{C}\lambda$ (où λ parcourt P_ℓ), munie des règles de fusion

$$t_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \dim V_{(\mathbb{P}^1, \mathbf{p})}(\lambda)$$

qui satisfont les axiomes d'une algèbre de Frobenius.

De plus, les règles de fusion de genre supérieur

$$t_n^{(g)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \dim V_{(X, \mathbf{p})}(\lambda)$$

où X est une courbe lisse de genre g , coïncident avec l'action des opérations modulaires sur l'algèbre de Frobenius \mathcal{O}_ℓ .

On trouve souvent la définition abstraite suivante.

Définition 1.M (Anneau de fusion et matrice S). Une algèbre de fusion A est une algèbre engendrée par une base $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, avec $\lambda_0 = 1$, et munie d'une involution $i \mapsto i^*$, telle que la forme linéaire $t(\sum a_i \lambda_i) = a_0$ (coefficient de λ_0) munisse A d'une structure d'algèbre de Frobenius, avec des bases duales (λ_i) et (λ_i^*) . Si λ est un élément de la base, on notera souvent λ^* pour λ_{i^*} si $\lambda = \lambda_i$.

On ajoute souvent la condition $t(\lambda\mu\nu) > 0$ pour tous éléments de la base canonique λ, μ, ν , et la condition de Verlinde : il existe une matrice symétrique, unitaire $(S_{\lambda\mu})$ telle que

$$N_{\lambda\mu\nu^*} := t(\lambda\mu\nu^*) = \sum_{\chi} \frac{S_{\lambda\chi} S_{\mu\chi} \bar{S}_{\nu\chi}}{S_{0\chi}}$$

où χ parcourt la base canonique. Autrement dit : l'application linéaire $\lambda \mapsto s_\chi(\lambda) := S_{\lambda\chi}/S_{0\chi}$ définit un morphisme d'algèbres (un caractère) de A dans \mathbb{C} . Noter qu'on peut supposer que $S_{0\lambda} \in \mathbb{R}_+$ (on note traditionnellement 0 pour λ_0).

Noter que $\lambda\mu = \sum_{\nu} N_{\lambda\mu\nu^*} \nu$ et qu'ainsi

$$s_\chi(\lambda\mu) = \sum_{\nu} \frac{S_{\nu\chi}}{S_{0\chi}} \sum_{\xi} \frac{S_{\lambda\xi} S_{\mu\xi} \bar{S}_{\nu\xi}}{S_{0\xi}} = s_\chi(\lambda) \cdot s_\chi(\mu)$$

puisque en utilisant l'unitarité $\sum_{\nu} S_{\nu\chi} \bar{S}_{\nu\xi} = \delta_{\chi\xi}$. La formule $N_{0\mu\nu^*} = \delta_{\mu\nu}$ montre aussi que $S_{\mu\chi} = \bar{S}_{\mu^*\chi}$.

Dans les conditions ci-dessus, $t(x) = \sum_{\chi} s_\chi(x) \cdot |S_{0\chi}|^2$.

Proposition 1.15 (Formule de Verlinde). Soit A une algèbre de fusion, et $t^{(g)}$ son opération modulaire de genre g . Alors

$$t^{(g)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\mu} S_{\lambda_1\mu} \cdots S_{\lambda_n\mu} S_{0\mu}^{2-2g-n}$$

Démonstration. On sait que $t^{(g)}(x) = t(xw^g)$ où $w = \sum_{\lambda} \lambda\lambda^*$ est l'élément de Casimir de A . Alors

$$\begin{aligned} t^{(g)}(x) &= \sum_{\chi} s_\chi(\lambda_1) \cdots s_\chi(\lambda_n) \left(\sum_{\mu} s_\chi(\mu) s_\chi(\mu^*) \right)^g |S_{0\chi}|^2 \\ &= \sum_{\chi} S_{\lambda_1\chi} \cdots S_{\lambda_n\chi} S_{0\chi}^{-n} S_{0\chi}^{-2g} S_{0\chi}^2 \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 1.16 (voir [B]). L'algèbre de Frobenius \mathcal{O}_ℓ est un anneau de fusion : sa base canonique est donnée par les poids dominants de niveau $\leq \ell$, le poids λ^* est le plus haut poids dans la représentation contragrédiente de celle de plus haut poids λ de \mathfrak{g} .

Théorème 1.17 (voir [KP, 4.5.(d); GW]). *La matrice S pour une algèbre affine $\hat{\mathfrak{g}}$ associée à une algèbre de Lie simple est la matrice de Kac-Peterson qui s'écrit*

$$S_{\lambda\mu} = c \sum_{w \in W} \exp\left(\frac{2i\pi}{\ell + h^\vee} \langle w(\lambda + \rho), \mu + \rho \rangle\right)$$

avec les notations standard pour les systèmes de racines, et c est une constante de normalisation.

POLYNÔMES ANTISYMÉTRIQUES, POLYNÔMES DE SCHUR

Tout polynôme antisymétrique en n variables vérifie l'équation

$$P = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) P^\sigma$$

où P^σ est l'image de P par la permutation des variables donnée par σ . On peut alors vérifier qu'une base de l'espace vectoriel des polynômes antisymétriques est donnée par les éléments

$$q_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X_{\sigma(1)}^{p_1} \cdots X_{\sigma(n)}^{p_n}$$

où $p_1 > \cdots > p_n$ sont des entiers naturels, et $\lambda = (p_i - (n - i))$ est une suite décroissante (au sens large) d'entiers naturels, que l'on peut représenter par un diagramme de Young.

Comme les polynômes antisymétriques sont tous de la forme $q_0 s$ où on note q_0 le déterminant de Vandermonde correspondant au choix $p_i = n - i$, on obtient naturellement une base de l'espace vectoriel des polynômes symétriques en n variables grâce aux polynômes de Schur $s_\lambda = q_\lambda / q_0$. C'est un polynôme homogène de degré $|\lambda|$.

On aura besoin d'une formule de dualité :

Proposition 1.18. *Soient λ et λ^T des diagrammes de Young transposés l'un de l'autre, et s_λ, s_{λ^T} les polynômes de Schur en respectivement r et ℓ variables qui leur sont associés. Soit A une partie à r éléments de l'ensemble des racines $(r + l)$ -ièmes de l'unité, et A^* son complémentaire.*

Alors $s_\lambda(A) = (-1)^{|\lambda|} s_{\lambda^T}(A^)$.*

Démonstration. Considérons la matrice de taille $\binom{r+\ell}{r}$

$$\mathcal{F}_{\lambda\mu} = \frac{1}{(r + \ell)^{r/2}} \det \left[\exp \left(\frac{2i\pi p_i q_j}{r + l} \right) \right]_{p_i = a_i + i - 1, q_j = a'_j + j - 1}$$

où l'on a noté $\lambda = (a_n, \dots, a_1)$, et $\mu = (a'_n, \dots, a'_1)$.

Cette matrice est la r -ième puissance extérieure de la matrice de la transformée de Fourier discrète $F = (F_{pq})$ où

$$F_{pq} = \frac{1}{\sqrt{r + \ell}} \exp \frac{2i\pi pq}{r + \ell}$$

qui est symétrique et unitaire. La matrice \mathcal{F} est donc également symétrique et unitaire (à un coefficient scalaire près). Par ailleurs $\mathcal{F} = q_\lambda(A_\mu)$, où A_μ est l'ensemble de racines de l'unité $(\exp 2i\pi q_j / (r + l))$.

Le produit extérieur induit une dualité entre $\bigwedge^r \mathbb{C}^{r+\ell}$ et $\bigwedge^\ell \mathbb{C}^{r+\ell}$. Celle-ci se traduit de la manière suivante, en prenant pour convention que la puissance extérieure de F , est la matrice de ses mineurs de taille fixée, ceux-ci étant calculés dans l'ordre naturel des lignes et colonnes choisies :

$$\left(\bigwedge^r F \right)_{IJ} = (\det F) \varepsilon(I) \varepsilon(J) \left(\bigwedge^\ell F^{-1} \right)_{J^* I^*}$$

où I et J sont des ensembles de r indices parmi $r + \ell$, I^* et J^* leurs complémentaires et $\varepsilon(I)$ la signature de la permutation canonique envoyant $(1, \dots, r)$ sur I .

Avec nos notations, on obtient ainsi la formule

$$(r + \ell)^{-r/2} q_\lambda(A_\mu) = (-1)^{r+\ell-1} (-1)^{|\lambda|} (-1)^{|\mu|} (r + \ell)^{-\ell/2} q_{\lambda^{T^*}}(\bar{A}_\mu^*)$$

où λ^{T^*} est le diagramme de Young complémentaire, dans un rectangle de taille $\ell \times r$, de λ^T . La formule $z^{r+\ell-k} = \bar{z}^k$, valable pour toute racine $(r + \ell)$ -ième de l'unité, donne $q_{\lambda^{T^*}}(\bar{A}_\mu^*) = q_{\lambda^T}(A_\mu^*)$.

Pour $\lambda = 0$, on a par ailleurs :

$$(r + \ell)^{-r/2} q_0(A_\mu) = (-1)^{r+\ell-1} (-1)^{|\mu|} (r + \ell)^{-\ell/2} q_0(A_\mu^*)$$

soit en divisant, la formule

$$s_\lambda(A_\mu) = (-1)^{|\lambda|} s_{\lambda^T}(A_\mu^*).$$

□

FORMES EXPLICITES DE LA FORMULE DE VERLINDE, DUALITÉ RANG-NIVEAU

La dualité rang-niveau est un phénomène remarquable qui lie, au niveau combinatoire, l'algèbre de fusion de niveau ℓ de \mathfrak{sl}_r et l'algèbre de fusion de niveau r de \mathfrak{sl}_ℓ . On notera $\mathcal{O}_\ell(r)$ et $\mathcal{O}_r(\ell)$ ces deux algèbres.

Définition 1.N. Deux poids λ et λ^T pour \mathfrak{sl}_r et \mathfrak{sl}_ℓ respectivement sont dits en transposition, s'il existe des représentations de λ et λ^T par des diagrammes de Young dans des rectangles de taille $r \times \ell$ et $\ell \times r$ qui sont transposés l'un de l'autre.

Les formules présentées dans cette partie peuvent être résumées informellement de la façon suivante :

Sous certaines conditions combinatoires, les accouplements multilinéaires (de genre zéro) $t_n : \text{Sym}^n \mathcal{O}_\ell(r) \rightarrow \mathbb{k}$ et $t_n : \text{Sym}^n \mathcal{O}_r(\ell) \rightarrow \mathbb{k}$ prennent les mêmes valeurs sur des poids transposés.

Cette dualité peut se remarquer sur les formules explicites. Lorsque λ est le poids dominant $(a_r, a_{r-1}, \dots, a_2, a_1)$ de niveau ℓ , on pose $I_\lambda = \{a_r + r, \dots, a_1 + 1\} \subset [1, r + \ell]$, et $t_\lambda = (\exp(2i\pi p l / (r + \ell)))_{p \in I_\lambda}$. Le caractère (donné par la formule des caractères de Weyl) associé au poids λ est le polynôme de Schur s_λ .

Lemme 1.19. Les éléments t de PGL_r , tel que $t^{r+\ell} = 1$, représentables par une matrice diagonale dont les coefficients sont distincts et ordonnés cycliquement, sont en nombre $r/(r + \ell) \binom{r+\ell}{r}$, et en bijection avec les orbites sous W de leurs préimages dans SL_r .

Démonstration. Un tel élément admet $(r + \ell)$ préimages dans $(\mu_{r+\ell})^r \subset \text{GL}_r$, dont les coefficients sont des racines $(r + \ell)$ -ièmes de l'unité ordonnées cycliquement. De telles matrices correspondent à une partie à r éléments de $\mu_{r+\ell}$, avec une origine choisie.

Par ailleurs chaque élément admet r préimages dans SL_r , et le groupe cyclique d'ordre r dans W agit librement sur ces éléments. □

Pour μ un poids de SL_r standardisé (I_μ contient 1), on note alors t_μ^0 un élément de SL_r proportionnel à t_μ , de façon à ce que les t_μ^0 énumèrent des représentants de W -orbites.

La matrice de Kac-Peterson, qui est la matrice S pour $\mathcal{O}_\ell(r)$, est de taille $\binom{r+\ell-1}{r-1}$, de la forme

$$S_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{r+\ell}{r}} \cdot \frac{1}{(r+\ell)^{r/2}} \cdot \det \left[\exp \left(\frac{2i\pi pq}{r+l} \right) \right]_{p \in I_\lambda, q \in I_\mu} \cdot \exp(2i\pi\varphi(\lambda, \mu))$$

où $\varphi(\lambda, \mu)$ est un certain nombre réel.

Proposition 1.20. Dans l'algèbre $\mathcal{O}_\ell(r)$, on considère des diagrammes de Young λ_i dont le nombre total de cases est un multiple de r . Alors

$$t_g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{r^g}{(r + \ell)^g} \sum_{\mu} s_{\lambda_1}(t_{\mu}) \cdots s_{\lambda_n}(t_{\mu}) \det(t_{\mu})^{-|\lambda|/r} \prod_{s \in I_{\mu}, t \notin I_{\mu}} \left(2 \sin \left| \pi \frac{s-t}{r+\ell} \right| \right)^{g-1}$$

où μ parcourt les suites d'entiers $(a_r \geq \dots \geq a_1)$ compris entre 0 et ℓ . Sinon, le nombre est nul.

Démonstration. Rappelons que d'après la formule de Verlinde

$$t_g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\mu} s_{\lambda_1}(t_{\mu}^0) \cdots s_{\lambda_n}(t_{\mu}^0) |S_{0\mu}|^{2-2g}$$

et $|S_{0\mu}| = C|q_0(t_{\mu}^0)| = C|q_0(t_{\mu})|$ où $C = \sqrt{r/(r+\ell)}(r+\ell)^{-r/2}$.

Notant que $s_{\lambda}(t_{\mu}^0) = s_{\lambda}(t_{\mu})/\det(t_{\mu})^{|\lambda|/r}$, on peut, quitte à multiplier par $r/(r+\ell)$, remplacer la somme sur t_{μ}^0 par la somme sur les t_{μ} . On obtient ainsi

$$t_g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{r^g}{(r + \ell)^g} (r + \ell)^{r(g-1)} \sum_{\mu} s_{\lambda_1}(t_{\mu}) \cdots s_{\lambda_n}(t_{\mu}) \det(t_{\mu})^{-|\lambda|/r} |q_0(t_{\mu})|^{2-2g}$$

Si $|\lambda|$ n'est pas multiple de r , les remarques ci-dessus, montrent qu'on doit prendre en compte les différentes valeurs de $\det(t_{\mu})^{|\lambda|/r}$, ce qui rend la somme nulle.

Par ailleurs, en remarquant que

$$(r + \ell)^r |q_0(t_{\mu})|^2 = \prod_{s \in I_{\mu}} \frac{r + \ell}{\prod_{s' \in I_{\mu} \setminus s} |\zeta^s - \zeta^{s'}|} = \prod_{s \in I_{\mu}, s' \notin I_{\mu}} |\zeta^s - \zeta^{s'}|$$

(ce qu'on voit en considérant les facteurs associés à un s fixé), on obtient la formule recherchée. \square

Proposition 1.21. Soient λ_i^T des poids en transposition de λ_i , vus comme éléments de $\mathcal{O}_r(\ell)$. On suppose que $|\lambda|$ est multiple de $r\ell$. Alors

$$r^{-g} t_g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \ell^{-g} t_g(\lambda_1^T, \dots, \lambda_n^T).$$

Démonstration. On note $|\lambda| = r\ell k$. On a déjà vu que $s_{\lambda^T}(t_{\nu}) = (-1)^{|\lambda|} s_{\lambda}(t_{\mu})$ si t_{μ} et t_{ν} correspondent à des ensembles complémentaires de racines de l'unité. Ensuite, on remarque que $\det(t_{\mu}) \det(t_{\nu}) = (-1)^{r+\ell+1}$, ce qui permet d'écrire

$$\det(t_{\mu})^{-\ell k} = \det(t_{\mu})^{rk} = \det(t_{\nu})^{-rk} (-1)^{rk(r+\ell+1)} = (-1)^{|\lambda|} \det(t_{\nu})^{-rk}.$$

Dans la formule de la proposition 1.20, les termes de la somme sont donc invariants par l'échange de r et ℓ et le remplacement de μ par ν tels que t_{μ} et t_{ν} soient des ensembles complémentaires de racines de l'unité. La seule différence est dans le facteur r^g ou ℓ^g , d'où l'identité indiquée. \square

Cellules de Schubert et structures paraboliques

2.1 GRASSMANNIENNES, VARIÉTÉS DRAPEAUX ET DUALITÉ DE HOWE

La grassmannienne $\text{Gr}(k, n)$ est une variété algébrique complexe (mais ses équations naturelles sont à coefficients entiers) dont les points sont en bijection avec l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de \mathbb{C}^n .

L'ALGÈBRE DE LIE \mathfrak{sl}_n ET SES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES

La grassmannienne est une variété projective, homogène sous l'action du groupe (algébrique) GL_n : la plupart de ses propriétés s'expriment simplement par des données combinatoires, qui se lisent sur l'algèbre de Lie \mathfrak{sl}_n : il s'agit de l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ de trace nulle, muni de l'opération $[a, b] = ab - ba$ (crochet de Lie).

On distingue dans \mathfrak{sl}_n une *sous-algèbre de Cartan*, par exemple l'espace \mathfrak{h} des matrices diagonales, qui est un espace de dimension maximale où le crochet de Lie est nul. Un élément h de \mathfrak{h} agit sur \mathfrak{sl}_n par $x \mapsto [h, x]$: cette action est diagonalisable, et nulle sur \mathfrak{h} . On peut donc construire une base $(H_i), (X_\alpha)$ de \mathfrak{sl}_n telle que \mathfrak{h} soit engendrée par les H_i et pour $h \in \mathfrak{h}$, $[h, X_\alpha] = \alpha(h)X_\alpha$. Les α sont des formes linéaires non nulles sur \mathfrak{h} , appelées *racines*.

On peut décomposer \mathfrak{sl}_n en $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$, où \mathfrak{n}_\pm est l'espace des matrices strictement triangulaires supérieures (resp. inférieures), qui est une sous-algèbre *nilpotente* de \mathfrak{sl}_n . On choisit une sous-algèbre dite *de Borel* $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ (qui est elle *résoluble*), c'est l'espace des matrices triangulaires supérieures. Les racines α sont partagées en *positives* et *négatives*, selon l'appartenance de X_α à \mathfrak{n}_+ (ou \mathfrak{n}_-).

Les éléments X_α sont des matrices élémentaires E_{ij} (ayant un 1 dans la case (i, j)) qui correspondent à la forme linéaire $\alpha_{ij} = x_i - x_j$ sur \mathfrak{h} (identifié à l'hyperplan de \mathbb{C}^n d'équation $\sum x_i = 0$). L'espace \mathfrak{h}^\vee est muni d'une forme quadratique naturelle, la forme de Killing, qui s'identifie à la restriction de la forme quadratique standard sur \mathbb{C}^n . On peut choisir une *base* de racines, les $\alpha_i = x_i - x_{i+1}$ (dites *racines simples*), telle que toute racine positive s'écrive comme somme de racines simples. Les éléments de la base duale $\varpi_i = x_1 + \dots + x_i$ sont appelés poids fondamentaux. Un *poids* est un élément du réseau Λ engendré par les poids fondamentaux. On dit qu'il est *dominant* si son produit scalaire avec les racines simples est positif.

On pourra consulter les ouvrages classiques de Bourbaki [B2], ou le livre de Tauvel et Yu [TY] pour la théorie classique des algèbres de Lie. Le livre de Kac [K] sera également une référence utile pour les systèmes de racines et les algèbres de Kac-Moody,

Proposition 2.1 (Représentations des algèbres de Lie semi-simples, [TY, ch. 30]). *Si V est une représentation de dimension finie de \mathfrak{sl}_n , il existe une base de V dont chaque élément est un vecteur propre sous l'action de \mathfrak{h} , dont l'action est donnée par des poids.*

De plus, si $v \in V$ est un vecteur de plus haut poids, c'est-à-dire que v est un vecteur propre de poids λ pour l'action de \mathfrak{h} , et que $\lambda + \sum n_i \varpi_i$ n'est pas le poids d'un vecteur de V pour tous entiers positifs n_i , la représentation engendrée par v est irréductible.

Les représentations irréductibles de dimension finie de \mathfrak{sl}_n sont entièrement déterminées par le plus haut poids qui y apparaît, qui est un poids dominant. Pour tout poids dominant λ , on note V_λ la représentation irréductible de plus haut poids λ .

Définition 2.A (Sous-groupe parabolique associé à un poids dominant). Soit λ un poids dominant, et v_λ le vecteur de plus haut poids dans V_λ .

Le stabilisateur de v_λ est le sous-espace de \mathfrak{sl}_n engendré par \mathfrak{b} et les racines négatives α telles que $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$. C'est une sous-algèbre de Lie \mathfrak{p}_λ , dont le groupe de Lie associé est noté P_λ , le sous-groupe parabolique associé à λ .

Lorsque λ s'écrit comme somme de ϖ_{b_j} , où b_j est une suite décroissante d'entiers, P_λ s'identifie au sous-groupe de SL_n qui préserve un drapeau partiel de la forme

$$\mathbb{C}^n \supset \mathbb{C}^{b_1} \supset \dots \supset \mathbb{C}^{b_\ell} = 0$$

L'orbite de $[v_\lambda]$ dans $\mathbb{P}(V_\lambda)$ s'identifie à G/P_λ , qui s'interprète naturellement comme variété des drapeaux partiels de \mathbb{C}^n . Cette variété supporte naturellement un fibré en droites, que l'on peut noter $G \times_{P_\lambda} \mathbb{C}_\lambda$, P_λ agissant sur \mathbb{C}_λ par le caractère λ .

Théorème 2.2 (Théorème de Borel-Weil-Bott). Si λ est un poids dominant, le fibré en droites défini sur G/P_λ par le caractère λ , noté \mathcal{L}_λ est anti-ample. Les sections de $\mathcal{L}^\lambda = \mathcal{L}_\lambda^{-1}$ s'identifient, de façon G -équivariante, à l'espace dual de la représentation V_λ . Le plongement $G/P_\lambda \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ s'identifie à celui décrit par l'action de G sur v_λ .

Notons $\Lambda_\lambda \subset \Lambda$ le réseau engendré par les poids fondamentaux apparaissant avec un coefficient non nul dans λ . On peut alors décrire explicitement le groupe de Picard de G/P_λ .

Théorème 2.3 ([FI]). Le groupe de Picard de G/P_λ s'identifie à Λ_λ par la construction

$$\Lambda_\lambda \ni \mu \mapsto G \times_{P_\lambda} \mathbb{C}_{-\mu} \in \text{Pic}(G/P_\lambda).$$

STRUCTURES QUASI-PARABOLIQUES ET DUALITÉ DE HOWE

Avant d'introduire la notion de fibré vectoriel parabolique, commençons par définir la notion analogue pour un espace vectoriel.

Définition 2.B (Structure parabolique sur un espace vectoriel). Soit $\lambda = (a_n, \dots, a_1)$ un poids dominant de l'algèbre de Lie \mathfrak{sl}_n , bien défini à $\varpi_n = (1, \dots, 1)$ près (de sorte que les a_i soient entiers). Une structure parabolique de type λ , sur un espace vectoriel V de dimension n , est le choix d'un drapeau partiel sur V , du même type que les drapeaux partiels paramétrés par G/P_λ .

Une façon élégante d'écrire λ comme somme de poids fondamentaux est de considérer son transposé λ^T , dont le diagramme de Young est obtenu en échangeant lignes et colonnes dans le diagramme de λ . Par exemple, si $\lambda = (3, 2, 2, 0)$, $\lambda^T = (3, 3, 1)$. Si on écrit $\lambda^T = (b_1, \dots, b_\ell)$, où ℓ est un entier choisi supérieur à a_1 , $\lambda = \sum_j \varpi_{b_j}$.

La notion importante est la suivante :

Définition 2.C (Produit tensoriel diagrammatique). Soient V et W deux espaces vectoriels de dimensions respectives r et ℓ , λ un diagramme de Young inscrit dans un rectangle de taille $r \times \ell$. On suppose V et W munis de structures paraboliques de type λ et λ^T respectivement.

Alors $V \otimes W$ est un espace de dimension $r\ell$ naturellement muni d'une structure parabolique de type $|\lambda|$, c'est-à-dire le choix d'un sous-espace dont la dimension est le nombre de cases de λ .

Avec les notations $\lambda = (a_n \geq \dots \geq a_1)$, $\lambda^T = (b_\ell \geq \dots \geq b_1)$, cette structure est donnée par

$$(V \otimes W)_1 = \sum_{a_i + i + b_j + j \geq r + \ell + 2} V_{b_j} \otimes W_{a_i}.$$

La condition sur les indices revient à demander que pour les coordonnées naturelles du rectangle, (i, j) est une case de λ , c'est-à-dire $\ell + 1 - j \leq a_i$, ou encore $r + 1 - i \leq b_j$. Ces deux conditions sont simultanément vraies ou simultanément fausses, on peut donc les remplacer par leur somme.

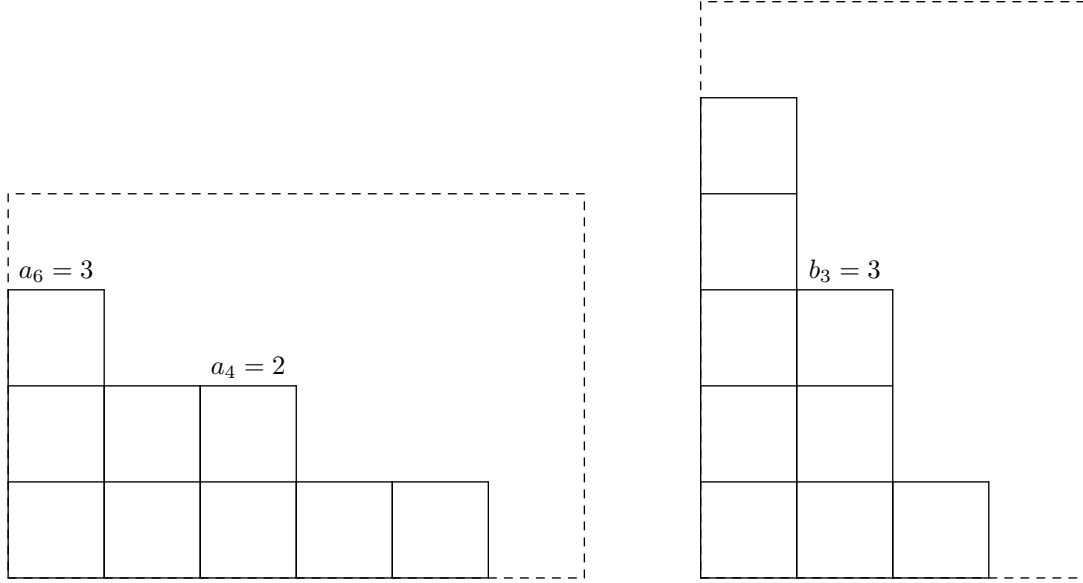


FIGURE 2.1: Diagramme de Young $\lambda = (3, 2, 2, 1, 1, 0)$ et son transposé $\lambda^T = (5, 3, 1, 0)$

Dans [O], on parle de produit tensoriel quasi-parabolique : cette terminologie se justifie en constatant qu'il suffit de sommer les $V_{b_j} \otimes W_{a_i}$ tels que (b_j, a_i) soit un coin saillant du diagramme de Young λ . Dans ce cas, on voit qu'en choisissant des filtrations *sans répétitions* V'_i et W'_j , on doit sommer les $V'_i \otimes W'_j$ avec $i + j$ constant.

Le produit tensoriel quasi-parabolique permet de décrire de façon géométrique un aspect de la dualité de Howe extérieure [H2] :

Proposition 2.4 (Dualité extérieure de Howe). *Soient V et W deux espaces vectoriels de dimensions r et ℓ . Alors $\bigwedge^k(V \otimes W)$ est isomorphe, en tant que représentation de $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$, à la somme directe des $S^\lambda V \otimes S^{\lambda^T} W$, où λ décrit les diagrammes de Young à k cases inscrits dans un rectangle de taille $r \times \ell$, et S^λ et S^{λ^T} sont les foncteurs de Schur réalisant les représentations irréductibles de plus hauts poids respectifs λ et λ^T .*

Proposition 2.5. *L'application associée au produit tensoriel quasi-parabolique est un morphisme $\Pi : \mathrm{GL}_r/P_\lambda \times \mathrm{GL}_\ell/P_{\lambda^T} \rightarrow \mathrm{Gr}(|\lambda|, r\ell)$ tel que $\Pi^* \mathcal{O}(1) = \mathcal{L}^\lambda \boxtimes \mathcal{L}^{\lambda^T}$. L'application associée $\bigwedge^{|\lambda|} \mathbb{C}^{r\ell} \rightarrow S^\lambda \mathbb{C}^r \otimes S^{\lambda^T} \mathbb{C}^\ell$ coïncide avec la projection naturelle.*

Démonstration. Supposons que les coins de λ aient pour coordonnées (i_k, j_l) avec $k + l = s$. Soient V et W des espaces vectoriels de rangs r et ℓ . Un point de $\mathrm{GL}_r/P_\lambda \times \mathrm{GL}_\ell/P_{\lambda^T}$ est un choix de structures paraboliques (dont on choisit une scission) :

$$V = V_0 \oplus \cdots \oplus V_s \supset V_1 \oplus \cdots \oplus V_s \supset \cdots \supset V_s = 0$$

(et pareillement pour W) et le sous-espace spécial du produit tensoriel quasi-parabolique $V \otimes W$ est alors $(V \otimes W)_1 = \bigoplus_{i+j \geq s} V_i \otimes W_j$.

Identifions le choix de ces structures paraboliques au point de stabilisateur $P_\lambda \times P_{\lambda^T}$: il suffit alors de vérifier que son action sur la droite de Plücker $\bigwedge^{|\lambda|} (V \otimes W)_1$ est bien donnée par le caractère (λ, λ^T) .

Pour cela, considérons la décomposition de Levi $P_\lambda = \prod \text{GL}(V_i) \rtimes U_\lambda$ (U_λ étant le radical unipotent de P_λ). Le plongement de $P_\lambda \times P_{\lambda^T}$ dans $\text{GL}(V \otimes_{\text{qpar}} W)$ induit l'application

$$\Pi : \prod \text{GL}(V_i) \times \prod \text{GL}(W_j) \rightarrow \prod_{i+j \geq s} \text{GL}(V_i \otimes W_j)$$

et le déterminant de $\Pi(A_i, B_j)$, à B_j fixé, est de la forme $\prod (\det A_i)^{\alpha_i}$, où les α_i sont exactement les coefficients de λ (dimensions des éléments de la filtration sur W). Ces déterminants sont justement les caractères recherchés. \square

On définit également la notion de morphisme quasi-parabolique :

Définition 2.D (Morphisme quasi-parabolique). Soit E et F des espaces vectoriels de dimensions r et ℓ , munis de structures paraboliques de type λ^* et λ^T . Alors $\text{Hom}(E, F)$ est naturellement muni d'une structure parabolique de type $|\lambda|$, donnée par le sous-espace $E^\vee \otimes_{\text{qpar}} F \subset E^\vee \otimes F$.

Le sous-espace de $\text{Hom}(E, F)$ ainsi défini, de dimension $|\lambda|$, est noté $\text{Hom}_{\text{qpar}}(E, F)$, dont on appellera les éléments morphismes quasi-paraboliques de E dans F .

2.2 STRUCTURES PARABOLIQUES INDUITES ET CELLULES DE SCHUBERT

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel V de dimension $r + \ell$, muni d'un drapeau complet

$$V = V_{r+\ell} \supset \dots \supset V_2 \supset V_1 \supset 0.$$

On peut alors s'intéresser aux structures paraboliques naturellement induites sur les sous-espaces de V de dimension r .

Fixons un diagramme de Young $\lambda = (a_r, \dots, a_1)$, avec $a_r \leq \ell$, et $I = \{a_1 + 1, \dots, a_r + r\}$ l'ensemble fini associé. On notera de la même façon $\lambda^T = (b_\ell, \dots, b_1)$ le diagramme de Young transposé, λ^{*T} son complémentaire et $J = \{b_1^* + 1, b_\ell^* + l\}$ l'ensemble fini associé. Par commodité, on a posé $b_j^* = r - b_{\ell+1-j}$.

Proposition 2.6. Les ensembles I et J sont complémentaires.

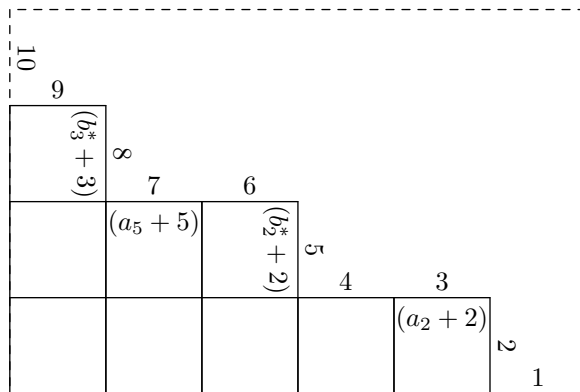


FIGURE 2.2: Construction de $I = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$ et $J = \{2, 5, 8, 10\}$

Démonstration. Dessinons λ sous la forme d'un «histogramme» inscrit dans un rectangle de largeur r et hauteur ℓ : alors le bord de λ , vu comme une ligne brisée du point $(r, 0)$ au point $(0, \ell)$ est constitué de $r + \ell$ segments horizontaux ou verticaux. L'ensemble J correspond aux emplacements des segments verticaux, l'ensemble I aux emplacements des segments horizontaux. \square

Définition 2.E (Cellules de Schubert). La cellule de Schubert associée à λ , notée \mathcal{Y}_λ , est la sous-variété (localement fermée) de $\text{Gr}(r, V)$ constituée des sous-espaces E de V , de dimension r , tels que les espaces $E \cap V_k$ (pour $k \in I$) forment un drapeau complet de E , ou encore si $\dim(E \cap V_{a_i+i}) = i$, et si les V_k sont minimaux pour cette propriété : $\dim(E \cap V_{a_i+i-1}) = i - 1$.

Les variétés de Schubert sont les adhérences des cellules de Schubert, sachant que \mathcal{Y}_λ est contenu dans l'adhérence de \mathcal{Y}_μ si et seulement si $\lambda \leq \mu$. On peut montrer que \mathcal{Y}_λ est isomorphe à un espace affine de dimension $|\lambda|$, en choisissant une base adaptée de V et en montrant que chaque élément de \mathcal{Y}_λ admet une unique base adaptée, et peut être exprimé par une matrice échelonnée.

Par exemple, soit $\lambda = (3, 1, 1)$. Les éléments de $Y_\lambda \subset \text{Gr}(3, 7)$ (noter que I est l'ensemble $\{2, 3, 6\}$) sont alors décrits bijectivement par les bases associées aux matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & * & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui forment un espace affine de dimension $|\lambda| = 5$: un espace $E \in Y_\lambda$ admet une unique base (à dilatations près) dont les éléments sont de la forme $v_2 \in V_2, v_3 \in V_3, v_6 \in V_6$ et tel que v_3 ait un second coefficient nul, v_6 ait des coefficients nuls en position 2 et 3 (ce qui permet d'éliminer la possibilité du choix d'un vecteur $v_3 + av_2$ ou $v_6 + \beta v_3 + \gamma v_2$).

Notons

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} V \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

la suite exacte de fibrés vectoriels tautologiques sur $\text{Gr}(r, V)$, qui s'évalue en un point $[E]$ sur $0 \rightarrow E \rightarrow V \rightarrow V/E \rightarrow 0$. La propriété qui nous intéresse est la structure parabolique naturelle qui existe sur cette suite exacte, en restriction à Y_λ . On note d'abord la définition duale :

Proposition 2.7. Un point E appartient à \mathcal{Y}_λ si et seulement si les projections de V_j sur V/E , pour $j \in J$, forment un drapeau complet de V/E , ou encore si $\dim(V_{b_j^*+j}/E) = j$ les V_k qui interviennent étant minimaux.

Soit $C_k = (i, j)$ un coin (saillant) de λ^* , au sens où $a_i = \ell - j, b_j = r - i$. Alors $b_{\ell+1-j}^* = i$, et $E_{(k)} = E \cap V_{a_i+b_{\ell+1-j}^*}$ est par définition un sous-espace de E de dimension $b_{\ell+1-j}^*$, si E est un élément de \mathcal{Y}_λ . Ceci munit E d'une structure parabolique de type λ^* .

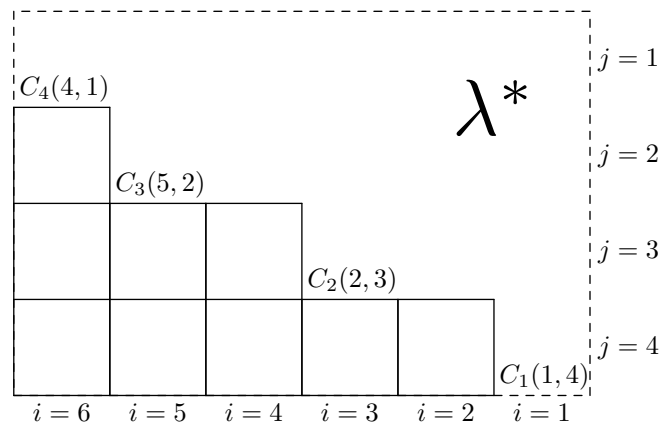


FIGURE 2.3: Coins rentrants d'un diagramme de Young

De même $F_{(k)} = V_{a_i+b_{\ell+1-j}^*}/E_k$ est de dimension a_i : F est ainsi muni d'une structure parabolique de type λ . On numérote les coins de sorte que i soit une fonction croissante de k : les filtrations $(E_{(k)})$ et $(F_{(k)})$ sont strictement croissantes.

Proposition 2.8. *Le fibré tangent de \mathcal{Y}_λ , en tant que sous-fibré du fibré tangent de $\text{Gr}(r, V)$ s'identifie à $\mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \subset \mathbf{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ qui est un sous-fibré de rang $|\lambda|$.*

Démonstration. Par la remarque qui précède, on sait que \mathcal{E} et \mathcal{F} sont munis de filtrations par des sous-fibrés vectoriels qui leur donnent en tout point des structures paraboliques de types λ^* et λ^T .

Décrivons explicitement la structure parabolique de $\mathbf{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: son sous-espace distingué est la somme, pour (i, j) parcourant les coins saillants de λ , de $E_j^\vee \otimes F_i$. Si les coins C_k ont pour coordonnées (i_k, j_k) , il existe k tel que $i = i_k - 1$ et $j = j_{k+1} - 1$, c'est-à-dire que $E_j^\vee = E_{(k)}^\perp$ et $F_i = F_{(k+1)}$.

Mais la somme des espaces $E_{(k)}^\perp \otimes F_{(k+1)}$ est exactement l'espace $\text{Hom}_{\text{qpar}}(E, F)$ des morphismes de E dans F qui envoient $E_{(k)}$ dans $F_{(k)}$. Il est facile de voir que cet espace est contenu dans l'espace tangent à \mathcal{Y}_λ : une déformation paramétrée par un élément de cet espace conserve la dimension de $E \cap V_{a_i + b_{i+1}^*}$, ce qui donne une partie des conditions de Schubert. On vérifie alors que les autres conditions sont des conditions de généralité, qui sont préservées par déformation. \square

2.3 ESPACES DE MODULES DE FIBRÉS PARABOLIQUES ET BLOCS CONFORMES

Dans cette partie, on se fixe une courbe projective lisse X de genre g , et des points fixés p_0 et $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, ainsi que pour chaque point p_i un diagramme de Young. On notera par λ la collection de diagrammes de Young choisis. On pourra se reporter aux articles de C. Pauly [P1, P2], ainsi qu'à [LS] pour les analogues paraboliques des constructions vues précédemment (champs et variétés de modules, fibrés déterminants, lien avec les blocs conformes).

CHAMP DE MODULES ET DIVISEURS THÊTA

Définition 2.F (Fibré vectoriel quasi-parabolique). *Un fibré vectoriel quasi-parabolique sur (X, \mathbf{p}) , de rang r et de poids λ , est la donnée d'un fibré vectoriel de rang r sur X , et pour chaque point p_i , d'une structure parabolique de type λ_i sur la fibre E_{p_i} .*

Si E et F sont des fibrés vectoriels quasi-paraboliques de poids λ et λ^T , le produit tensoriel $E \otimes F$ est lui aussi naturellement muni d'une structure quasi-parabolique, définie en un point p_i par la structure quasi-parabolique de l'espace vectoriel $E_{p_i} \otimes F_{p_i}$ comme dans la section précédente. On définit de même un fibré vectoriel $\mathbf{Hom}(E, F)$ et son sous-fibré $\mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(E, F)$, qui est le sous-faisceau des sections s'évaluant dans $\text{Hom}_{\text{qpar}}(E_{p_i}, F_{p_i})$ en chaque point p_i . Ses sections globales forment un espace vectoriel $\text{Hom}_{\text{qpar}}(E, F)$, l'espace des morphismes quasi-paraboliques entre E et F .

On peut définir également la notion de famille de fibrés vectoriels quasi-paraboliques :

Définition 2.G. *Soit S un schéma. Une famille de fibrés vectoriels quasi-paraboliques sur (X, \mathbf{p}) , de rang r et de poids λ , paramétrée par S est la donnée :*

- d'un fibré vectoriel \mathcal{E} sur $X \times S$, dont le fibré des repères (qui est un GL_r -fibré principal) est noté \mathcal{R} ;
- pour chaque point p_k , vu comme morphisme $S \rightarrow X \times S$, d'une section de la famille de variétés de drapeaux $p_k^*(\mathcal{R}/P_{\lambda_k}) \rightarrow S$;
- d'un isomorphisme $\mathcal{O}_S \rightarrow p_0^*(\det \mathcal{E})$.

Par définition, le champ de modules $\mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}(r, \lambda)$ des fibrés vectoriels quasi-paraboliques de rang r et de poids λ est algébrique, et le morphisme $\mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}(r, \lambda) \rightarrow \mathcal{U}_X(r)$ est représentable, localement identifiable à un produit de (familles de) variétés drapeaux.

On peut définir sur le champ de modules $\mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \lambda)$ un fibré déterminant (dual) \mathcal{L} provenant de $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r)$. Par ailleurs, si \mathcal{E} est une famille de fibrés vectoriels quasi-paraboliques sur S , de déterminant fixé, le déterminant des fibrés $p_i^* \mathcal{E}$ est le fibré trivial sur S .

Comme $p_k^* \mathcal{E}$ est en plus filtré par des sous-fibrés $E_{k,j}$ de rang b_j (où $\lambda^T = (b_1, \dots, b_\ell)$), on peut poser $\det E_{k,j}^\vee = \mathcal{L}^{\varpi_{b_j}^{(k)}}$, où $\varpi_{b_j}^{(k)}$ est le poids fondamental ϖ_{b_j} au point p_k .

Théorème 2.9 (Laszlo-Sorger [LS]). *Soit Λ_k le réseau des poids de P_{λ_k} , engendré par les poids fondamentaux apparaissant dans λ_k . Alors le morphisme naturel $\mathbb{Z} \times \prod_{k=1}^n \Lambda_k \rightarrow \text{Pic } \mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \lambda)$ envoyant les générateurs naturels de gauche sur \mathcal{L} et les $\mathcal{L}^{\varpi_{b_j}^{(k)}}$ est un isomorphisme.*

On notera $\mathcal{L}^{\ell, \mu}$ l'image de $(\ell, \mu_1, \dots, \mu_n)$ par le morphisme ci-dessus.

Théorème 2.10 (Laszlo-Sorger [LS]). *Lorsque les μ_i sont des poids dominants de niveau $\leq \ell$, le fibré en droites $\mathcal{L}^{\ell, \mu}$ a pour sections le bloc conforme associé à (X, \mathbf{p}) , au niveau ℓ pour les représentations intégrables $\mathcal{H}_{\ell, \mu_k}$ placées aux points p_k .*

Les fibrés en droites mentionnés ci-dessus peuvent être produits sous la forme de fibrés déterminants, de la manière suivante. On se fixe un niveau ℓ et des poids μ_1, \dots, μ_n adaptés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, c'est-à-dire que $\mu_i \in \Lambda_{\lambda_i}$. Soit F un fibré vectoriel de rang ℓ , muni d'une structure parabolique de poids $(\mu^*)^T$.

Si \mathcal{E} est une famille de fibrés vectoriels quasi-paraboliques de rang r paramétrée par S , de poids λ , et si π est la projection de $X \times S$ sur S , on peut considérer le fibré en droites \mathcal{L}_F , dual de $\det R\pi_* \mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(F, E)$, que l'on définit, comme d'habitude, par $\det \pi_* \mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(F, E)(dp_0)$ pour un entier d suffisamment grand (ou en représentant l'image directe supérieure par un complexe de fibrés vectoriels), en utilisant sur E la structure parabolique induite de poids μ .

Proposition 2.11. *Le fibré en droites \mathcal{L}_F est bien défini sur $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r, \lambda)$ et est isomorphe à $\mathcal{L}^{\ell, \mu}$.*

Démonstration. Comme d'habitude, on se place dans le cadre d'une famille de fibrés vectoriels quasi-paraboliques sur une base S . On commence par remarquer qu'on a une suite exacte naturelle fournie par les morphismes d'évaluation en les points p_k :

$$0 \rightarrow \mathbf{Hom}(F, E)(-\sum p_i) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(F, E) \rightarrow \bigoplus_k \mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(F_{p_k}, E_{p_k}) \rightarrow 0$$

qui permet d'écrire \mathcal{L}_F comme produit tensoriel d'un fibré déterminant \mathcal{L}^ℓ et des duals, notés D_k , des déterminants des fibrés $\mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(F_{p_k}, E_{p_k})$.

La structure parabolique est définie par une section de la fibration en variétés drapeaux $S \rightarrow \mathcal{R}(E_{p_k})/P_{\mu_k}$ (où $\mathcal{R}(E_{p_k})$ est le fibré des repères de $p_k^* E$), et le produit tensoriel par F_{p_k} donne un morphisme vers une fibration en grassmanniennes

$$\mathcal{R}(E_{p_k})/P_{\mu_k} \rightarrow \text{Gr}(|\mu_k|, \mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(F, E))$$

qui à un point s associe le point $\mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(F_{p_k}(s), E_{p_k}(s))$. On voit alors que D_k est l'image inverse du fibré en droites de Plücker sur cette famille de grassmanniennes.

La formulation géométrique de la dualité de Howe (proposition 2.5) montre que D_k est en fait le fibré \mathcal{L}^{μ_k} , ce qui conclut. \square

Lorsque $\mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(F, E)$ est un fibré vectoriel de pente $g - 1$ sur X , ce qui est équivalent à demander que sa caractéristique d'Euler (holomorphe) soit nulle, l'image directe dérivée $R\pi_* \mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(F, E)$ peut être représenté par un complexe de fibrés vectoriels sur S de la forme $C_0 \xrightarrow{\partial} C_1$, où C_0 et C_1 ont même rang. Ainsi $\det \partial$ est une section de \mathcal{L}_F , dont l'annulation détecte la non-nullité de la cohomologie. Cette section est cependant définie à une constante multiplicative près.

Un fibré vectoriel F définit donc sur le champ de modules $\mathcal{U}_X(r, d, \lambda)$ des fibrés vectoriels paraboliques de degré d (correctement choisi) une section de $\mathcal{L}^{\ell, \mu}$, dont le diviseur est le *diviseur Thêta* de F ,

$$\Theta_F = \{E \in \mathcal{U}_X(r, d, \lambda) \text{ tels que } \text{Hom}_{\text{qpar}}(F, E) \neq 0\}.$$

STABILITÉ, ESPACES DE MODULES GROSSIERS

Il est encore possible de définir une notion de *semi-stabilité* pour les fibrés vectoriels quasi-paraboliques : cette notion dépend d'un choix particulier de poids, et elle permet de décrire les variétés de modules grossières de fibrés vectoriels paraboliques sur X .

Définition 2.H (Structure parabolique induite). *Soit E un fibré vectoriel de rang r , de degré d , et λ un choix de diagrammes de Young de niveau $\leq \ell$, pour les points p_k . Si F est un sous-fibré vectoriel saturé de E (au sens où E/F est un faisceau cohérent sans torsion), on définit sur F une filtration décroissante par $F_j = F \cap E_j$, où E_j est le sous-faisceau des sections de E passant par $(E_{p_k})_j$ en p_k .*

Cette filtration décroissante définit sur F une structure parabolique correspondant à des poids λ' .

On pourra remarquer que les poids λ'_k ne dépendent que de la position de la fibre F_{p_k} dans E_{p_k} : on choisit un raffinement de la filtration (E_j) en un drapeau complet. Si F_{p_k} appartient à la cellule de Schubert \mathcal{Y}_μ , et si $\lambda_k = (a_r, \dots, a_1)$, on peut calculer $\lambda'_k = (a_i)_{i \in I_\mu}$, où I_μ est la partie à s éléments de $[1, r]$ associée à μ comme dans la section 2.2.

Définition 2.I (Pente d'un fibré parabolique). *Si E est un fibré vectoriel parabolique, et λ un système de poids associé, le degré parabolique de E est défini par $\ell \deg_{\text{par}}(E) = \ell \deg E + |\lambda|$. On définit de même une pente parabolique $\mu_{\text{par}}(E) = \deg_{\text{par}}(E)/r$, où r est le rang de E .*

Un fibré parabolique est dit (λ) -stable (resp. semi-stable), si pour tout sous-fibré vectoriel strict $F \subset E$, $\mu_{\text{par}}(F) < \mu_{\text{par}}(E)$, les poids paraboliques pour F étant ceux de la structure induite, définie ci-dessus. Ces notions permettent de décrire un espace de modules grossier pour les fibrés paraboliques (voir les constructions de Mehta et Seshadri [MS], Bhosle [B1]). La construction utilise l'espace $Q(r, d)$ qui a servi à la construction de $U_X(r, d)$, le fait que les sections d'un fibré parabolique ont naturellement une filtration par ℓ sous-espaces correspondant aux filtrations définissant la structure parabolique.

Un fibré parabolique (en degré assez grand), et le choix d'une base de l'espace de ses sections déterminent donc un point de $Q(r, d)$ et un point d'une certaine variété de drapeaux, laquelle est munie d'un fibré en droites correspondant au poids $\sum \varpi(h_j)$ où h_j est la dimension de l'espace de sections du j -ième cran de la filtration.

On obtient ainsi un plongement projectif de l'espace des paramètres, et un quotient GIT qui donne l'espace de modules grossier.

Nombres d'intersections «quantiques» et preuve de la dualité

3.1 LE TENSEUR DE DUALITÉ RANG-NIVEAU

DÉFINITIONS

Soit (X, \mathbf{p}) une courbe projective lisse de genre g , et λ une famille de diagrammes de Young inscrits dans des rectangles de taille $r \times \ell$. On suppose s'être fixé un point p_0 , et on identifie la variété $\text{Pic}(X)$ avec l'espace de modules des fibrés en droites rigidifiés en p_0 , ce qui fournit une origine canonique dans $\text{Pic}^d(X)$ pour tout d . On aura besoin du diviseur $D_\lambda = \sum |\lambda_i| \cdot p_i$, de degré $|\lambda|$ sur X .

Soient E et F deux fibrés vectoriels paraboliques de rangs r et ℓ , munis de structures paraboliques de type λ et λ^T . Le fibré vectoriel $(E \otimes F)_{\text{qpar}}$ est le sous-fibré de $E \otimes F$ défini par $\mathbf{Hom}_{\text{qpar}}(E^\vee, F)$: il est de degré $r \deg F + \ell \deg E + |\lambda| - nr\ell$.

On notera les pentes de E et F respectivement μ_E et μ_F , et on suppose que $|\lambda| = r\ell\delta$, où δ est un entier.

Définition 3.A. *Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera Θ le fibré déterminant sur $\text{Pic}^{g-1}(X)$, vu comme espace de modules de fibrés en droites.*

Le fibré en droites Θ est notamment bien défini par un diviseur particulier (le diviseur thêta) dont le support est l'ensemble des fibrés en droites de $\text{Pic}^{g-1}(X)$ admettant une section non nulle, et définit une polarisation principale sur $\text{Pic } X$.

Proposition 3.1. *Soit E un fibré vectoriel de rang r et de degré zéro sur X , et \mathcal{P} le fibré universel sur $X \times \text{Pic}^{g-1}(X)$. On note Θ_E le fibré déterminant $\det R\pi_*(\mathcal{P} \otimes E)^\vee$.*

Alors $\Theta_E \simeq r\Theta + \det E$, où $\det E$ est le fibré en droites sur $\text{Pic}(X)$ paramétré par le point $\det E \in \text{Pic}(X) \simeq \widehat{\text{Pic}}(X)$.

Démonstration. Comme on sait que dans le groupe de Grothendieck $K_0(X)$, $[E]$ est égal à $(r-1)[\mathcal{O}_X] + [\det E]$, il suffit, par additivité de vérifier le cas où E est un fibré en droites : comme p_0 a été choisi comme origine, on peut remplacer E par $E(kp_0)$, et pour k assez grand, on est réduit au cas où E est de la forme $\mathcal{O}_X(D)$, pour un certain diviseur effectif D . Supposons que D s'écrit $\sum q_i$, où les q_i sont des points distincts de X .

La suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_D(D) \rightarrow 0$ montre alors que Θ_E s'identifie au produit de Θ par les fibrés en droites $q_i^* \mathcal{P}$. Mais on a vu que ceux-ci étaient les fibrés en droites sur $\text{Pic}(X)$ définis par les q_i , vus comme points de la variété abélienne duale, ce qui prouve l'assertion. \square

Proposition 3.2. *Le morphisme de produit tensoriel*

$$\tau : \mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \lambda) \times \text{Pic}(X) \rightarrow \mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \lambda)$$

est étale, de degré r^{2g} , et si $\mathcal{L}_F^{\text{par}}$ est le fibré déterminant associé au fibré parabolique F

$$\tau^* \mathcal{L}_F^{\text{par}} \simeq \mathcal{L}^{\ell, \lambda} \boxtimes \mathcal{O}(r\Theta_F - D_\lambda).$$

En particulier, on obtient la relation

$$r^g h^0(\mathcal{L}_F^{\text{par}}) = \ell^g h^0(\mathcal{L}^{\ell, \lambda}).$$

Les travaux de Tsuchiya-Ueno-Yamada [TUY], et la démonstration de l'isomorphisme entre blocs conformes et sections de $\mathcal{L}^{\ell, \lambda}$ [LS] donnent la formule suivante :

$$h^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r, \lambda), \mathcal{L}^{\ell, \lambda}) = t_g(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

La fonction t_g a été définie dans la section 1.3. En corollaire de la dualité rang-niveau combinatoire (proposition 1.21), on trouve la propriété :

Corollaire 3.3. Les espaces $H^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}(r, \lambda), \mathcal{L}^{\ell, \lambda})$ et $H^0(\mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}(\ell, \lambda^T), \mathcal{L}_E^{\text{par}})$ ont même dimension, lorsque E est un fibré vectoriel de rang r , muni de structures paraboliques de type λ .

Corollaire 3.4. L'espace $H^0(\mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}(r, \lambda), \mathcal{L}^{1, \lambda})$ où λ est un choix de diagrammes de Young de niveau 1, est de dimension 1 lorsque $|\lambda|$ est multiple de r , et zéro sinon.

Démonstration. Dans le cas $\ell = 1$, la formule est particulièrement simple :

$$t_g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{r^g}{(r+1)^g} \sum_{T \subset \mathbb{Z}/(r+1)\mathbb{Z}, \#T=r} c_{\lambda_1}(\zeta^T) \cdots c_{\lambda_n}(\zeta^T) \left(\prod_{t \in T} \zeta^t \right)^{-|\lambda|/r} \prod_{u \in T, v \notin T} \left(2 \sin \left| \pi \frac{u-v}{r+1} \right| \right)^{g-1}$$

où c_λ est la λ -ième fonction symétrique élémentaire. Or si T est une partie à r éléments de $\mathbb{Z}/(r+1)\mathbb{Z}$, de complémentaire $\{\tau\}$:

$$\prod_{t \in T} (1 - \zeta^t X) = \frac{1 - X^{r+1}}{1 - \zeta^\tau X} = \sum (-1)^k c_k(\zeta^T) X^k$$

d'où la formule $c_k(\zeta^T) = (-1)^k \zeta^{k\tau}$. On a aussi

$$\prod_{u \in T, v \notin T} \left(2 \sin \left| \pi \frac{u-v}{r+1} \right| \right)^{g-1} = \prod_{k=1}^r |1 - \zeta^k|^{g-1} = (r+1)^{g-1}.$$

On obtient

$$t_g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{r^g}{r+1} \sum_{\omega \in \mu_{r+1}} (-\omega)^{\sum \lambda_i} ((-1)^r \omega^r)^{-|\lambda|/r}$$

où la puissance fractionnaire est en fait une moyenne sur les valeurs possibles de la «fonction multiforme» $z \mapsto z^{-|\lambda|/r}$. Le résultat est alors r^g si $|\lambda|$ est multiple de r et zéro sinon. La proposition précédente permet alors de conclure. \square

On est alors à même de définir l'objet qui nous intéresse :

Proposition 3.5. Soit τ le foncteur de produit tensoriel quasi-parabolique, associé aux diagrammes de Young λ . Alors τ définit un morphisme de champs

$$\tau : \mathcal{S}\mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}(r, \lambda) \times \mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}(\ell, \lambda^T) \rightarrow \mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}(r\ell, |\lambda|)$$

tel que $\tau^* \mathcal{L}^{1, |\lambda|}$ soit isomorphe au produit externe $\mathcal{L}^{\ell, \lambda} \boxtimes \mathcal{L}_E^{\text{par}}$, où E est n'importe quel fibré vectoriel parabolique de déterminant trivial muni d'une structure quasi-parabolique de type λ .

Ce morphisme est équivariant sous l'action du groupe algébrique $\text{Pic } X$.

Démonstration. Connaissant le comportement des fibrés en droites naturels vis-à-vis du produit tensoriel quasi-parabolique (proposition 2.5), on se ramène à étudier le comportement des fibrés déterminants (non paraboliques) vis-à-vis du produit tensoriel, c'est-à-dire que $\tau^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^\ell \boxtimes \mathcal{L}_E$.

Pour cela, on montre que pour toutes familles de fibrés vectoriels \mathcal{E} et \mathcal{F} (où \mathcal{E} est de déterminant trivial), le fibré $\det R\pi_*(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ est canoniquement (ou *naturellement*) isomorphe à $\det R\pi_*(\mathcal{E})^\ell \otimes \det R\pi_*(\mathcal{F})^r$.

En utilisant l'additivité par rapport aux suites exactes courtes, on peut se restreindre au cas où \mathcal{F} est un fibré en droites. On a déjà vu comment construire un isomorphisme canonique entre les objets qui nous intéressent dans la proposition 3.1. \square

Lorsque E est de déterminant trivial, on notera $\mathcal{L}_E^{\text{par}} =: \mathcal{L}^{r, \lambda^T}$. Si E est un fibré vectoriel de degré zéro mais de déterminant non trivial $\mathcal{O}_X(D - d \cdot p_0)$, on peut tout de même définir sur $\mathcal{U}_X(\ell, \lambda^T)$ un fibré déterminant $\mathcal{L}_E^{\text{par}}$.

Étant donnée une famille \mathcal{F} paramétrée par une base S , on voit alors que $\mathcal{L}_E^{\text{par}} - \mathcal{L}^{r, \lambda^T}$ est le produit des $q_i^*(\det \mathcal{F})$ où q_i parcourt les éléments de D . Le morphisme de déterminant $\det \mathcal{F} : S \rightarrow \text{Pic } X$ fait apparaître $\det \mathcal{F}$ comme image inverse du fibré de Poincaré sur $\text{Pic } X$, qu'on doit évaluer en les points $q_i \in X \subset \widehat{\text{Pic } X}$: par additivité, le point $\det E = \sum q_i$ fournit le fibré en droites recherché. On peut le noter $\det^*(\det E)$, où $\det E$ est un fibré en droites sur $\text{Pic } X$.

Définition 3.B (Tenseur dit de *dualité étrange*). *On suppose que δ est un entier. Alors il existe une section s de $\mathcal{L}^{1, |\lambda|}$ sur $\mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}(r\ell, |\lambda|)$ dont le lieu des zéros est l'ensemble des fibrés vectoriels G tels que $G \otimes \mathcal{O}_X((g-1+\delta) \cdot p_0)$ possède une section non nulle passant par les sous-espaces spéciaux en les p_i .*

Le tenseur de dualité rang-niveau, ou dualité étrange, est l'élément $SD = \tau^ s$ dans*

$$H^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}(r, \lambda), \mathcal{L}^{\ell, \lambda}) \otimes H^0(\mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}(\ell, \lambda^T), \mathcal{L}^{r, \lambda^T})$$

Noter que $H^0(\mathcal{L}^{1, |\lambda|})$ est de dimension 1 si et seulement si δ est un entier (le nombre total des cases de λ est multiple de $r\ell$), et de dimension zéro sinon.

Lorsque l'on considère les champs de modules (ou variétés de modules) de fibrés sans structure parabolique, il a été conjecturé par Beauville et Donagi, Tu que ce tenseur induisait un accouplement parfait entre les deux espaces de sections : cette conjecture a été démontrée par P. Belkale [B1, B2].

L'article de Marian et Oprea [MO1], qui reprend des idées très similaires, montre comment cette preuve peut se faire en travaillant directement sur une courbe algébrique lisse quelconque (alors que l'approche de Belkale déduit le résultat de calculs concernant \mathbb{P}^1). Nous allons voir que cette conjecture, formulée pour les fibrés vectoriels paraboliques, est encore vraie, en présentant la preuve à leur manière.

FIBRÉ DÉTERMINANT TORDU

La technique de preuve de Marian et Oprea utilise un fibré déterminant modifié, qui pallie le fait que les fibrés déterminants \mathcal{L}_F dépendent du choix de F (en fait, de son déterminant) lorsqu'ils sont considérés sur l'espace $\mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}(r)$. On arrive ainsi à définir un accouplement entre les sections de fibrés en droites sur $\mathcal{U}_X(r, \lambda)$ et $\mathcal{U}_X(\ell, \lambda^T)$.

Dans la suite, on notera abusivement Θ l'image inverse du fibré en droites Θ sur $\text{Pic } X$ par le morphisme $\det : \mathcal{U}_X(r, \lambda) \rightarrow \text{Pic } X$.

Proposition 3.6. *La relation suivante est vérifiée :*

$$h^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}, \mathcal{L}^{\ell, \lambda}) = \frac{r^g}{(r + \ell)^g} h^0(\mathcal{U}_{X, \mathbf{p}}, \mathcal{L}^{\ell, \lambda} \otimes \Theta)$$

Elle reste vraie si on remplace Θ par un fibré en droites de même classe dans le groupe de Néron-Severi.

Démonstration. Soit τ le morphisme de produit tensoriel $\mathcal{S}\mathcal{U}_{X,p}(r, \lambda) \times \text{Pic}^0 X \rightarrow \mathcal{U}_{X,p}(r, \lambda)$. Comme dans la section précédente, on calcule $\tau^* \mathcal{L}^{\ell, \lambda} \otimes \Theta$, qui est égal à

$$\mathcal{L}^{\ell, \lambda} \boxtimes \Theta^{rl} \otimes r^* \Theta$$

où r est le morphisme de multiplication par r sur $\text{Pic } X$. L'assertion découle du fait que $h^0(\Theta^{rl} \otimes r^* \Theta) = r^g(r+l)^g$. \square

On trouve ainsi la formule

$$h^0(\mathcal{U}_{X,p}, \mathcal{L}^{\ell, \lambda} \otimes \Theta) = \sum_{\mu} p_{\lambda_1}(t_{\mu}) \cdots p_{\lambda_n}(t_{\mu}) \det(t_{\mu})^{-|\lambda|/r} \prod_{s \in I_{\mu}, t \notin I_{\mu}} \left(2 \sin \left| \pi \frac{s-t}{r+l} \right| \right)^{g-1}$$

qui est bien symétrique en r et l .

Proposition 3.7. *Considérons le morphisme*

$$\tau' : \mathcal{U}_{X,p}(r, \lambda) \times \mathcal{U}_{X,p}(\ell, \lambda^T) \rightarrow \mathcal{U}_{X,p}(r\ell, |\lambda|) \times \text{Pic } X$$

défini par $(E, F) \mapsto (E \otimes F, \det E - \det F)$. Alors

$$\tau'^*(\mathcal{L}^{1, |\lambda|} \boxtimes \Theta) = (\mathcal{L}^{\ell, \lambda} \otimes \Theta) \boxtimes (\mathcal{L}^{r, \lambda^T} \otimes \Theta)$$

où $\bar{\Theta}$ désigne l'image de Θ par l'involution $x \mapsto -x$.

Démonstration. On voit là encore qu'il suffit de considérer le cas des fibrés vectoriels non paraboliques. Soit \mathcal{E} et \mathcal{F} sont des familles de fibrés vectoriels sur une même base S de rangs r et ℓ , alors il existe, localement pour la topologie étale sur S , une famille de fibrés en droites sur X , notée $R_{\mathcal{E}}$ tel que $R_{\mathcal{E}}^{\otimes r} = \det \mathcal{E}$. On définit un fibré en droites $R_{\mathcal{F}}$ de la même façon.

Alors $\mathcal{E} \otimes R_{\mathcal{E}}^{-1}$ est un fibré vectoriel de déterminant trivial, en utilisant les identités précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} \det R\pi_{\star}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) &= \det R\pi_{\star}((\mathcal{E} \otimes R_{\mathcal{E}}^{-1}) \otimes (\mathcal{F} \otimes R_{\mathcal{E}})) \\ &= \det R\pi_{\star}(\mathcal{E} \otimes R_{\mathcal{E}}^{-1})^{\ell} \otimes \det R\pi_{\star}(\mathcal{F} \otimes R_{\mathcal{E}})^r \\ &= \det R\pi_{\star}(\mathcal{E} \otimes R_{\mathcal{E}}^{-1})^{\ell} \otimes \det R\pi_{\star}(\mathcal{F} \otimes R_{\mathcal{F}}^{-1})^r \otimes \det R\pi_{\star}(R_{\mathcal{E}} \otimes R_{\mathcal{F}})^{r\ell}. \end{aligned}$$

Ces identifications ne dépendent pas de la rigidification choisie pour $R_{\mathcal{E}}$, qui est définie à une racine r -ième de l'unité près, ni de celle sur $R_{\mathcal{F}}$. Ceci décrit le fibré $\tau'^*(\mathcal{L}^{1, |\lambda|})$.

On doit le comparer avec

$$(\det R\pi_{\star} \mathcal{E})^{\ell} \otimes \det R\pi_{\star}(\det \mathcal{E}) \otimes (\det R\pi_{\star} \mathcal{F})^r \otimes \det R\pi_{\star}(\det \mathcal{F})$$

qui est égal (encore de manière canonique) à

$$\begin{aligned} &\det R\pi_{\star}(\mathcal{E} \otimes R_{\mathcal{E}}^{-1})^{\ell} \otimes \det R\pi_{\star}(\mathcal{F} \otimes R_{\mathcal{F}}^{-1})^r \\ &\otimes \det R\pi_{\star}(R_{\mathcal{E}})^{r\ell} \otimes \det R\pi_{\star}(R_{\mathcal{F}})^{r\ell} \otimes \det R\pi_{\star}(\det \mathcal{E}) \otimes \det R\pi_{\star}(\det \mathcal{F}). \end{aligned}$$

L'isomorphisme canonique à trouver est donc entre

$$\det R\pi_{\star}(R_{\mathcal{E}} \otimes R_{\mathcal{F}})^{r\ell} \otimes \det R\pi_{\star}(\det \mathcal{E} - \det \mathcal{F})$$

et

$$\det R\pi_{\star}(R_{\mathcal{E}})^{r\ell} \otimes \det R\pi_{\star}(R_{\mathcal{F}})^{r\ell} \otimes \det R\pi_{\star}(\det \mathcal{E}) \otimes \det R\pi_{\star}(-\det \mathcal{F})$$

Comme il s'agit d'un énoncé concernant la variété $\text{Pic}^0 X \times \text{Pic}^0 X$ dont on note les éléments (R_E, R_F) , on peut appliquer le théorème dit de «see-saw», comme dans [MO1]. L'isomorphisme étant vrai pour toute valeur fixe de \mathcal{E} , ou toute valeur fixe de \mathcal{F} , il est vrai globalement.

En effet si \mathcal{L} est le fibré déterminant $\det R\pi_* \mathcal{P}$ du fibré de Poincaré sur $\text{Pic}^0 X$, en fixant R_E à une valeur constante, le premier fibré devient $\mathcal{L}^{r\ell} + r\ell[R_E] + (-\ell)^*(r[R_E] + \mathcal{L})$, qui ne dépend pas de R_E , et qui est isomorphe au second. Le raisonnement est similaire pour le cas où F est fixé. \square

On a alors un nouveau tenseur de dualité rang-niveau :

Définition 3.C. *On suppose que $|\lambda|$ est multiple de $r\ell$. Soit s la section canonique de $\mathcal{L}^{1,|\lambda|}$ et θ celle de Θ . On note SD' l'image de $s \boxtimes \theta$ par l'application τ'^* de la proposition 3.7. Il s'agit d'un élément de l'espace*

$$H^0(\mathcal{U}_{X,p}(r, \lambda), \mathcal{L}^{\ell, \lambda} \otimes \Theta) \otimes H^0(\mathcal{U}_{X,p}(\ell, \lambda^T), \mathcal{L}^{r, \lambda^T} \otimes \bar{\Theta}).$$

La conjecture de Beauville et Donagi-Tu est que ce tenseur réalise une dualité parfaite. C'est maintenant un théorème, que nous généralisons ici aux fibrés vectoriels paraboliques.

Théorème 3.8 (Marian-Oprea [MO1]). *Le tenseur SD' , dans le cas des fibrés vectoriels sans structure supplémentaire, réalise une dualité parfaite entre les espaces $H^0(\mathcal{L}^\ell \otimes \Theta)$ et $H^0(\mathcal{L}^r \otimes \Theta)$.*

Un énoncé similaire existe bien sûr pour les espaces $H^0(\mathcal{L}_F \otimes \Theta)$ et $H^0(\mathcal{L}_E \otimes \Theta)$, où F et E sont des fibrés vectoriels quelconques de rangs ℓ et r .

3.2 EXTENSION DES DÉFINITIONS AUX FIBRÉS DE DEGRÉ QUELCONQUE

La définition des blocs conformes à partir des représentations d'algèbres de Lie affines de la forme $\hat{\mathfrak{sl}}_r$, fait apparaître un certain nombre de symétries.

L'algèbre de Lie \mathfrak{sl}_r , admet par exemple l'automorphisme extérieur $X \mapsto -X^T$, qui envoie une représentation V_λ sur sa représentation contragrédiente V_{λ^*} , dont le poids dominant est associé au diagramme de Young complémentaire de λ .

Dans la suite \mathcal{L} désignera systématiquement $\mathcal{L} = \det R\pi_* \mathcal{E}^\vee$, le fibré déterminant naturel. Par dualité de Serre, il est immédiat que \mathcal{E} et $\mathcal{E}^\vee \otimes K_X$ ont des fibrés déterminants naturellement isomorphes.

Proposition 3.9. *Soit $V : \mathcal{U}_X(r, d) \mapsto \mathcal{U}_X(r, -d)$ le foncteur de dualité. Alors $V^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L} \otimes \det^*(K_X)$ où K_X est vu comme un fibré en droites sur $\text{Pic}^d X$.*

Proposition 3.10. *Soient λ et λ^* des diagrammes de Young complémentaires, E et E^* des espaces vectoriels duaux, et $R(E)/P_\lambda, R(E^*)/P_{\lambda^*}$ les variétés de drapeaux associées.*

On note V l'application qui à un drapeau δ de E associe son drapeau dual δ^\perp , sont les membres sont les annihilateurs des membres de δ . Alors $V^ \mathcal{L}^{\lambda^*}$ est isomorphe à λ (de manière naturelle, si on s'est fixé un vecteur directeur de $\det E$).*

De plus l'application induite $S^{\lambda^} E^* \rightarrow S^\lambda E$ est l'isomorphisme naturel entre ces deux façons d'écrire la représentation contragrédiente de $S^\lambda(E^*)$.*

On obtient ainsi la propriété suivante :

Proposition 3.11. *Soit L un fibré en droites fixé, et $V : \mathcal{S}\mathcal{U}_X(r, L, \lambda) \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{U}_X(r, -L, \lambda^*)$ le foncteur de dualité. Alors l'application*

$$V^* : H^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r, L, \lambda), \mathcal{L}^{\ell, \lambda}) \rightarrow H^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r, -L, \lambda^*), \mathcal{L}^{\ell, \lambda^*})$$

est un isomorphisme.

Pour les champs de modules de fibrés vectoriels à déterminant variable, un énoncé similaire est vrai, en ajoutant au fibré en droites un fibré venant de la jacobienne $\text{Pic} X$.

Comme d'habitude, on note ρ la somme des poids fondamentaux (ici, d'une algèbre de Lie de type \mathfrak{sl}_r). L'espace noté $\mathcal{U}_{X,p}(r, d, \rho)$ désigne donc le champ de modules des fibrés vectoriels de rang r et de degré d , munis d'une structure parabolique aux points p_i correspondant au choix d'un drapeau complet dans les fibres E_{p_i} .

Proposition 3.12. *Le morphisme d'oubli naturel $\mathcal{U}_{X,p}(r, d, \rho) \rightarrow \mathcal{U}_{X,p}(r, d, \lambda)$ est projectif à fibres connexes, c'est-à-dire qu'il est représentable, et s'identifie localement à un tel morphisme de schémas.*

Les sections du fibré en droites $\mathcal{L}^{\ell, \lambda}$ sur ces deux espaces sont ainsi canoniquement identifiées.

Les automorphismes extérieurs de l'algèbre $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$, comprennent les automorphismes de son diagramme de Dynkin, qui à la forme d'un graphe cyclique (polygone) à r arêtes : il est engendré par une réflexion V correspondant à la transposition sur \mathfrak{sl}_r , et une rotation, notée Δ , dont on donne ici une interprétation géométrique. Il est en effet connu [FSS, FS] que de telles transformations induisent des isomorphismes entre les blocs conformes : on construit ici ces isomorphismes à l'aide d'isomorphismes entre les champs de modules.

Définition 3.D. *Soit λ un poids dominant de \mathfrak{sl}_r , de niveau au plus ℓ , tel que $(\ell, \lambda) = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i \tilde{\omega}_i$. On a noté $\tilde{\omega}_i = (1, \varpi_i)$ les poids fondamentaux de $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$, avec la convention $\varpi_0 = \varpi_r = 0$.*

Le poids décalé λ^δ est alors $\sum_{i=1}^r \alpha_{i-1} \varpi_i$, qui est encore de niveau au plus ℓ .

L'opération de décalage est un automorphisme linéaire du réseau des poids de $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$, et induit une permutation de chaque ensemble P_ℓ (ensemble des poids dominants de \mathfrak{sl}_r de niveau $\leq \ell$).

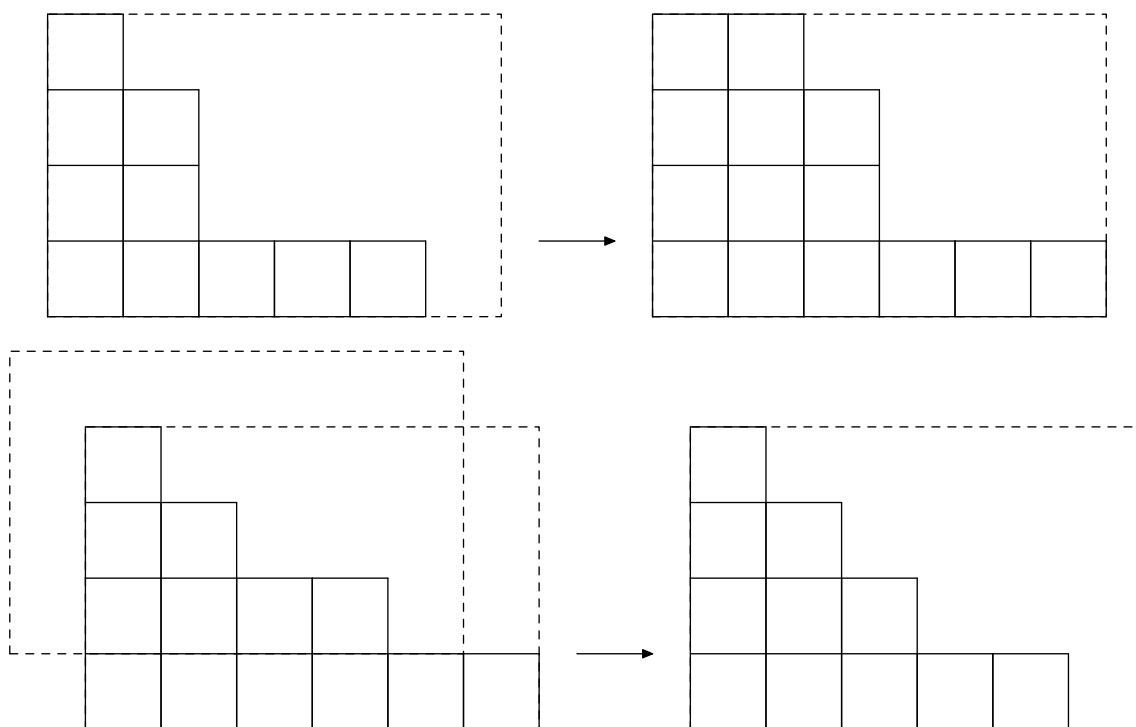


FIGURE 3.1: Exemples de l'action de décalage sur des poids représentés par leurs diagrammes de Young

Le pendant géométrique de cette opération est le foncteur de décalage qui agit sur un fibré vectoriel filtré, issu par exemple d'une structure parabolique de type ρ sur un fibré vectoriel de rang r sur X . Cette opération apparaît naturellement lorsqu'on choisit

la définition de C. Simpson des fibrés vectoriels paraboliques [S], comme une suite croissante $(E_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de fibrés vectoriels de rang fixé, telle que $E_k \subset E_{k+\ell}$ correspond à l'inclusion canonique de E_k dans $E_k \otimes \mathcal{O}_X(\mathbf{p})$.

Définition 3.E. Soit q l'un des points p_i . On définit un endofoncteur de décalage Δ_q sur le groupoïde des fibrés vectoriels paraboliques de rang r et de type ρ sur (X, \mathbf{p}) , de la manière suivante.

Soit un fibré vectoriel parabolique E , muni de la filtration décroissante associée au choix d'un drapeau complet de E_q :

$$E = E_r \supset E_{r-1} \supset \cdots \supset E_1 \supset E_0 = E \otimes \mathcal{O}_X(-q).$$

Alors $\Delta_q(E)$ est le fibré vectoriel E_{r-1} , muni de la structure parabolique naturellement induite par E aux points $p_i \neq q$, et de la structure parabolique en q définie par la filtration

$$E_{r-1} \supset \cdots \supset E_1 \supset E_0 \supset E_{r-1} \otimes \mathcal{O}_X(-q).$$

L'inverse de Δ_q associe à un fibré parabolique E le fibré $E_1 \otimes \mathcal{O}_X(q)$, qui est naturellement un sur-fibré de E avec les inclusions $E \subset E_1 \otimes \mathcal{O}_X(q) \subset E \otimes \mathcal{O}_X(q)$.

Proposition 3.13. Le foncteur Δ_q s'étend naturellement aux familles de fibrés vectoriels paraboliques et définit un isomorphisme

$$\mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \mathfrak{L}, \rho) \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \mathfrak{L} \otimes \mathcal{O}_X(-q), \rho)$$

À travers cet isomorphisme, l'image inverse du fibré en droites $\mathcal{L}^{\ell, \lambda}$ est le fibré $\mathcal{L}^{\ell, \delta_q(\lambda)}$, où $\delta_q(\lambda)$ est la suite de poids λ où λ_q a été remplacé par λ_q^δ .

Démonstration. Soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_r$ une famille de fibrés vectoriels paraboliques de type ρ et de rang r paramétrée par une base S , et $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_{r-1}$ le sous-fibré donné par les notations précédentes. On sait qu'alors $\Delta_q(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$.

Lorsque i est un entier entre 1 et $r-1$, l'identité

$$\det R\pi_\star(\mathcal{E}_i)^\vee = \det R\pi_\star(\mathcal{E}^\vee) \otimes \mathcal{E}/\mathcal{E}_i = \det R\pi_\star(\mathcal{E}_{r-1}^\vee) \otimes \mathcal{E}_{r-1}/\mathcal{E}_i$$

montre que le fibré $\det R\pi_\star(\mathcal{E}_i)^\vee$ correspond à $\mathcal{L}^{1, \varpi_i}$ sur le champ $\mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \mathfrak{L}, \rho)$, et d'autre part, au fibré en droites noté $\mathcal{L}^{1, \varpi_{i+1}}$ sur $\mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \mathfrak{L} \otimes \mathcal{O}_X(-q), \rho)$.

On voit aussi que le fibré déterminant de \mathcal{E} , noté \mathcal{L} sur le champ $\mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \mathfrak{L}, \rho)$, peut aussi s'écrire $\det R\pi_\star(\mathcal{E}(-q))^\vee = \det R\pi_\star(\mathcal{E}_{r-1}^\vee) \otimes \mathcal{E}_{r-1}/\mathcal{E}_0(-q)$ qui correspond au fibré en droites $\mathcal{L}^{1, \varpi_1}$ sur $\mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \mathfrak{L} \otimes \mathcal{O}_X(-q), \rho)$. \square

Grâce à cette construction, on peut relier les fonctions thêta généralisées en degré quelconque à des blocs conformes au sens strict.

Proposition 3.14. Le foncteur Δ_{p_0} itéré d fois définit un morphisme

$$\Delta_{p_0}^d : \mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \mathcal{O}_X(d \cdot p_0), \lambda) \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, (\ell \varpi_d; \lambda)),$$

où ϖ_d est défini en réduisant d modulo r et placé au point p_0 . Ce morphisme est un isomorphisme.

On obtient également un isomorphisme entre les fonctions thêta généralisées

$$H^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, \mathcal{O}_X(d \cdot p_0), \lambda), \mathcal{L}^{\ell, \lambda}) \text{ et } H^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, (\ell \varpi_d; \lambda)), \mathcal{L}^{\ell, \ell \varpi_d + \lambda}).$$

Un énoncé similaire figure à la fin de [BL] dans le cas $\lambda = 0$.

L'action des foncteurs de décalage Δ_{p_i} est compatible avec le tenseur de dualité rang-niveau. Lorsque E et F sont des fibrés vectoriels munis de drapeaux complets aux points marqués, induisant des structures paraboliques de types λ et λ^T , on a muni $E \otimes F$ d'une structure parabolique de type $|\lambda|$.

Pour les besoins de cette section, on fixe un point marqué p_i , et on suppose que la r -ième rangée de λ_{p_i} est vide, et on choisit le diagramme de Young $\lambda_{p_i}^\delta$ comme ayant ℓ cases de plus (comme dans le premier exemple de la figure 3.1). On enrichit alors la structure parabolique de $E \otimes F$ au point p_i par la filtration

$$E_{p_i} \otimes_\lambda F_{p_i} \subset E_{p_i,1} \otimes F_{p_i} \subset E_{p_i} \otimes F_{p_i}$$

où $E_{p_i,1}$ est l'hyperplan distingué dans E_{p_i} par le drapeau complet. Cette structure sera temporairement notée $|\lambda|^+$.

Proposition 3.15. *Soit D un fibré en droites sur X de degré d , et Δ un entier. On note τ_λ le foncteur qui à (E, F) associe le produit tensoriel $E \otimes F$ muni de sa structure parabolique de type $|\lambda|$, et τ_λ^+ celui qui associe à (E, F) le produit tensoriel $E \otimes F$ muni de la structure parabolique enrichie décrite ci-dessus. Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, D, \rho) & \times & \mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(\ell, \Delta, \rho) \xrightarrow{\tau_\lambda^+} \mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r\ell, r\Delta + \ell d, |\lambda|^+) \\ \Delta_{p_i} \downarrow & & \parallel \qquad \qquad \qquad \downarrow \Delta_{p_i}^\ell \\ \mathcal{S}\mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r, D(-p_i), \rho) & \times & \mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(\ell, \Delta, \rho) \xrightarrow{\tau_{\delta_{p_i}(\lambda)}^+} \mathcal{U}_{X,\mathbf{p}}(r\ell, r\Delta + \ell(d-1), |\delta_{p_i}(\lambda)|) \end{array}$$

est commutatif. De plus, les foncteurs d'image inverse font correspondre les fibrés en droites suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^{\ell, \lambda} & \boxtimes & \mathcal{L}^{r, \lambda^T} \otimes \det^* D \longleftarrow \mathcal{L}^{1, |\lambda|} \\ \uparrow & & \parallel \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \mathcal{L}^{\ell, \delta_{p_i}(\lambda)} & \boxtimes & \mathcal{L}^{r, \delta_{p_i}(\lambda)^T} \otimes \det^* D(-p_i) \longleftarrow \mathcal{L}^{1, \delta_{p_i}^\ell(|\lambda|)} \end{array}$$

Dans le cas où $r\Delta + \ell d - |\lambda^*| = r\ell(g-1)$, on trouve que le tenseur de dualité rang-niveau est compatible avec l'action de décalage, lorsque celle-ci s'écrit comme une opération sur les diagrammes de Young.

Diverses opérations peuvent ainsi être effectuées, sans changer les propriétés du tenseur de dualité :

- remplacer le couple (E, F) par $(E \otimes \mathcal{O}_X(-p_0), F \otimes \mathcal{O}_X(p_0))$, ce qui remplace (d, Δ) par $(d-r, \Delta + \ell)$;
- ajouter un point marqué p_{n+1} avec un diagramme plein, et appliquer $\Delta_{p_{n+1}}^{-1}$ à E , ce qui augmente d de 1 ;
- ajouter un point marqué p_{n+1} avec un diagramme plein, et appliquer $\Delta_{p_{n+1}}^{-1}$ à F , ce qui augmente Δ de 1.

L'étude du tenseur de dualité peut donc se ramener sous certaines hypothèses numériques : notamment, on peut amener d à un certain multiple de r , puis utiliser la première opération pour le ramener à zéro, et enfin augmenter Δ à une valeur arbitrairement grande. C'est pourquoi il nous arrivera de supposer ces conditions réunies ($d = 0$, Δ multiple suffisamment grand d'un nombre arbitraire) dans le déroulement de la preuve.

3.3 DÉMONSTRATION ÉNUMÉRATIVE DE LA DUALITÉ RANG-NIVEAU

REFORMULATION DU PROBLÈME

La méthode proposée dans [MO1] pour démontrer que le tenseur de dualité rang-niveau réalisait un accouplement parfait, consiste à utiliser l'évaluation des sections en certains points des espaces de modules : sous certaines conditions exceptionnelles, on obtient alors une décomposition diagonale du tenseur de dualité.

Fixons deux entiers d et Δ (les degrés), tels que

$$r\Delta + \ell d - |\lambda^*| = r\ell(g - 1).$$

Lemme 3.16. *Soit q la dimension commune des espaces de sections de $\mathcal{L}^{\ell, \lambda} \otimes \Theta$ sur $\mathcal{U}_{X, \mathbb{P}}(r, d, \lambda)$ et $\mathcal{L}^{r, \lambda^T} \otimes \bar{\Theta}$ sur $\mathcal{U}_{X, \mathbb{P}}(\ell, \Delta, \lambda^T)$. On se fixe un diviseur thêta Θ_M sur la jacobienne de X .*

On se donne q couples (A_i, B_i) de fibrés vectoriels paraboliques choisis dans $\mathcal{U}_{X, \mathbb{P}}(r, d, \lambda) \times \mathcal{U}_{X, \mathbb{P}}(\ell, \Delta, \lambda^T)$ vérifiant les conditions suivantes :

- *le produit tensoriel quasi-parabolique $A_i \otimes_{\text{qpar}} B_j$; n'admet aucune section non nulle si et seulement si $i = j$*
- *pour tous i et j le fibré en droites $\det A_i - \det B_j$ n'appartient pas à Θ_M .*

Alors le tenseur de dualité rang-niveau \widetilde{SD} est de la forme $\sum s_i \otimes t_i$, où s_i est proportionnelle à la section $\theta_{B_i}^{\ell, \lambda} \otimes \det^ \theta_{M-B_i}$, et t_i proportionnelle à la section $\theta_{A_i}^{r, \lambda^T} \otimes -\det^* \theta_{M+A_i}$.*

De plus, les sections s_i forment une base de $H^0(\mathcal{U}_{X, \mathbb{P}}(r, d, \lambda), \mathcal{L}^{\ell, \lambda} \otimes \det^ \Theta_M)$ duale des A_i . De même que les sections t_i forment une base de $H^0(\mathcal{U}_{X, \mathbb{P}}(\ell, \Delta, \lambda^T), \mathcal{L}^{r, \lambda^T} \otimes -\det^* \Theta_M)$, duale des B_i .*

Démonstration. D'après la définition des diviseurs thêta, les conditions indiquées signifient exactement que les A_i forment une base duale des s_i , et que les B_i forment une base duale des t_i (puisque q est la dimension des espaces de sections).

On vérifie alors que \widetilde{SD} et $\sum s_i \otimes t_i$ s'annulent sur les mêmes couples (A_i, B_i) : ils sont donc égaux, après choix de constantes de proportionnalité adéquates. \square

Il est à noter qu'ayant trouvé des couples (A_i, B_i) satisfaisant la première condition, il est toujours possible de trouver un M telle que la seconde soit satisfaite.

NOMBRES D'INTERSECTIONS SUR LES SCHEMAS QUOT

On se fixe désormais des entiers r et ℓ , ainsi qu'un degré d , et un système de n diagrammes de Young λ : on note aussi $\mu = \lambda^{T*}$. On fait l'hypothèse suivante :

L'entier d est un multiple suffisamment grand de $2r\ell(r + \ell)$. De plus, $|\mu| = \ell d + r\ell(1 - g)$.

Cette hypothèse est trop forte pour la démonstration qui va suivre, mais on peut de toute façon s'y ramener grâce aux raisonnements de la section 3.3. Soit L un fibré en droites sur X , de degré adéquat pour que $V = L^{\oplus r + \ell}$ soit un fibré vectoriel de rang $r + \ell$ et de degré d . On note Q le schéma $\text{Quot}_{r, d}(V)$ des quotients de V de rang r et de degré d . Celui-ci est muni d'une action naturelle du groupe $PSL_{r + \ell}$, provenant du groupe d'automorphismes $GL_{r + \ell}$ de V .

Par définition, on trouve sur $Q \times X$ une suite exacte courte de faisceaux cohérents

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^\vee \rightarrow \mathcal{O}_Q \boxtimes V \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

où \mathcal{E} et \mathcal{F} sont des familles de faisceaux cohérents sur X , paramétrées par Q , de rangs respectifs ℓ et r , de degrés respectifs 0 et d . Si $q \in Q$ est un point tel que les faisceaux

associés E_q et F_q sont localement libres, on a une suite exacte de fibrés vectoriels $0 \rightarrow E_q \otimes L^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_X^{r+\ell} \rightarrow F_q \otimes L^{-1} \rightarrow 0$ qui induit un morphisme de X dans la grassmannienne $\text{Gr}(\ell, r + \ell)$.

Proposition 3.17 ([BDW]). *L'ouvert $\mathcal{Q}_{||}$ de \mathcal{Q} paramétrant les quotients localement libres de \mathcal{V} s'identifie au schéma des morphismes de X dans $\text{Gr}(\ell, r + \ell)$ de degré $\frac{\ell}{r+\ell}d$.*

L'espace tangent de Zariski à \mathcal{Q} en un point q de $\mathcal{Q}_{||}$ est l'espace vectoriel $\text{Hom}_X(E_q^\vee, F_q) = H^0(X, E_q \otimes F_q)$. Si d est suffisamment grand, \mathcal{Q} est irréductible, et génériquement lisse, de dimension $\ell d + r\ell(1 - g)$.

Ainsi lorsque d est suffisamment grand, la dimension de \mathcal{Q} coïncide exactement avec $|\mu|$. On s'intéresse également à certaines classes caractéristiques : rappelons que l'anneau des classes caractéristiques pour les fibrés de rang ℓ est naturellement isomorphe à l'anneau des polynômes symétriques en ℓ indéterminées, en identifiant la k -ième classe de Chern c_k avec la fonction symétrique élémentaire notée σ_k . On note alors c_{μ_i} pour la classe caractéristique correspondant au polynôme de Schur défini par le diagramme de Young μ_i : c'est un élément de $H^{2|\mu_i|}(\text{BGL}_\ell, \mathbb{Z})$.

On notera a_μ la classe de cohomologie donnée par la formule $c_\mu(\mathcal{E}_p)$, où \mathcal{E}_p est le fibré vectoriel sur \mathcal{Q} obtenu par restriction de \mathcal{E} à $\mathcal{Q} \times \{p\}$: celle-ci ne dépend pas de p , par un argument de connexité. Lorsque μ est un n -uplet de diagrammes de Young, on note a_μ le cup-produit des classes a_{μ_i} pour i entre 1 et n .

Proposition 3.18 (Formule de Vafa-Intriligator (voir par exemple Marian-Oprea ou Siebert-Tian [MO2, ST])). *Lorsque d est suffisamment grand, il existe une classe fondamentale naturelle $[\mathcal{Q}] \in H^{|\mu|}(\mathcal{Q})$, de sorte que le degré de la classe a_μ est bien défini et coïncide avec un véritable nombre d'intersections entre cycles réalisant les classes a_{μ_i} .*

De plus,

$$\int_{[\mathcal{Q}]} a_\mu = \sum_{T \subset \mathbb{Z}/(r+\ell)\mathbb{Z}} \prod_i s_{\mu_i}(\zeta^T) \left(\frac{(r+\ell)^\ell}{\prod_{t \in T} \zeta^t \prod_{t \neq u \in T} (\zeta^t - \zeta^u)} \right)^{g-1}$$

où $i \mapsto \zeta^i$ identifie $\mathbb{Z}/(r+\ell)\mathbb{Z}$ au groupe des racines $(r+\ell)$ -ièmes de l'unité, et T parcourt les parties de $\mathbb{Z}/(r+\ell)\mathbb{Z}$ de cardinal ℓ . On a noté s_μ le polynôme de Schur associé à μ , qui est un polynôme symétrique en ℓ variables.

La remarque déterminante est que le nombre ci-dessus coïncide précisément avec le nombre q de fibrés vectoriels paraboliques à trouver pour démontrer la dualité rang-niveau : on la trouve chez Witten [W2], Belkale [B1], et Marian-Oprea [MO1]. Lorsqu'on se place sur une courbe de genre zéro, ce nombre est aussi la dimension des blocs conformes usuels (sections de $\mathcal{L}^{\ell, \mu}$ sur $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r) = \mathcal{U}_X(r, 0)$).

On a en effet vu que le nombre $q = h^0(\mathcal{U}_X(r, d, \lambda), \mathcal{L}^{\ell, \lambda} \otimes \det^* \Theta)$ vérifiait l'équation

$$t_g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{r^g}{(r+\ell)^g} q$$

D'autre part, on a vu que λ pouvait être remplacé par μ quitte à permuter r et ℓ , qui lui-même pouvait être remplacé par μ^* . On reprend pour q l'expression intermédiaire trouvée dans la preuve de la proposition 1.20 :

$$q = (r+\ell)^{\ell(g-1)} \sum_T \prod_i s_{\mu_i}(\zeta^T) \left(\prod_{t \in T} \zeta^t \right)^{-|\mu|/\ell} |q_0(\zeta^T)|^{2-2g}$$

(où q_0 est la fonction de Vandermonde).

On utilise aussi l'identité

$$\prod_{t, u \in T} (\zeta^t - \zeta^u) = \prod_{t < u \in T} \zeta^t \zeta^u |\zeta^t - \zeta^u|^2 = \prod_{t < u \in T} |\zeta^t - \zeta^u|^2 \left(\prod_{t \in T} \zeta^t \right)^{\ell-1}$$

ainsi

$$\int_{[Q]} a_\mu = (r + \ell)^{\ell(g-1)} \sum_{T \subset \mathbb{Z}/(r+\ell)\mathbb{Z}} \prod_i s_{\mu_i}(\zeta^T) \left(\prod_{t \in T} (\zeta^t)^\ell \prod_{t < u \in T} |\zeta^t - \zeta^u|^2 \right)^{1-g}$$

ce qui conclut. En effet, l'exposant de $\prod_{t \in T} \zeta^t$ dans la première formule est $-|\mu|/\ell$, qui est congru à $|\mu|/r$ modulo $r + \ell$ (on a supposé que $|\mu|$ était multiple de $r\ell$), et par hypothèse, $|\mu|/r = \ell d/r + \ell(1 - g)$. Dans la deuxième formule, l'exposant est $\ell(1 - g)$ qui, en utilisant l'hypothèse sur d , est congru à $|\mu|/r$ modulo $r + \ell$.

CONSTRUCTION D'UNE SOLUTION

On peut construire facilement des cycles représentant les classes a_{μ_i} en utilisant des variétés de Schubert :

Proposition 3.19 ([BDW]). *Soit λ un diagramme de Young à r rangées, et $\mu = \lambda^{T*}$. Soit p un point de X , $e_p : Q_{||} \rightarrow \text{Gr}(\ell, r + \ell)$ le morphisme d'évaluation associé et a_μ l'image réciproque de la classe $[Y_{\lambda^T}^\bullet] \in H^\bullet(\text{Gr}(\ell, r + \ell), \mathbb{Z})$ dans la cohomologie de $Q_{||}$.*

Alors a_μ coïncide avec la restriction à $Q_{||}$ de la classe $c_\mu(\mathcal{E}_p)$, où \mathcal{E}_p est le fibré vectoriel sur Q obtenu par restriction de \mathcal{E} à $Q \times \{p\}$.

On pourra aussi consulter [FP] pour les liens entre variétés de Schubert et classes caractéristiques de fibrés. Si μ_i est le diagramme de Young associé au point p_i par μ , on note Z_i l'adhérence dans Q de la sous-variété $e_i^{-1}(Y_{\lambda_i^T}^\bullet)$, où $e_i : Q_{||} \rightarrow \text{Gr}(\ell, r + \ell)$ est le morphisme d'évaluation associé à p_i . La définition complète de Z_i dépend du choix d'un drapeau dans la fibre V_{p_i} , c'est-à-dire d'une structure parabolique sur V . La variété Z_i est de codimension $|\mu_i|$ dans Q .

Proposition 3.20 (voir Bertram, [B4]). *Pour un choix générique de structure parabolique pour V , les variétés Z_i obtenues s'intersectent transversalement, et en des points génériques, c'est-à-dire qu'on peut les choisir dans le lieu «stable» de $Q_{||}$, ainsi que l'image réciproque par les morphismes e_i des cellules de Schubert $Y_{\lambda_i^T}$ (et non pas leur bord).*

On a vu dans la section 2.2 que sur la cellule de Schubert $Y_{\lambda^T} \subset \text{Gr}(\ell, r + \ell)$, la suite exacte tautologique $0 \rightarrow \mathcal{E}^\vee \rightarrow \mathcal{O}^{r+\ell} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ était compatible avec des filtrations naturelles, qui munissaient en tout point les fibres de \mathcal{E} et \mathcal{F} de structures paraboliques de types respectifs λ^T et λ . Le fibré normal à Y_{λ^T} s'écrit alors $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}/\mathcal{E} \otimes_{\text{qpar}} \mathcal{F}$.

La propriété 3.20 énoncée ci-dessus signifie que $Z = \bigcap Z_i$ est un schéma lisse, de dimension zéro. Chaque point z de Z représente une suite exacte $0 \rightarrow E_z^\vee \rightarrow V \rightarrow F_z \rightarrow 0$, et par la remarque précédente, les fibrés vectoriels E_z et F_z sont munis de structures paraboliques de type λ^T et λ par rapport à la courbe pointée (X, \mathbf{p}) .

Proposition 3.21. *L'espace tangent à Z au point z s'identifie à l'espace des sections de $E_z \otimes_{\text{qpar}} F_z$. Il est nul.*

Démonstration. L'espace tangent de Zariski de $Q_{||}$ au point z s'identifie à $H^0(E_z \otimes F_z)$: celui de Z est obtenu comme intersection des noyaux des morphismes naturels :

$$de_i : TQ_{||} \rightarrow T\text{Gr}(\ell, r + \ell) \rightarrow \frac{E_{z,p_i} \otimes F_{z,p_i}}{E_{z,p_i} \otimes_{\text{qpar}} F_{z,p_i}};$$

c'est donc l'espace des sections de $E_z \otimes F_z$ dont l'évaluation au point p_i appartient au produit tensoriel quasi-parabolique de E_{z,p_i} avec F_{z,p_i} . Ces sections, par définition, forment le fibré vectoriel $E_z \otimes_{\text{qpar}} F_z$.

Comme Z est lisse, de dimension zéro, cet espace est nul. \square

Proposition 3.22. *Si z et z' sont deux points distincts de Z , il existe une section non nulle de $E_z \otimes_{\text{qpar}} F_{z'}$.*

Démonstration. On considère la composée de l'injection canonique f_z de E_z^\vee dans V et de la projection $g_{z'}$ de V sur $F_{z'}$: rappelons que le choix de la structure parabolique de V le munit d'une filtration avec laquelle f_z et $g_{z'}$ sont compatibles. Cette composée est donc une section de $E_z \otimes_{\text{qpar}} F_{z'}$.

Si $g_{z'}f_z$ était nulle, f_z se factoriserait par le noyau de $g_{z'}$, donnant une injection de E_z^\vee dans $E_{z'}^\vee$: puisque ces fibrés ont même degré, celle-ci devrait être un isomorphisme, ce qui est impossible, puisque z et z' sont différents, c'est-à-dire que E_z et $E_{z'}$ sont différents en tant que sous-fibrés de V . \square

Ces deux propriétés montrent que les fibrés paraboliques E_z sont distincts pour des valeurs distinctes de z (il en est de même des fibrés paraboliques F_z).

Conventions de notation

Voici une liste de conventions typographiques utilisées dans cette partie.

NOTATIONS

\mathcal{O}_X	Faisceau structural (des fonctions algébriques régulières) sur X
f_*, f^*	Image directe, image inverse (produit fibré) par un morphisme f
Hom	Espace de morphismes
Hom	Faisceaux de morphismes
\mathbb{G}_m	Groupe multiplicatif
BG	Champ ou espace classifiant du groupe G
$V // G$	Quotient au sens de la théorie géométrique des invariants
X	Une courbe algébrique projective lisse sur \mathbb{C}
g	Le genre de X
p_0	Un point fixé de X
p	Un n -uplet de points fixés de X
λ	Diagramme de Young, poids dominant de \mathfrak{sl}_r , associé
λ^*	Complémentaire de λ , poids dominant de \mathfrak{sl}_r , associé
λ^T	Transposé de λ , poids de \mathfrak{sl}_r associé
$ \lambda $	Nombre de cases de λ , poids fondamental de \mathfrak{sl}_r associé
λ^δ	Diagramme de Young décalé (section 3.D)
λ	Un n -uplet de diagrammes de Young
\mathcal{Y}_λ	Cellule de Schubert associée à λ (de dimension $ \lambda $)
$\mathcal{Y}_\lambda^\bullet$	Variété de Schubert associée à λ

ESPACES DE MODULES

$\text{Quot}_p(\mathcal{F})$	Schéma des quotients de \mathcal{F} de polynôme de Hilbert P
$\text{Quot}_{r,d}(\mathcal{F})$	Sur une courbe, schéma des quotients de rang r et degré d
$\text{Pic}^0 X$	Jacobienne de X des fibrés en droites rigidifiés en p_0
$\text{Pic}^d X$	Variété des fibrés en droites de degré d rigidifiés en p_0
Θ	Sur $\text{Pic } X$, fibré déterminant du fibré universel sur $X \times \text{Pic } X$
$\mathcal{U}_X(r)$	Champ de modules des fibrés vectoriels de rang r sur X
$\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r)$	Champ des fibrés de rang r et de déterminant trivial sur X
$\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r, \mathcal{D})$	Champ des fibrés de rang r et de déterminant \mathcal{D} sur X

$\mathcal{U}_X(r, d)$	Champ des fibrés vectoriels de rang r , de degré d sur X
Θ	Image inverse de Θ par $\det : \mathcal{U}_X(r) \rightarrow \text{Pic } X$
\mathcal{L}_E	Fibré déterminant de la forme $\det R\pi_*(\mathcal{P} \otimes E)^\vee$
$\mathcal{L}_E^{\text{par}}$	Fibré déterminant de la forme $\det R\pi_*(\mathcal{P} \otimes E)_{\text{qpar}}^\vee$

Bibliographie

- [A] Michael Atiyah, *The geometry and physics of knots*, Lezioni Lincee., Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR1078014 (92b:57008)
- [AB] M. F. Atiyah and R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **308** (1983), no. 1505, 523–615, DOI 10.1098/rsta.1983.0017. MR702806 (85k:14006)
- [B] Arnaud Beauville, *Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula*, Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry (Ramat Gan, 1993), Israel Math. Conf. Proc., vol. 9, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1996, pp. 75–96. MR1360497 (97f:17025)
- [BL] Arnaud Beauville and Yves Laszlo, *Conformal blocks and generalized theta functions*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), no. 2, 385–419. MR1289330 (95k:14011)
- [BNR] Arnaud Beauville, M. S. Narasimhan, and S. Ramanan, *Spectral curves and the generalised theta divisor*, J. Reine Angew. Math. **398** (1989), 169–179, DOI 10.1515/crll.1989.398.169. MR998478 (91c:14040)
- [B1] Prakash Belkale, *The strange duality conjecture for generic curves*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), no. 1, 235–258 (electronic), DOI 10.1090/S0894-0347-07-00569-3. MR2350055 (2009c:14059)
- [B2] ———, *Strange duality and the Hitchin/WZW connection*, J. Differential Geom. **82** (2009), no. 2, 445–465. MR2520799
- [B3] Aaron Bertram, *Generalized $SU(2)$ theta functions*, Inventiones Math. **113** (1993), no. 2, 351–372. MR1228129 (95g:14011)
- [B4] ———, *Towards a Schubert calculus for maps from a Riemann surface to a Grassmannian*, Internat. J. Math. **5** (1994), no. 6, 811–825, available at <http://arxiv.org/abs/alg-geom/9403007>. MR1298995 (96h:14070)
- [BDW] Aaron Bertram, Georgios Daskalopoulos, and Richard Wentworth, *Gromov invariants for holomorphic maps from Riemann surfaces to Grassmannians*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 529–571, available at <http://arxiv.org/abs/alg-geom/9306005>. MR1320154 (96f:14066)
- [B1] U. N. Bhosle, *Parabolic vector bundles on curves*, Ark. för Mat. **27** (1989), no. 1, 15–22, DOI 10.1007/BF02386356. MR1004718 (90f:14007)
- [B2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie*, Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris (French).
- [DT] Ron Donagi and Loring W. Tu, *Theta functions for $SL(n)$ versus $GL(n)$* , Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 3, 345–357, available at <http://arxiv.org/abs/alg-geom/9303004>. MR1302649 (95j:14012)
- [DN] J.-M. Drézet and M. S. Narasimhan, *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*, Invent. Math. **97** (1989), no. 1, 53–94, DOI 10.1007/BF01850655 (French). MR999313 (90d:14008)
- [F] Gerd Faltings, *A proof for the Verlinde formula*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 2, 347–374. MR1257326 (95j:14013)
- [FI] R. Fossum and B. Iversen, *On Picard groups of algebraic fibre spaces*, J. Pure Appl. Algebra **3** (1973), 269–280. MR0357396 (50 #9864)
- [FSS] Jürgen Fuchs, Bert Schellekens, and Christoph Schweigert, *From Dynkin diagram symmetries to fixed point structures*, Comm. Math. Phys. **180** (1996), no. 1, 39–97, available at <http://arxiv.org/abs/hep-th/9506135>. MR1403859 (98i:17021)
- [FS] Jürgen Fuchs and Christoph Schweigert, *The action of outer automorphisms on bundles of chiral blocks*, Comm. Math. Phys. **206** (1999), no. 3, 691–736, available at <http://arxiv.org/abs/hep-th/9805026>. MR1721887 (2001b:81049)

- [FP] William Fulton and Piotr Pragacz, *Schubert varieties and degeneracy loci*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1689, Springer-Verlag, Berlin, 1998. Appendix J by the authors in collaboration with I. Ciocan-Fontanine. MR1639468 (99m:14092)
- [GW] T. Gannon and M. A. Walton, *On fusion algebras and modular matrices*, *Comm. Math. Phys.* **206** (1999), no. 1, 1–22, DOI 10.1007/s002200050695. MR1736993 (2000k:17030)
- [G1] Jean Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin, 1971 (French). Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179. MR0344253 (49 #8992)
- [G2] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. II*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **17** (1963), 91 (French). MR0163911 (29 #1210)
- [H1] N. J. Hitchin, *Flat connections and geometric quantization*, *Comm. Math. Phys.* **131** (1990), no. 2, 347–380. MR1065677 (91g:32022)
- [H2] Roger Howe, *Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond*, The Schur lectures (1992) (Tel Aviv), Israel Math. Conf. Proc., vol. 8, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1995, pp. 1–182. MR1321638 (96e:13006)
- [HL] Daniel Huybrechts and Manfred Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects of Mathematics, E31, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997. MR1450870 (98g:14012)
- [K] Victor G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1985. MR823672 (87c:17023)
- [KP] Victor G. Kac and Dale H. Peterson, *Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms*, *Adv. in Math.* **53** (1984), no. 2, 125–264, DOI 10.1016/0001-8708(84)90032-X. MR750341 (86a:17007)
- [K] Shrawan Kumar, *Demazure character formula in arbitrary Kac-Moody setting*, *Invent. Math.* **89** (1987), no. 2, 395–423, DOI 10.1007/BF01389086. MR894387 (88i:17018)
- [KNR] Shrawan Kumar, M. S. Narasimhan, and A. Ramanathan, *Infinite Grassmannians and moduli spaces of G-bundles*, *Math. Ann.* **300** (1994), no. 1, 41–75, DOI 10.1007/BF01450475. MR1289830 (96e:14011)
- [LS] Yves Laszlo and Christoph Sorger, *The line bundles on the moduli of parabolic G-bundles over curves and their sections*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **30** (1997), no. 4, 499–525, DOI 10.1016/S0012-9593(97)89929-6 (English, with English and French summaries). MR1456243 (98f :14007)
- [LMB] Gérard Laumon and Laurent Moret-Bailly, *Champs algébriques*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*, vol. 39, Springer-Verlag, Berlin, 2000 (French). MR1771927 (2001f :14006)
- [LP] Joseph Le Potier, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, *Publications Mathématiques de l'Université Paris 7—Denis Diderot*, vol. 35, Université Paris 7—Denis Diderot U.F.R de Mathématiques, Paris, 1995 (French). With a chapter by Christoph Sorger. MR1370930 (97c :14034)
- [MO1] Alina Marian and Dragos Oprea, *The level-rank duality for non-abelian theta functions*, *Invent. Math.* **168** (2007), no. 2, 225–247, DOI 10.1007/s00222-006-0032-z. MR2289865 (2007k:14070)
- [MO2] ———, *Virtual intersections on the Quot scheme and Vafa-Intriligator formulas*, *Duke Math. J.* **136** (2007), no. 1, 81–113, DOI 10.1215/S0012-7094-07-13613-5, available at <http://arxiv.org/abs/math/0505685>. MR2271296 (2007k:14117)
- [M] Olivier Mathieu, *Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales*, *Astérisque* **159-160** (1988), 267 (French, with English summary). MR980506 (90d :17024)
- [MS] V. B. Mehta and C. S. Seshadri, *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures*, *Math. Ann.* **248** (1980), no. 3, 205–239, DOI 10.1007/BF01420526. MR575939 (81i:14010)
- [MFK] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, 3rd ed., *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2)*, vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994. MR1304906 (95m:14012)
- [NT] Tomoki Nakanishi and Akihiro Tsuchiya, *Level-rank duality of WZW models in conformal field theory*, *Comm. Math. Phys.* **144** (1992), no. 2, 351–372. MR1152377 (93a:81181)
- [O] R. Oudompheng, *Rank-level duality of conformal blocks of GL_n and SL_n* (2008), available at <http://arxiv.org/abs/0805.1738>.
- [P1] Christian Pauly, *Espaces de modules de fibrés paraboliques et blocs conformes*, *Duke Math. J.* **84** (1996), no. 1, 217–235, DOI 10.1215/S0012-7094-96-08408-2 (French). MR1394754 (97h :14022)
- [P2] ———, *Fibrés paraboliques de rang 2 et fonctions thêta généralisées*, *Math. Z.* **228** (1998), no. 1, 31–50, DOI 10.1007/PL00004601 (French). MR1617983 (99m :14030)
- [ST] Bernd Siebert and Gang Tian, *On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator*, *Asian J. Math.* **1** (1997), no. 4, 679–695, available at <http://arxiv.org/abs/alg-geom/9403010>. MR1621570 (99d:14060)

- [S] Carlos T. Simpson, *Harmonic bundles on noncompact curves*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 3, 713–770, DOI 10.2307/1990935. MR1040197 (91h:58029)
- [TY] Patrice Tauvel and Rupert W. T. Yu, *Lie algebras and algebraic groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005. MR2146652 (2006c:17001)
- [TUY] Akihiro Tsuchiya, Kenji Ueno, and Yasuhiko Yamada, *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries*, Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, Adv. Stud. Pure Math., vol. 19, Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 459–566. MR1048605 (92a:81191)
- [V] Erik Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory*, Nuclear Phys. B **300** (1988), no. 3, 360–376. MR954762 (89h:81238)
- [W1] Edward Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), no. 3, 351–399. MR990772 (90h:57009)
- [W2] ———, *The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian*, Geometry, topology, & physics, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 357–422. MR1358625 (98c:58016)

DEUXIÈME PARTIE

Périodes des surfaces d'Enriques polarisées par un réseau D_6

Introduction

Dans ce second travail, on se propose d'étudier le comportement des périodes de surfaces particulières, les *surfaces de Campedelli*. La notion habituelle de périodes, pour les surfaces algébriques complexes, repose sur le choix d'une 2-forme différentielle algébrique, dont les périodes sont les intégrales. Or les surfaces de Campedelli sont justement un exemple de surface (de type général), dont le genre géométrique, qui mesure la dimension de l'espace des 2-formes différentielles algébriques, est nul.

SYSTÈMES DE COEFFICIENTS LOCAUX

Les surfaces de Campedelli n'admettent pas de 2-forme au sens habituel, elles admettent des 2-formes différentielles algébriques à valeurs dans des *systèmes de coefficients locaux*. Une situation similaire existe déjà pour les surfaces d'Enriques, qui sont également des surfaces de genre géométrique $p_g = 0$, et qui admettent une 2-forme à valeurs dans un système local. Les surfaces d'Enriques ne sont pas simplement connexes : leur revêtement universel est une surface K3, c'est-à-dire une surface (ici projective) qui possède une 2-forme différentielle algébrique nulle part dégénérée (qui correspond à la 2-forme différentielle *tordue* de la surface d'Enriques).

Étant donné un système local \mathbb{Z}_κ , défini par un caractère κ du groupe fondamental de la variété à valeurs dans $\{\pm 1\}$, une 2-forme différentielle à coefficients dans \mathbb{Z}_κ s'intègre naturellement non pas sur des cycles au sens habituel (éléments de l'*homologie* de la surface), sur lesquels elle ne serait définie qu'au signe près, mais sur des cycles à coefficients dans le système local dual (on notera qu'en raison du choix de coefficients entiers, le système local \mathbb{Z}_κ est dual de lui-même). On pourra trouver des définitions de l'homologie à coefficients locaux dans [S2, S3], et un résumé des propriétés importantes dans [PS, B.3]. Le choix de ces coefficients locaux permet de compenser l'ambiguïté sur le signe de l'intégrale. Cette définition généralise la notion habituelle de périodes ; elle s'y ramène en fait, car le calcul se ramène à celui des périodes d'un revêtement étale qui rend le système local trivial. Ainsi les périodes tordues d'une surface d'Enriques correspondent à celles d'une surface K3 [BHPvdV].

Plus précisément, une 2-forme différentielle à coefficients locaux est une section du faisceau $K_X \otimes \mathbb{Z}_\kappa$ où K_X est le fibré canonique (des 2-formes différentielles) et \mathbb{Z}_κ le système local. En utilisant la théorie de Hodge, on peut l'interpréter comme un élément du groupe de cohomologie de de Rham $H_{DR}^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$ de la surface X à valeurs dans le système local : l'espace de cycles «tordus» sur lequel l'intégrale de la 2-forme est bien définie est le groupe d'homologie à coefficients locaux $H_2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$, grâce au théorème de De Rham.

SURFACES DE CAMPEDELLI

La construction (qui est aussi la définition) des surfaces de Campedelli est très explicite : dans l'espace projectif \mathbb{P}^6 , muni de sept coordonnées homogènes x_1, \dots, x_7 , on considère quatre formes quadratiques $Q_j = \sum a_{ij}x_i^2$: lorsque celles-ci sont suffisamment générales, la variété (que l'on notera souvent \tilde{X}) définie par ces quatre équations est une surface algébrique lisse. Celle-ci est munie d'une action libre du groupe $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, qui agit sur les sept variables x_i par ses sept caractères non nuls : c'est le quotient (noté X) qu'on appelle surface de Campedelli. On appellera aussi *surface de Campedelli* le quotient, sous l'action libre de G , d'une surface aux équations similaires admettant au pire des points doubles ; en effet, dans ces conditions, les surfaces obtenues (ou plutôt, la résolution minimale de leurs singularités) possèdent les mêmes invariants numériques.

On peut se représenter les surfaces de Campedelli d'une autre manière : les carrés des coordonnées x_i^2 sont invariants sous l'action du groupe G , et les équations de la surface \tilde{X} sont des relations linéaires entre les x_i^2 . L'élévation au carré des coordonnées définit donc un morphisme $X \rightarrow \mathbb{P}^6$ dont l'image est un plan. Il s'agit en fait du morphisme bicanonique de X . Ceci décrit X comme un revêtement abélien du plan dont le lieu de ramification prend alors la forme d'une configuration de sept droites. Les éléments non triviaux du groupe de Galois de ce revêtement $(\mathbb{Z}/2)^3$ se relèvent au revêtement universel \tilde{X} de X (intersection de quatre quadriques) en les sept réflexions naturelles de \mathbb{P}^6 par rapport aux hyperplans de coordonnées.

Comme une surface de Campedelli est définie par un système linéaire de quatre équations quadratiques diagonales (celles-ci formant un espace de dimension 7), un espace de paramètres naturel pour les surfaces de Campedelli est la Grassmannienne $\text{Gr}(4, 7)$ des sous-espaces de dimension 4 de \mathbb{C}^7 . Deux types de transformations montrent comment des équations différentes peuvent donner des surfaces de Campedelli isomorphes : le premier est celui des homothéties le long des axes de coordonnées, il correspond à un groupe de matrices diagonales (le tore maximal usuel T de SL_7), et le second correspond au choix de la correspondance entre G et le groupe fondamental de X , qui correspond au groupe fini $GL_3(\mathbb{F}_2)$, agissant par renumérotation des sept coordonnées, identifiées aux éléments non nuls de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

ESPACES DE MODULES

Dans le cadre de l'étude des périodes, on s'intéresse à des couples (X, κ) , où X est une surface de Campedelli et κ est un caractère du groupe fondamental de X (qui détermine un système local). Un espace de modules (grossier) pour les couples (X, κ) est obtenu comme quotient de la grassmannienne $\text{Gr}(4, 7)$ comme ci-dessus, mais à cause du choix de κ , on remplace le groupe fini $GL_3(\mathbb{F}_2)$ par le stabilisateur d'une droite : c'est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{F}_2)$ isomorphe à \mathfrak{S}_4 , qui agit par permutation des six coordonnées correspondant aux caractères distincts de κ . D'un point de vue combinatoire, cette action est la même que celle de \mathfrak{S}_4 sur les six paires formées à partir de quatre objets. Il sera aussi intéressant de voir \mathfrak{S}_4 comme un produit semi-direct $V_4 \rtimes \mathfrak{S}_3$: ceci provient du fait que l'action de \mathfrak{S}_4 sur les six coordonnées les groupe naturellement en trois paires, qu'elle permute. Les éléments de \mathfrak{S}_4 préservant chacune de ces paires sont les doubles transpositions, qui forment le groupe de Klein V_4 .

La 2-forme à valeur dans le système local \mathbb{Z}_κ est invariante sous l'involution s_κ de X qui se relève à \tilde{X} en la réflexion par rapport à la coordonnée x_κ . On se ramène alors, par un argument de symétrie, à l'étude des périodes de certaines surfaces d'Enriques, de la

forme X/s_{κ} . Ayant choisi la coordonnée x_{κ} , on peut aussi construire la surface d'Enriques en question comme l'image de \tilde{X} par la projection qui oublie cette coordonnée : on obtient alors une intersection de trois quadriques en six variables, qui est une surface K3, dont le quotient par G est une surface d'Enriques S_{κ} . On verra que le paramétrage des surfaces S_{κ} présente des redondances supplémentaires : la construction de l'espace de modules utilise non pas l'action de \mathfrak{S}_4 mais celle du groupe plus gros $(\mathbb{Z}/2)^3 \rtimes \mathfrak{S}_3$ (le produit en couronne $\mathbb{Z}/2 \wr \mathfrak{S}_3$), ainsi que l'action d'une involution décrite par une transformation quadratique du plan (transformation de Cremona).

Le passage de la surface X à la surface S_{κ} se traduit au niveau des espaces de modules par une application rationnelle

$$\frac{\mathrm{Gr}(4, 7)//T}{\mathfrak{S}_4} \dashrightarrow \frac{\mathrm{Gr}(3, 6)//T}{\mathfrak{S}_4} \rightarrow \frac{\mathrm{Gr}(3, 6)//T}{(\mathbb{Z}/2 \rtimes \mathfrak{S}_3) \times \mathbb{Z}/2}.$$

Nous verrons que ce dernier espace est une variété de modules naturelle pour les surfaces d'Enriques de la forme S_{κ} , et qu'ainsi chaque telle surface d'Enriques correspond en général à quatre familles disjointes de surfaces de Campedelli marquées par le choix d'un système local.

PÉRIODES ET SURFACES D'ENRIQUES

Le point de vue des périodes offre une autre description des modules des surfaces d'Enriques qui interviennent. On verra d'abord que celles-ci ne sont pas quelconques, mais qu'on peut y trouver des courbes placées dans une disposition particulière : elles sont obtenues à partir de la configuration de droites qui définit la surface. En termes techniques, on trouve en fait dans l'homologie à coefficients locaux $H_2(S_{\kappa}, \mathbb{Z}_-)$ un sous-réseau (de type D_6) engendré par des classes représentées par des courbes algébriques. La théorie classique nous dit que les périodes correspondantes sont nulles.

Le vecteur de périodes d'une surface d'Enriques est une forme linéaire à coefficients complexes sur $H_2(S_{\kappa}, \mathbb{Z}_-)$ (qui est un réseau de rang 12), avec la contrainte d'être nulle sur le sous-réseau distingué ci-dessus, et de vérifier certaines équations issues de la théorie de Hodge. Une surface d'Enriques détermine plusieurs tels vecteurs, en fonction de la base choisie pour le réseau : ceci se traduit par l'action d'un groupe arithmétique sur le domaine de périodes.

On montrera que cette structure est décrite par un réseau L , défini comme \mathbb{Z}^6 muni de la forme quadratique

$$q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2$$

Le domaine de périodes à considérer naturellement est défini par les conditions $q(x) = 0$ et $b(x, \bar{x}) > 0$ (si on note b la forme bilinéaire associée), muni d'une action du groupe $O(L)$, dont le quotient sera noté \mathcal{X}_L . On s'intéresse notamment à la variété projective $\mathcal{X}_L^{\mathrm{BB}}$ obtenue par le procédé de compactification de Baily-Borel.

Le lien entre périodes et espace de modules est alors résumé par le théorème suivant :
Théorème. *L'application de périodes des surfaces d'Enriques correspond à un isomorphisme*

$$\frac{\mathrm{Gr}(3, 6)//T}{(\mathbb{Z}/2 \wr \mathfrak{S}_3) \times \mathbb{Z}/2} \simeq \mathcal{X}_L^{\mathrm{BB}}$$

entre l'espace de modules grossier décrit plus haut et la compactification de Baily-Borel du domaine de périodes.

Ce résultat est obtenu en montrant d'abord que cette application est bien définie, éventuellement après une modification du bord. Dans la section 6.1, on verra grâce à des calculs relativement explicites pourquoi, dans une certaine région du bord, cette modification est en fait inutile.

Après avoir montré que cette application est génériquement étale, on montrera qu'elle est en fait de degré un, en étudiant son comportement autour d'un point particulier, noté $[\omega_0]$, de l'espace de modules. Ce point, qui représente le lieu des surfaces S où l'espace $H^{1,1}(S, \mathbb{C}_-)$ intersecte (du moins à la limite), le réseau $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ sur un sous-réseau $D_6(-1) \oplus \mathbb{Z}^4(-1)$. Si on note T le revêtement universel de S , qui est une surface K3 munie d'une involution sans point fixe, ce point représente la limite dans laquelle T acquiert quatre points doubles distincts, fixés par l'involution.

La configuration de droites associée est très particulière, et en comparant les degrés respectifs des revêtements finis qui uniformisent l'application des périodes, on voit que l'application des périodes est un isomorphisme local au voisinage de ces points.

PLAN DE L'EXPOSÉ

Le chapitre 4 est consacré à la théorie classique qui entoure l'étude des périodes et rappelle quelques résultats bien connus du domaine. Dans le chapitre 5, on expose les propriétés géométriques des involutions naturelles des surfaces de Campedelli, la description concrète des configurations de droites stables et semi-stables (au sens de la théorie géométrique des invariants de Mumford), et les propriétés des surfaces d'Enriques dont le groupe de Picard contient un réseau noté $D_{1,6}$, engendré par des courbes en configuration particulière : on verra notamment comment on peut montrer abstraitement que celles-ci s'écrivent toujours comme revêtement bidouble du plan.

Le chapitre 6 est consacré à l'étude de l'application des périodes, notamment de son comportement le long de l'une des composantes irréductibles du bord.

Applications de périodes et anneaux jacobiens

4.1 UN PEU DE THÉORIE DE HODGE DES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES

Quelques références sur le sujet : le livre de Jürgen Jost [J] pour quelques bases de géométrie riemannienne, et le très complet [V2].

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Une variété différentiable est un espace sur lequel on peut définir la notion de fonction de classe \mathcal{C}^1 et même de fonction de classe \mathcal{C}^∞ . Un exemple est l'espace topologique \mathbb{R}^n , qui est muni d'un *faisceau de fonctions*, c'est-à-dire que pour tout ouvert U , on a un anneau de fonctions $\mathcal{C}^\infty(U)$, et si $V \subset U$, une application de restriction $\mathcal{C}^\infty(V) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$.

L'objet abstrait correspondant est le suivant :

Définition 4.A (Variété différentiable). *Une variété différentiable (de dimension n) est un espace topologique (connexe) paracompact X , muni d'un faisceau d'anneaux \mathcal{C}^∞ , localement isomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n .*

Autrement dit, pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage U_x de x et n fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(U_x)$ (les *coordonnées locales*) qui réalisent un homéomorphisme de U_x dans un ouvert de \mathbb{R}^n , avec des conditions de compatibilité. Celles-ci sont équivalentes à une autre définition traditionnelle, qui demande qu'une variété différentiable soit recouverte par des *cartes locales*, telle que les fonctions de changement de coordonnées à l'intersection de deux cartes soient des difféomorphismes de classe \mathcal{C}^∞ .

Outre les fonctions, on dispose d'autres objets fondamentaux : les champs de vecteurs, et les formes différentielles. Dans un ouvert de \mathbb{R}^n , un champ de vecteur est une combinaison linéaire : $\xi = \sum f_i \partial/\partial x_i$ où les $\partial/\partial x_i$ sont des symboles abstraits, et f_i des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ . Si $F : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme entre ouverts de \mathbb{R}^n , on identifie les champs de vecteurs sur U aux champs de vecteurs sur V par la formule $\xi_V = J_F \xi_U$, où J_F est la matrice jacobienne de F et ξ_U et ξ_V sont des vecteurs de fonctions (sur U et V) représentant le champ de vecteurs.

On définit également des 1-formes différentielles : ce sont des objets $\eta = \sum f_i dx_i$ que l'on identifie de la manière suivante : si $F : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme, on identifie les 1-formes η_U et η_V (représentées par des vecteurs lignes de fonctions) lorsque $\eta_U = \eta_V J_F$. Les 1-formes différentielles apparaissent naturellement comme les objets duaux des champs de vecteurs.

Ceci permet de définir sur une variété différentiable X un faisceau TX ou \mathcal{T}_X de champs de vecteurs, et un faisceau A_X^1 de formes différentielles.

Les opérations de l'algèbre linéaire : somme directe, produit tensoriel, dual, puissance symétrique, puissance extérieure, ont aussi un sens pour TX et A_X^1 : on définit par exemple les p -formes différentielles A_X^p comme $\bigwedge^p(A_X^1)$.

Si X est une variété de dimension n , les n -formes différentielles fournissent une mesure sur X : ceci provient du fait que les mesures et les n -formes se transforment de la même façon sous l'effet d'un difféomorphisme (formule de changement de variables).

VARIÉTÉS COMPLEXES

Puisqu'on a de même un faisceau de fonctions holomorphes sur \mathbb{C}^n (noté \mathcal{O}), on peut définir :

Définition 4.B (Variété complexe). *Une variété complexe (de dimension complexe n) est un espace topologique (connexe) paracompact X , muni d'un faisceau d'anneaux \mathcal{O}_X , localement isomorphe à un ouvert de \mathbb{C}^n .*

Une variété complexe de dimension n produit naturellement une variété différentiable de dimension $2n$: on utilise pour cela les coordonnées locales (complexes), pour définir un faisceau \mathcal{E}^∞ , à partir du faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{C}^n . Une variété complexe possède une *structure presque complexe* : ses champs de vecteurs sont naturellement munis d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel. Ceci se traduit par un opérateur I sur le fibré cotangent Ω_X (des 1-formes différentielles) : dans des coordonnées locales de forme $z_j = x_j + iy_j$, on a

$$I(dx_j) = dy_j \quad I(dy_j) = -dx_j \quad I(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial y_j \quad I(\partial/\partial y_j) = -\partial/\partial x_j$$

Il est commode d'introduire les notations :

$$dz_j = dx_j + idy_j \quad \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

On notera souvent $d\bar{z}_j$ pour la forme différentielle $dx_j - idy_j$. Dans ce cas

$$I(\partial/\partial z_j) = i\partial/\partial \bar{z}_j \quad I(\partial/\partial \bar{z}_j) = -i\partial/\partial z_j \quad I(dz_j) = -id\bar{z}_j \quad I(d\bar{z}_j) = idz_j$$

L'action de l'opérateur $\exp(\theta I)$ permet de décomposer l'espace des k -formes différentielles à valeurs complexes $A_{\mathbb{C}}^k(X)$ en somme directe d'espaces $A^{p,q}(X)$ (espaces propres de $\exp(\theta I)$ pour la valeur $\exp((q-p)i\theta)$). Les éléments de $A^{p,q}$ sont appelés *formes différentielles de type (p, q)* .

Des définitions analogues au cadre différentiable fournissent une notion de champ de vecteurs (holomorphe) et de forme différentielle holomorphe (dont le faisceau est noté Ω_X^1) : ce sont des objets dont les coefficients sont des fonctions holomorphes (sections du faisceau \mathcal{O}_X). On note Ω_X^p le faisceau des p -formes différentielles holomorphes, ce sont les formes différentielles de type $(p, 0)$ dont les coefficients (dans des coordonnées locales holomorphes) sont holomorphes.

MÉTRIQUES ET OPÉRATEUR * DE HODGE

La notion de métrique permet de donner une mesure aux variétés différentielles : une métrique *riemannienne* est le choix d'un produit scalaire sur les champs de vecteurs, à coefficients de classe \mathcal{C}^∞ . On peut la noter sous la forme

$$ds^2 = \sum_{i \leq j} g_{ij} dx_i dx_j$$

en coordonnées locales. On peut également parler de métriques hermitiennes : une telle métrique est représentée par un tenseur

$$H = \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \otimes d\bar{z}_k$$

où les fonctions h_{jk} sont à valeurs complexes et forment une matrice hermitienne. On peut décomposer une métrique hermitienne sous la forme $g - ih$: la partie réelle g est une métrique riemannienne, et h est une 2-forme différentielle

$$h = \frac{i}{2} h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

appelée *forme de Kähler* de H . On a en effet

$$H - \bar{H} = -2ih = \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \otimes d\bar{z}_k - \bar{h}_{kj} d\bar{z}_k \otimes dz_j = \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

Définition 4.C (Métrique kählérienne). *On dit que H est une métrique kählérienne lorsque la forme de Kähler est fermée (c'est-à-dire $dh = 0$).*

Lorsque l'on travaille sur une variété riemannienne orientée (notamment les variétés kählériennes), le choix d'une métrique riemannienne fournit automatiquement une notion de volume : le déterminant de la matrice d'une métrique riemannienne peut naturellement être vu comme un élément de $\text{Sym}^2(A_X^n)$, on pose donc

$$d\text{vol} = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Cette mesure donne un sens au produit scalaire L^2 (euclidien ou hermitien) entre formes différentielles de même degré. Si M est une variété différentielle compacte, on dispose alors de deux accouplements :

$$(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \text{ pour } \alpha \in A^k(M) \text{ et } \beta \in A^{n-k}(M)$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle_{L^2} = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle d\text{vol} \text{ pour } \alpha, \beta \in A^k(M)$$

où on note $\langle \alpha, \beta \rangle$ le produit scalaire induit par la métrique riemannienne. Il est facile de construire explicitement un opérateur $*$ (opérateur étoile de Hodge) tel que $\langle \alpha, \beta \rangle d\text{vol} = \alpha \wedge * \beta$.

DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE, DIVERGENCE ET LAPLACIENS

La différentielle extérieure est l'extension aux formes différentielles de l'opérateur de différentielle sur les fonctions

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

(ici, les x_i désignent des coordonnées locales sur une variété différentielle). La différentielle d'une forme est définie par les règles $d(dx_i) = 0$ et $d(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge d\beta + (-1)^{|\alpha|} d\alpha \wedge \beta$, où $|\alpha| = p$ pour $\alpha \in A^p$. La différentielle extérieure définit des opérateurs $A^p \rightarrow A^{p+1}$.

On définit de même une différentielle complexe :

$$\partial f = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i$$

(avec les conventions mentionnées plus haut), et un opérateur $\bar{\partial}$ en remplaçant z_i par \bar{z}_i dans la formule précédente : on a alors $d = \partial + \bar{\partial}$. Une fonction est holomorphe lorsque $\bar{\partial}f = 0$: dans ce cas ∂f coïncide avec la différentielle de f .

Si α est une forme différentielle de degré fixé, on pose alors $d^* \alpha = \pm * d * \alpha$ (le signe choisi dépend du degré de α et de la dimension de la variété) : c'est un adjoint formel à

d , souvent appelé *divergence* dans le langage courant. On définit de même des opérateurs ∂^* et $\bar{\partial}^*$. L'opérateur de Laplace-Beltrami est alors

$$\Delta = dd^* + d^*d$$

On définit aussi des opérateurs $\Delta_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial$ et $\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$ sur les variétés complexes. Ici $\partial^* = - * \bar{\partial}^*$, et $\bar{\partial}^* = - * \partial^*$.

Théorème 4.1 (Identités kählériennes, cf. [J, V2]). *Si X est une variété complexe, munie d'une métrique kählérienne, $\Delta = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar{\partial}}$.*

Ces égalités jouent un rôle important dans la définition de la *décomposition de Hodge*. Le laplacien agit comme un endomorphisme auto-adjoint des espaces de différentielles $A^p(X)$. Son noyau est l'espace des *formes différentielles harmoniques*, parfois noté $\mathcal{H}^p(X)$.

COHOMOLOGIE DE DE RHAM ET DÉCOMPOSITION DE HODGE

Dans toute cette partie X est une variété différentielle compacte, orientable.

Définition 4.D. *Les groupes de cohomologie de de Rham d'une variété différentielle X sont définis par*

$$H_{\text{DR}}^p(X) = \frac{\ker d : A^p(X) \rightarrow A^{p+1}(X)}{\text{im } d : A^{p-1}(X) \rightarrow A^p(X)}.$$

Théorème 4.2 (Hodge). *Les formes différentielles harmoniques sont fermées, et l'application de $\mathcal{H}^p(X)$ dans $H_{\text{DR}}^p(X)$ qui associe à une forme différentielle harmonique sa classe de cohomologie est bijective.*

Une forme différentielle fermée α définit une application $\gamma \rightarrow \int_\gamma \alpha$ qui associe à un cycle γ la valeur de l'intégrale de α . Celle-ci ne dépend que de la *classe d'homologie* de γ , grâce à la *formule de Stokes*, et seulement de la classe de cohomologie de α .

Théorème 4.3 (de Rham). *L'application $H_{\text{DR}}^p(X) \rightarrow H^p(X, \mathbb{R})$ définie par l'intégration sur les cycles est bijective.*

Les théorèmes de Hodge et de de Rham montrent que les formes différentielles harmoniques sont un moyen de décrire la topologie des variétés différentielles.

Lorsque X est une variété kählérienne, les identités kählériennes montrent que le laplacien agit comme un endomorphisme de chaque espace $A^{p,q}(X)$. Ceci permet d'obtenir le théorème de décomposition de Hodge :

Théorème 4.4 (Décomposition de Hodge). *Soit X une variété kählérienne compacte. L'espace des formes différentielles harmoniques à coefficients complexes se décompose comme somme directe (orthogonale pour le produit hermitien L^2) d'espaces $H^{p,q}(X)$, qui sont les espaces de formes différentielles harmoniques de type (p, q) .*

De plus la conjugaison complexe fournit une bijection semi-linéaire $H^{p,q}(X) \rightarrow H^{q,p}(X)$.

On obtient ainsi une décomposition

$$H^k(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus H^{p,q}(X)$$

dont on peut montrer qu'elle est indépendante de la métrique choisie (dont dépend le laplacien !). On note souvent $b_k(X)$ pour la dimension de $H^k(X, \mathbb{C})$ (nombre de Betti) et $h^{p,q}(X)$ pour la dimension de $H^{p,q}(X)$ (nombres de Hodge).

Les espaces $H^{p,q}(X)$ admettent également une autre interprétation : puisqu'ils sont les noyaux de $\Delta_{\bar{\partial}}$, on peut les interpréter comme la *cohomologie du complexe*

$$0 \rightarrow A^{p,0}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,n}(X) \rightarrow 0$$

où n est la dimension complexe de X , c'est-à-dire

$$H^{p,q}(X) \simeq \frac{\ker \bar{\partial} : A^{p,q}(X) \rightarrow A^{p,q+1}(X)}{\operatorname{im} \bar{\partial} : A^{p,q-1}(X) \rightarrow A^{p,q}(X)}.$$

En particulier $H^{p,0}(X) = \Omega^p(X)$ est l'espace des p -formes différentielles holomorphes sur X . La théorie de Dolbeault fournit une interprétation des espaces $H^{p,q}(X)$ comme le q -ième groupe de cohomologie du faisceau Ω_X^p , noté $H^q(X, \Omega_X^p)$. L'utilisation du langage de la cohomologie des faisceaux permet d'intégrer l'étude des espaces $H^{p,q}(X)$ au cadre de la géométrie algébrique ou analytique façon «faisceaux cohérents», et à l'algèbre homologique, qui fournit des méthodes très générales et des outils puissants.

4.2 PÉRIODES DES SURFACES ALGÈBRIQUES

STRUCTURES DE HODGE

Lorsque X est une variété projective, c'est-à-dire une variété définie dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ par des polynômes homogènes, de surcroît lisse, l'ensemble de ses points (solutions simultanées des équations de X) forme naturellement une variété analytique complexe, au sens précédent.

Dans ce cas, X est aussi munie d'une structure kählérienne, la plus naturelle étant celle provenant de la *métrique de Fubini-Study* de l'espace projectif, définie en coordonnées affines par la formule

$$h_{\text{FS}} = \frac{1}{2i\pi} \partial \bar{\partial} \log(1 + |z|^2).$$

Supposons X de dimension 2. L'espace de cohomologie $H^2(X, \mathbb{R})$ est naturellement muni d'une forme d'intersection, que l'on peut représenter en cohomologie de De Rham par la formule $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \alpha \wedge \beta$. Il s'agit d'une forme quadratique non dégénérée. On voit que si α est un élément de $H^{2,0}(X)$, avec $p < n/2$,

$$\langle \alpha + \bar{\alpha}, \alpha + \bar{\alpha} \rangle = 2 \int_X \alpha \bar{\alpha} = 2|\alpha|_{\mathbb{L}^2}^2 > 0$$

(on peut en effet écrire $dz_1 dz_2 d\bar{z}_1 d\bar{z}_2 = 4dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$ qui définit la mesure standard sur X). Si au contraire α est un élément de $H^{1,1}(X)$, on décompose $\alpha = \lambda h + \beta$, où h est la forme de Kähler et β est orthogonale à h . On peut montrer que $h^2 > 0$ et $\beta^2 \leq 0$.

Théorème 4.5 (Théorème de l'indice de Hodge). *Si X est une surface complexe kählérienne, la signature de la forme d'intersection sur $H^2(X, \mathbb{R})$ est $(2h^{2,0} + 1, h^{1,1} - 1)$.*

La structure de Hodge de $H^2(X, \mathbb{C})$ est la donnée :

- du réseau $H_{\mathbb{Z}}$ image de $H^2(X, \mathbb{Z})$ dans $H^2(X, \mathbb{C}) \simeq H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$;
- de la filtration de Hodge $F^2 = H^{2,0}$, $F^1 = H^{2,0} \oplus H^{1,1}$, $F^0 = H_{\mathbb{C}}$.

On tiendra aussi compte de la forme quadratique d'intersection sur $H_{\mathbb{Z}}$, dont la signature est donnée par le théorème de l'indice de Hodge. Le cas des structures de Hodge *polarisées* est particulièrement intéressant : il s'agit du cas où la forme hermitienne d'intersection est définie positive sur $H^{2,0}$ et $H^{0,2}$, définie négative sur $H^{1,1}$. Une telle situation apparaît par exemple lorsqu'on considère la *cohomologie primitive*, qui est le supplémentaire orthogonal de h dans $H^2(X)$.

Une surface algébrique polarisée (par exemple la donnée d'un espace projectif et d'une surface algébrique dans cet espace) définit une structure de Hodge polarisée qui peut être caractérisée par un point dans un *domaine de périodes*. Dans le cas qui nous intéressera, les structures de Hodge seront polarisées, de poids 2 (donc similaires au H^2 d'une surface complexe), et de nombres de Hodge $(1, h, 1)$.

Étant donné un réseau L , muni d'une forme quadratique q fixée, une telle structure de Hodge est entièrement déterminée par le choix d'une droite $\mathbb{C}\omega$ (pour F^2). Le sous-espace F^1 est alors $\mathbb{C}\omega^\perp$. Le générateur ω doit satisfaire les équations $q(\omega) = 0$ et $q(\omega, \bar{\omega}) > 0$, qui définissent un domaine \mathcal{D}_L dans $\mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C})$. Lorsque la signature du réseau L est de la forme $(2, h)$, \mathcal{D}_L est un *domaine hermitien symétrique*, et sa géométrie est bien comprise. C'est notamment le cas des structures de Hodge polarisées du type ci-dessus. D'après le théorème de De Rham, les coordonnées du point $[\omega]$ sont les valeurs de $\int_C \omega$, où C parcourt un ensemble de cycles de dimension 2 formant une base de l'homologie $H_2(X, \mathbb{Z})$. Une structure de Hodge dont le réseau sous-jacent $H_{\mathbb{Z}}$ est isomorphe à L définit un point de \mathcal{D}_L , après le choix d'un isomorphisme $H_{\mathbb{Z}} \simeq L$.

C'est pourquoi on utilise le quotient $\mathcal{X}_L = \mathcal{D}_L/O(L)$ comme ensemble des classes d'équivalence de structures de Hodge polarisées, de réseau sous-jacent L . Celui-ci est muni d'une structure d'ensemble analytique complexe ; il possède aussi un certain nombre de fonctions méromorphes, dites *automorphes*. Le théorème de Baily et Borel affirme que celles-ci forment une algèbre de type fini. Autrement dit, \mathcal{X}_L s'identifie naturellement à une partie ouverte d'une variété projective, appelée sa *compactification de Baily-Borel* et notée ici $\mathcal{X}_L^{\text{BB}}$.

L'espace tangent au domaine de périodes cité plus haut, en un point $[\omega]$, est isomorphe naturellement à l'espace vectoriel $\text{Hom}(\mathbb{C}\omega, \omega^\perp/\omega)$. Si $[\omega]$ représente une structure de Hodge $H^2(X)$, les propriétés d'orthogonalité de la décomposition de Hodge identifient cet espace à $\text{Hom}(H^{2,0}(X), H^{1,1}(X))$.

Théorème 4.6 (Griffiths). *On se donne une famille de variétés complexes lisses paramétrées par une base S , lisse également. On choisit (au moins localement) une base pour leur homologie, et on suppose que $H^2(X)$ est munie d'une structure de Hodge du type précédent. Alors la différentielle de l'application des périodes, en tant que morphisme $TS \rightarrow T\mathcal{D}_L$, s'identifie à la composée*

$$T_s S \rightarrow H^1(X_s, TX_s) \rightarrow \text{Hom}(H^0(\Omega^2(X_s)), H^1(\Omega^1(X_s)))$$

où le premier morphisme est celui de Kodaira-Spencer qui caractérise les déformations infinitésimales d'une variété à l'aide du groupe de cohomologie $H^1(X_s, TX_s)$ et le second est donné par le cup-produit.

UTILISATION DES ANNEAUX JACOBIEENS

Lorsque X est une hypersurface de l'espace projectif \mathbb{P}^N , définie par une équation homogène de degré d , de la forme $F(\mathbf{x}) = 0$, on peut s'intéresser aux N -formes différentielles sur l'espace projectif admettant des pôles simples le long de X : une telle forme doit s'écrire

$$\frac{f(x_0, \dots, x_N) \left(\sum \pm x_i dx_0 \cdots \wedge \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_N \right)}{F(x_1, \dots, x_N)}$$

et f est un polynôme homogène de degré $d - N - 1$.

L'opération de résidu associée à une telle forme différentielle est une forme de degré $N - 1$ sur X : ceci identifie l'espace de cohomologie $H^{N-1,0}(X)$ à un espace de polynômes (un

quotient, en fait, car si par exemple f est multiple de F , le résidu est nul). Le travail de Griffiths consiste à donner une interprétation abstraite de la formule naïve

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma} \frac{f\Omega}{F_t} = \int_{\gamma} \frac{-f(\partial_t F_t)\Omega}{F_t^2}$$

Le second membre de cette famille est une forme différentielle à pôles doubles le long de X : une opération bien choisie identifie ces formes différentielles aux éléments de l'espace $H^{N-2,1}(X)$, qui sont alors représentés par un quotient de l'espace des polynômes de degré $2d - N - 1$.

On a en fait le théorème suivant :

Théorème 4.7 (Griffiths). *Soit J_F l'anneau jacobien*

$$\frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]}{\langle F, \partial_{x_0} F, \dots, \partial_{x_N} F \rangle'}$$

gradué par le degré des polynômes.

Alors l'espace tangent à l'espace de modules des hypersurfaces de même degré que X (les déformations de la paire (X, \mathbb{P}^N)) s'identifie à la partie $J_F^{(d)}$ de degré d et on a un isomorphisme canonique entre $J_F^{(q+1)d-(N+1)}$ et $H^{p,q}(X)_{\text{prim}}$ pour $p + q = N - 1$. De plus, cette identification est compatible avec la description de la différentielle de l'application des périodes (théorème 4.6).

Pour un grand nombre de valeurs de d et N , les déformations infinitésimales de X , paramétrées par l'espace $H^1(X, TX)$ coïncident avec les déformations de X comme hypersurface. Dans ce cas, les applications déterminées par l'anneau jacobien donnent une description complète de la variation locale de structure de Hodge induite par les déformations de F .

Géométrie des surfaces de Campedelli et d'Enriques

5.1 CAMPEDELLI SURFACES

Campedelli surfaces (and numerical Campedelli surfaces which share the same numerical invariants) have been thoroughly studied [C, M2, CMLP]. A number of useful results are contained in the unpublished manuscript of M. Reid [R].

In this section we give the basic definitions of Campedelli surfaces, and their first properties. We are mainly concerned about involutions that are induced by coordinate reflections in \mathbb{P}^6 . In the generic case, the quotient of a Campedelli surface X by such a reflection is an Enriques surface whose periods determine those of X (proposition 5.9). This Enriques surface usually has six nodes corresponding to isolated fixed points on X .

We then give local properties of the period map. Its differential has rank 4 at points of the moduli space parameterising smooth surfaces (proposition 5.14). We will define later a natural 4-dimensional period domain for Campedelli surfaces. We also prove in section 5.1, along the lines of [V1], a property which is needed later: when crossing the discriminant hypersurface, the period of the associated vanishing cycle has non-zero derivative, on the double cover ramified over the (corresponding irreducible component of the) discriminant.

DESCRIPTION AND GENERAL PROPERTIES

Definition 5.A. *A numerical Campedelli surface is a minimal smooth projective surface X with numerical invariants $p_g = q = 0$ and $K_X^2 = 2$.*

A (classical) Campedelli surface is a numerical Campedelli surface whose fundamental group is isomorphic to $(\mathbb{Z}/2)^{\oplus 3}$.

Many topological invariants of Campedelli surfaces can be calculated in terms of these numbers: by Noether's formula, the topological Euler characteristic is $e(X) = c_2(X) = 12 - K_X^2 = 10$, thus the nonzero Hodge numbers of X are $h^{0,0} = h^{2,2} = 1$ and $h^{1,1} = 8$. The signature of X is $\tau(X) = (K_X^2 - 2e(X))/3 = -6$, hence the second cohomology group, which is a \mathbb{Z} -module of rank 8 with a unimodular quadratic form, is isomorphic to $\mathbb{Z}^{1,7}$, the standard Lorentzian lattice.

Campedelli surfaces have a six-dimensional, unirational moduli variety. This is implied by the following structure theorem:

Theorem 5.1 (see [M1] or [R]). *The universal cover \tilde{X} of a (classical) Campedelli surface X is birational to a complete intersection of 4 diagonal quadrics in \mathbb{P}^6 , where $\pi_1(X)$ acts by its 7 distinct nonzero characters. Moreover, this complete intersection is the canonical model of \tilde{X} , and its quotient is the canonical model of X .*

Because of this simple description, we give the name of *canonical Campedelli surface* to the canonical model itself.

An abstract approach to this property is the fact that the action of $G = \pi_1(X)$ on $H^0(\tilde{X}, K_{\tilde{X}})$ is decomposed as a sum of eigenspaces for each character $\kappa \in \hat{G}$, which can be identified with $H^0(X, K_X \otimes L_\kappa)$, where L_κ is the (flat) line bundle arising from the representation of $\pi_1(X)$ given by κ . Each of these spaces has dimension one, except for $\kappa = 0$ (since $p_g(X) = h^0(X, K_X) = 0$). Up to homothety, it is then possible to choose canonical coordinates x_κ (where $0 \neq \kappa \in \hat{G}$) for the embedding of \tilde{X} in $|K_{\tilde{X}}|^\vee \simeq \mathbb{P}^6$.

Since diagonal quadratic equations in \mathbb{P}^6 form a vector space of rank 7, the choices of a linear system spanned by four elements can be identified with points in the Grassmann variety $\text{Gr}(4, 7)$: this gives an identification between the moduli space of triples:

$$(X, f : G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3} \simeq \pi_1(X), g : \mathbb{P}^6 \simeq |K_{\tilde{X}}|^*)$$

consisting of a Campedelli surface with a framing of its fundamental group and a G -equivariant linear isomorphism of $|K_{\tilde{X}}|^*$ with \mathbb{P}^6 , and an open Zariski subset \mathcal{M}_u of $\text{Gr}(4, 7)$ which parametrises linear systems of diagonal quadrics whose base locus is a normal surface with at worst ordinary double points as singularities.

The smoothness of such a complete intersection is easy to detect:

Proposition 5.2. *A complete intersection of four diagonal quadrics in \mathbb{P}^6 is smooth if and only if its linear system does not contain a quadric of rank three. Under this assumption no point has more than two vanishing coordinates.*

Proof. Let $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^6$ denote the surface defined by the linear system. If it contains a quadric of rank three, e.g. $x_5^2 + x_6^2 + x_7^2$, there is a point of \tilde{X} such that $x_5 = x_6 = x_7 = 0$. Such points are indeed described in the space $\{x_5 = x_6 = x_7 = 0\} \simeq \mathbb{P}^3$ by three quadratic equations. By the Jacobian criterion, the complete intersection cannot be smooth at this point.

Conversely, if $Q_j = \sum q_{ij}x_i^2$, the Jacobian matrix is given by $(q_{ij}x_i)_{i,j}$. Assume this matrix has not full rank at a point R . If R has four nonzero coordinates, the corresponding minor should vanish, and this implies that some linear combination of the Q_j has rank three. If R has four zero coordinates, since R is solution to the equations, there is a set of three columns of (q_{ij}) which are linearly dependent. Up to linear combinations, we can assume that Q_3 and Q_4 have rank four, and some linear combination of them has rank three. \square

Definition 5.B. *A framed Campedelli surface is a pair $(X, \varphi : G \rightarrow \pi_1(X))$ where X is a Campedelli surface, and φ is an isomorphism between $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ and $\pi_1(X)$.*

A natural moduli space for framed Campedelli surfaces is the GIT quotient of $\text{Gr}(4, 7)$ under action of the diagonal torus T in SL_7 . Indeed, the set of G -equivariant isomorphisms of $H^0(\tilde{X}, K_{\tilde{X}})^\vee$ with \mathbb{C}^7 is a torsor under T : any such isomorphism must be compatible with the splitting of these spaces into a direct sum of one-dimensional eigenspaces.

Our main object of interest is the following:

Definition 5.C. *A marked Campedelli surface is a pair $\kappa = (X, X_\kappa \rightarrow X)$ where X is a Campedelli surface and $X_\kappa \rightarrow X$ is an étale connected double cover of X .*

The datum of a marked Campedelli surface amounts to give, along with X , one of the following (equivalent) structures:

- a connected étale double cover $X_\kappa \rightarrow X$;
- a non-trivial rank one local system of integral coefficients \mathbb{Z}_κ (whose square is the constant sheaf);
- a 2-torsion non trivial holomorphic line bundle on X , denoted by \mathcal{L}_κ ;
- a non trivial character of $\pi_1(X)$, $\kappa : \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

- an effective divisor numerically equivalent to K_X (which must have the form $H_\kappa \in |K_X + \mathcal{L}_\kappa|$).

Proposition 5.3. *The moduli space of framed Campedelli surfaces is connected and can be written as a \mathfrak{S}_4 -Galois cover of the moduli space of marked Campedelli surfaces.*

Proof. The set of isomorphisms between $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}$ and $\pi_1(X)$ mapping a chosen character κ to the character $(b_1, b_2, b_3) \mapsto b_1$ is naturally equipped with a free transitive action of the affine linear group $\mathrm{GA}_2(\mathbb{F}_2)$ of the plane $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$, and $\mathrm{GA}_2(\mathbb{F}_2)$ is canonically isomorphic to the permutation group of the subset $\{g \in G \text{ such that } \kappa(g) = 1\}$. \square

The *periods* of a marked Campedelli surface, with a given holomorphic 2-form with values in \mathbb{C}_κ (equivalently, an element $\omega \in H^0(K_X + \mathcal{L}_\kappa)$), are the various integrals of ω along cycles of $H_2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$: they are fully determined by the associated element $\omega \in H^2(X, \mathbb{C}_\kappa)$.

Proposition 5.4. *The lattice $H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$ (modulo torsion) is equipped with the quadratic form defined by the cup product with values in $H^4(X, \mathbb{Z}_\kappa \otimes \mathbb{Z}_\kappa) \simeq \mathbb{Z}$. As such, it is unimodular and isomorphic to $\mathbb{Z}^{2,8}$, the standard quadratic lattice with signature $(2, 8)$.*

Proof. The cohomology of \mathbb{Z}_κ has the same numerical invariants as the usual cohomology of X : $e(X) = 10$, and $\tau(X) = 6$. Its only nonzero Betti number is $b_2(X, \mathbb{Z}_\kappa) = 10$, and the value of $\tau(X)$ forces the signature to be $(2, 8)$.

By Poincaré-Verdier duality, $H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$ is unimodular, and since we know it is indefinite and odd (the signature is not a multiple of 8), its isomorphism class is uniquely determined (see [S1]). \square

INVOLUTIONS OF A CAMPEDELLI SURFACE

Let X be a *canonical* Campedelli surface, and $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}$ as before. Let \tilde{X} be the universal cover of X . Then X is isomorphic to \tilde{X}/G and \tilde{X} can be written as a complete intersection of 4 diagonal quadrics in \mathbb{P}^6 .

Let Γ be the projection in PGL_7 of the diagonal group $(\pm 1)^7$, acting on \tilde{X} : G is naturally embedded in Γ , its action being given by its seven non-trivial characters.

Note that \tilde{X} is a Γ -invariant subvariety of \mathbb{P}^6 , and that squaring coordinates gives a Galois cover $\mathrm{sq} : \mathbb{P}^6 \rightarrow \mathbb{P}^6$ with group Γ . Since $\mathrm{sq}(\tilde{X})$ is defined in \mathbb{P}^6 by four linear equations, it is isomorphic to a plane, and the map $\tilde{X} \rightarrow \mathrm{sq}(\tilde{X})$ is also a Γ -Galois cover. This proves the following proposition:

Proposition 5.5. *A Campedelli surface is a Galois cover of \mathbb{P}^2 with group Γ/G .* \square

The group Γ/G will be identified with a set of reflections in \mathbb{P}^6 , giving a simple description of the group of automorphisms of a generic Campedelli surface. The elements of Γ can be classified by *weight*: this notion will provide a convenient vocabulary for the rest of the paper.

Definition 5.D. *The weight of an element of Γ (represented by a diagonal matrix g in $\{\pm 1\}^7 \subset \mathrm{GL}_7$) is defined as $|\mathrm{Tr} g|$ (the difference between the number of $+1$ and -1 coefficients in g).*

There are in Γ

- one element with weight 7: the identity;
- 7 elements with weight 5: the reflections;
- 21 elements with weight 3;
- 35 elements with weight 1, seven of them being the nonzero elements of G .

Proposition 5.6. *The projection $\Gamma \rightarrow \Gamma/G$ induces a bijection between the elements s_i (reflections across coordinate hyperplanes) and nonzero elements of Γ/G .*

Moreover, if χ is a nonzero character of G , and s_χ is the reflection across the associated hyperplane, the map $\chi \mapsto [s_\chi] \in \Gamma/G$ is a group isomorphism.

Proof. Let s_i and s_j be different reflections in Γ , and suppose $s_i - s_j$ lies in G : then there would be an element of G with weight 3, which is impossible. Thus $\Gamma \rightarrow \Gamma/G$ is injective on the s_i 's.

Moreover, let $i, j, k = i + j$ be nonzero elements in \widehat{G} : then G contains a unique nonzero element g annihilated by i, j and k . By definition, $\pm(s_i s_j s_k)$ is the element of Γ associated to g , hence $s_k = s_i + s_j$ in Γ/G . \square

The character group \widehat{G} is thus realised as a subgroup of $\text{Aut}(X)$: for a generic X , this inclusion is even an equality. This results from the fact that the bicanonical map must be equivariant under the action of $\text{Aut}(X)$, and from the fact that a general configuration of 7 lines in the plane has no automorphisms.

Another interpretation of these facts is that the quadratic form over $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ defined by

$$q(x_1, \dots, x_7) = \sum_i x_i^2 + \sum_{i < j} x_i x_j$$

has a polar symplectic form

$$b(u, v) = \sum_{i \neq j} u_i v_j = q(u + v) - q(u) - q(v)$$

whose kernel is the vector

$$(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

It thus defines a non-degenerate quadratic form on Γ , for which nonzero isotropic vectors are vectors of weight 1, the weight being defined as the difference between the number of zero and nonzero coordinates. If x has n nonzero coordinates, $q(x) \equiv n(n + 1)/2$, which is zero iff $n = 0, 3, 4, 7$.

Then G is an isotropic subspace of Γ where the quadratic form vanishes, and b defines a non-degenerate pairing between G and Γ/G . Taking G to be generated by the lines of the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

for which coordinates are the 7 characters of G , it is easy to check that the pairings $b(e_i, -)$ with the basis vectors coincide with the nonzero element of \widehat{G} given by the i -th column of the matrix.

QUOTIENTS OF CAMPEDELLI SURFACES UNDER INVOLUTIONS

Let (X, κ) be a (possibly nodal) marked Campedelli surface, and s_κ the involution of X canonically associated to the character κ , which is ramified over $D_{\kappa'}$, the unique effective divisor in $|K_X + L_\kappa|$ (a curve of arithmetic genus 3). We refer to [CMLP] for theoretical results about the possible quotients of numerical Campedelli surfaces under involutions, since we are dealing here with a particular case of those.

Proposition 5.7. *When X is smooth, the fixed point set of s_κ consists of D_κ and six isolated points.*

Proof. A point $x \in X$ is fixed under the action of s_κ if and only if there exists $g \in G$ such that $s_\kappa \cdot \tilde{x} = g \cdot \tilde{x}$ for some lifting of x to \tilde{X} . If g is the identity, this means that x lies on D_κ .

Otherwise, if $g + s_\kappa$ has weight 1 ($\kappa(g) \neq 0$), x has at least three vanishing coordinates: this is impossible.

If $g + s_\kappa$ has weight 3, then $\kappa(g) = 0$ and x should have only two vanishing coordinates (corresponding to characters $\chi, \chi + \kappa$ such that $\chi(g) = 0$ and $\chi \neq \kappa, 0$). We find two fixed points for each χ corresponding to $D_\chi \cap D_{\chi+\kappa}$, so there are six isolated fixed points for s_κ . \square

Proposition 5.8. *If $x \in X$ is a node of a Campedelli surface, x is the intersection of three divisors $D_{\kappa_1}, D_{\kappa_2}, D_{\kappa_3}$, such that the κ_i generate \hat{G} , and x is fixed by any involution in Γ/G (notably s_κ).*

Proof. This follows from the description of the Campedelli surface as an octuple plane, and the classification of singularities which can be found at [AP], see also proposition 5.2. \square

In this description, if κ is one of the κ_i 's, the node lies on D_κ , and is part of the fixed locus described in proposition 5.7. If κ is a sum of two κ_i 's, then the node is a fixed point of the type $D_\chi \cap D_{\chi+\kappa}$ also described in prop. 5.7. Nodes that add new fixed points are defined by $D_{\kappa_1} \cap D_{\kappa_2} \cap D_{\kappa_3}$ where $\sum \kappa_i = \kappa$.

There are at most four such nodes: the number of bases of \hat{G} (up to permutation of vectors) whose sum is κ is 4 (there are $7 \cdot 6 \cdot 4/3! = 28$ bases, and the number of sums is 7, giving four bases for each possible sum).

Proposition 5.9. *Suppose X is smooth. The quotient of X by s_κ is an Enriques surface S_κ with six ordinary double points. If \tilde{X} is the blow-up of the isolated fixed points, and \tilde{S}_κ is the minimal resolution of S_κ , the morphism $\tilde{X} \rightarrow \tilde{S}_\kappa$ is a double cover ramified over $D_\kappa + \sum E_i$ where E_i are the exceptional curves, where D_κ is now a genus 3 curve on S_κ .*

Proof. Let X_κ be the connected étale double cover of X associated to the character κ . Since X_κ can be written as \tilde{X}/H_κ , where $H_\kappa \subset G$ is the kernel of κ , s_κ has a natural lift to X_κ associated to the reflection of \mathbb{P}^6 across the hyperplane $\{x_\kappa = 0\}$.

The previous argument still applies and shows that s_κ fixes the image of the hyperplane D_κ and 12 isolated points. Drawing a diagram for this situation (here $T_\kappa = X_\kappa/s_\kappa$),

$$\begin{array}{ccc} X_\kappa & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_\kappa & \longrightarrow & S_\kappa \end{array}$$

we note that the unique nonzero section of $K_X + L_\kappa$ lifts to a holomorphic 2-form on T_κ , which vanishes only along D_κ : considering an expression of this form in local coordinates along D_κ shows that it is necessarily invariant under s_κ , and descends to a non-vanishing 2-form on T_κ . It follows that T_κ is a K3 surface with 12 isolated double points.

It is now easy to check that the action of G/H_κ , defining an involution of T_κ , has no fixed point (it is represented by an element g of Γ , with weight one, such that $\kappa(g) = 1$). This proves that S_κ is an Enriques surface. \square

Note that if s_κ has ν fixed nodes outside the usual fixed locus, the quotient S_κ is a rational surface with $K_X^2 = -\nu$. We have seen that $\nu \leq 4$.

Let $\kappa \in \widehat{G}$ be a fixed character: following the results of Griffiths, the infinitesimal variation of $\omega \in H^2(X, \mathbb{C}_\kappa)$ is described by the *infinitesimal κ -periods map*:

$$H^1(X, TX) \rightarrow \text{Hom}(H^0(X, K_X + L_\kappa), H^1(X, \Omega_X^1(L_\kappa)))$$

It is indeed related to the standard situation, in the following way: if X_κ is the étale cover of X associated to κ , whose Galois group is identified with $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H^1(X, TX)$ is identified to the invariant part of $H^1(X_\kappa, TX_\kappa)$, and $H^0(K_X)$, $H^1(X_\kappa, \Omega_\kappa^1)$ can be split into the direct sum of an invariant and anti-invariant part. The infinitesimal variation of κ -periods is then identified to an eigenspace of the usual variation of Hodge structure of X_κ (which is $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -equivariant for all elements of $H^1(X, TX)$).

Since $|K_X + L_\kappa|$ contains only D_κ , we can use the isomorphism $TX \simeq \Omega_X^1 \otimes (-K_X)$ to identify the infinitesimal period map with the linear map

$$H^1(X, TX) \rightarrow H^1(X, TX(D_\kappa))$$

(recall that the first space has dimension 6 while the target space has dimension 8), induced by the product by a section vanishing on D_κ .

Following the method of Konno [K], it will be shown in the next section that the kernel of this map is the space of deformations such that the family of maps $Q_t : X_t \rightarrow |2K_X|^v \simeq \mathbb{P}^2$ moves the lines $Q_t(D_\kappa)$ but not $Q_t(D_\chi)$ for $\chi \neq \kappa$. These deformations can be described as a deformation of coordinates

$$x_\kappa^2 \rightsquigarrow x_\kappa^2 + \sum_{i \neq \kappa} \varepsilon_i x_i^2.$$

Let \mathcal{T} be the subsheaf of TX consisting of vector fields which are tangent to D (we drop κ subscripts starting from here) along D . It is defined by a Cartesian square, which induces short exact sequences:

$$\begin{array}{ccccc} TX(-D) & \longrightarrow & \mathcal{T} & \longrightarrow & TD \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ TX(-D) & \longrightarrow & TX & \longrightarrow & TX_{1D} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & N_D & \xlongequal{\quad} & N_D \end{array}$$

The long exact sequences arising from the previous diagram can be used to build a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc} H^0(D, TX(D)) & \hookrightarrow & H^0(D, N_D(D)) & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow \text{dashed} & \\ H^1(X, TX) & \hookrightarrow & H^1(X, \mathcal{T}(D)) & \longrightarrow & H^1(D, TD(D)) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \text{dashed} \\ H^1(X, TX) & \longrightarrow & H^1(X, TX(D)) & \longrightarrow & H^1(D, TX(D)) \\ & & \downarrow & & \downarrow \text{dashed} \\ & & H^1(D, N_D(D)) & \xlongequal{\quad} & H^1(D, N_D(D)) = 0 \end{array}$$

where all lines, the 2nd column and the dashed arrows are exact sequences. Note that $H^0(X, TX(D)) = 0$ since as before, $TX(D)$ is isomorphic to $\Omega_X^1 \otimes L_\kappa$, whose sections are part of the Hodge decomposition of $H^1(X, \mathbb{C}_\kappa) = 0$. This implies that the maps in the top left square are injective.

Notice that $N_D(D)$ is a line bundle on D of degree $2g_D - 2 = 4$, with $h^0 = 2$ (since $N_D(D) = \mathcal{O}_D(2D)$, which is the line bundle corresponding to the linear system of quadrics).

Proposition 5.10. *The map $H^0(D, TX(D)) \rightarrow H^0(D, N_D(D))$ is an isomorphism.*

Proof. Since the (meromorphic) vector field $\partial/\partial x_\kappa$ is tangent to X along D (all equations of X have zero derivative at $x_\kappa = 0$), any vector field

$$\sum_{i \neq \kappa} \alpha_i x_i^2 \frac{1}{x_\kappa} \partial/\partial x_\kappa$$

is a regular section of $TX(D)$ over D . This shows that the composite

$$\mathcal{O}_D(2D) \rightarrow TX(D)_{|D} \rightarrow N_D(D) \text{ where the first map is } s \mapsto \frac{s}{x_\kappa} \frac{\partial}{\partial x_\kappa}$$

is an isomorphism. □

This implies that $H^0(D, N_D(D))$ lifts to a 2-dimensional subspace of $H^1(X, TX)$ which is the kernel of the infinitesimal period map. The corresponding deformations can be expressed informally by writing

$$dx_\kappa = \frac{1}{x_\kappa} \sum_{i \neq \kappa} \varepsilon_i x_i^2 \iff d(x_\kappa^2) = 2 \sum_{i \neq \kappa} \varepsilon_i x_i^2$$

THE JACOBIAN RING

The classical theory of Griffiths [G4, V2] details how the infinitesimal variation of Hodge structure of a smooth hypersurface in \mathbb{P}^n (inside the moduli space of hypersurfaces) can be recovered from the Jacobian ring of its equation. A similar construction describes the variation of periods for complete intersections. We refer to [K] for a detailed exposition of the theory.

Let Y be a complete intersection of four diagonal quadrics in \mathbb{P}^6 , and $\Lambda = |\mathfrak{S}_Y(2)| \simeq \mathbb{P}^3$ be the linear system of quadrics through Y . Then $\mathbb{P}^6 \times \Lambda$ carries a “universal” divisor \tilde{Y} , whose fibre over $\ell \in \Lambda$ is the quadric defined by ℓ . If π is the projection $\tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}^6 \times \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^6$, the fibres of π over Y are projective spaces, and π is a \mathbb{P}^2 -bundle outside $\pi^{-1}(Y)$.

Theorem 5.11 (Konno). *The variation of Hodge structure of $H^8(\tilde{Y})$ is canonically identified (up to a shift in gradings) with the variation of Hodge structure of $H^2(Y)$, which is canonically embedded as $H^2(R^6 \pi_* \mathbb{Z}_{\tilde{Y}}) \subset H^8(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$.*

Consider the bigraded ring $S^{\bullet, \bullet} = \mathbb{C}[x_i, y_j]$ with 11 variables, which is generated by projective coordinates on \mathcal{P}^6 ($i = 1 \dots 7$) and Λ ($j = 1, 2, 3, 4$). Suppose

$$f = y_1 Q_1 + y_2 Q_2 + y_3 Q_3 + y_4 Q_4$$

(where the Q_j 's are diagonal quadratic forms $Q_j = \sum q_{ij} x_i^2$) is a parametrisation of the linear system Λ : it is an equation of bidegree $(2, 1)$ of $\tilde{Y} \subset \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^3$. Then the variation of Hodge structure for \tilde{Y} can be elegantly described by the Jacobian ring of f [G2].

For the sake of consistency with [K], we also introduce the notation

$$R_{p,q} = (S/J)^{2p-7q, p-4q} \simeq H^0(\mathbb{P}^6 \times \Lambda, p\tilde{Y} + qK)$$

where K is the canonical class of $\mathbb{P}^6 \times \Lambda$.

The Jacobian ideal of \tilde{Y} is

$$\mathcal{J}^{\bullet,\bullet} = S\langle \partial_{x_i} f, \partial_{y_j} f \rangle = S\left\langle \sum_j q_{ij} x_i y_j, Q_j \right\rangle.$$

Theorem 5.12 (Konno). *If $p + q = 8$, the space $H^p(\tilde{Y}, \Omega^q)_{\text{prim}}$ is isomorphic to*

$$R_{p+1,1} = (S/J)^{2p-5,p-3} \simeq H^0((p+1)\tilde{Y} + K_{\mathbb{P}^6 \times \Lambda}),$$

using Griffiths's techniques, which associate to $P \in R_{p+1,1}$ the meromorphic volume form $P\Omega/f^{p+1}$, where Ω is a standard volume form on $\mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^3$ with values in $\mathcal{O}(7, 4)$.

In this setting, the first-order deformations of the linear system associated to f are given by the elements of $R_{1,0} = (S/J)^{2,1}$, while the infinitesimal period map of Y is given by the natural morphism

$$R_{1,0} \rightarrow \text{Hom}(R_{3+1,1}, R_{4+1,1})$$

induced by multiplication in the ring S/J .

Proposition 5.13. *The infinitesimal period map for $(X = Y/G, \kappa \in \widehat{G})$, which the identification given by theorem 5.12, is proportional to the natural map given by multiplication*

$$R_{1,0}^{(0)} \rightarrow \text{Hom}(R_{3+1,1}^{(\kappa)}, R_{4+1,1}^{(\kappa)})$$

where $V^{(\kappa)}$ is the isotypic component of V where G acts by the character κ . Moreover, $R_{4,1}^{(\kappa)}$ is one-dimensional, generated by x_{κ} , so the map

$$x_{\kappa} : R_{1,0}^{(0)} \rightarrow R_{4+1,1}^{(\kappa)}$$

also describes the infinitesimal κ -period map.

An explicit description of $R_{1,0}^{(0)}$ is given by the G -invariant part of the vector space, generated by the monomials $x_i x_j y_k$ in S/J , which is isomorphic to

$$\frac{\langle x_i^2 y_j \rangle}{\langle Q_k y_j, \sum_j q_{ij} x_i^2 y_j \rangle}$$

which has dimension $6 = 28 - 16 - 7 + 1$, since the only non trivial relation is $\sum Q_j y_j = \sum_{i,j} q_{ij} x_i^2 y_j$. The brackets here denote the linear span of the elements they enclose.

The space $R_{5,1}^{(\kappa)} = (S/J)_{(\kappa)}^{3,1}$ is

$$\frac{\langle x_p x_q x_r y_j \rangle}{\langle x_{\kappa} Q_l y_j, \sum_j q_{ij} x_i x_s x_t y_j \rangle} \quad \begin{array}{l} \text{where } p + q + r = \kappa \\ \text{where } i + s + t = \kappa \end{array}$$

which can be written more suggestively as

$$\frac{\langle x_i^2 x_{\kappa} y_j \rangle}{\langle x_{\kappa} Q_l y_j, \sum_j q_{ij} x_i^2 x_{\kappa} y_j, \sum_j q_{kj} x_k x_s^2 y_j \text{ for } s \neq \kappa \rangle} \oplus \frac{\langle x_p x_q x_r y_j \rangle}{\langle \sum_j q_{pj} x_p x_q x_r y_j \rangle}$$

(in the second summand, $p + q + r = \kappa$, and none of p, q, r equals κ). The first space has dimension 4 as we see below, and the second space has dimension $8 - 6 = 2$ (note there are two possible triples (p, q, r)). These dimensions coincide with the dimension of eigenspaces of s_{κ} on $H^{1,1}(Y, \mathbb{C}_{\kappa})$: the (twisted) differential form Ω/f^{p+1} is anti-invariant under s_{κ} , as well as x_{κ} .

The image of multiplication by x_κ lies inside the first space, and by simplifying out x_κ , we observe that the annihilator of x_κ can be analysed by looking at the quotient morphism,

$$\frac{\langle x_i^2 y_j \rangle}{\langle Q_k y_j, \sum_j q_{ij} x_i^2 y_j \rangle} \longrightarrow \frac{\langle x_i^2 y_j \rangle}{\langle Q_k y_j, \sum_j q_{ij} x_i^2 y_j, \sum_j q_{\kappa j} x_i^2 y_j \rangle} \quad (1.a)$$

Proposition 5.14. *If Q is the matrix of a linear system defining a smooth (universal cover of) Campedelli surface, the target of the morphism in equation 1.a has dimension 4.*

The space of linear combinations $\sum a_{ij} x_i^2 y_j$ is identified with the space of matrices (a_{ij}) with size 7×4 . The subspace $\langle Q_k y_j \rangle$ is then the space of products MQ where $M \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$. Since Q defines a surface, it must have full rank, hence the space of products MQ has dimension 16. We use an intermediate lemma to prove proposition 5.14.

Lemma 5.15. *If $Q = (q_{ij})$ is the matrix of the linear system defining a smooth Campedelli surface, written in the standard basis $(x_i^2)_{i \in \hat{G}}$, no set of four columns of Q are linearly dependent.*

Proof. If there were such a set, then some element of the linear system would be a quadric of rank three: then there would be three linearly dependant monomials x_i^2 in the bicanonical linear system. The configuration of lines describing the Campedelli surface has a triple point, which creates a singularity. \square

Proof of proposition 5.14. We work with the spaces of matrices described above: a matrix MQ lies in $\langle \sum_j q_{\kappa j} x_i^2 y_j, \sum_j q_{\kappa j} x_i^2 y_j \rangle$, if Mx is a linear combination of x and K for any column x of Q (K being the column κ). Then K is an eigenvector of M , and we need to analyse its action on \mathbb{C}^4/K .

The six columns of Q (except K) should define 3 different eigenvectors of M in \mathbb{C}^4/K . Using the previous lemma, we know that no three of them are linearly dependent. By standard arguments, this forces M to act as a scalar multiplication on \mathbb{C}^4/K . Conversely, if M acts as a scalar on \mathbb{C}^4/K , then MQ lies in the given subspace: the space of such MQ has dimension 5.

The dimension of $\langle Q_k y_j, \sum_j q_{ij} x_i^2 y_j, \sum_j q_{\kappa j} x_i^2 y_j \rangle$ is then $16 + (7 + 7 - 1) - 5 = 24$, hence the result. \square

THE PERIOD MAP AROUND CAMPEDELLI SURFACES WITH DOUBLE POINTS

We will need to examine the behaviour of the period map around a Campedelli surface with a double point, following the method described by C. Voisin in [V1]. We are interested in the following particular situation: let α, β, γ be a basis of $(\mathbb{Z}/2)^3$, and $\kappa = \alpha + \beta + \gamma$.

Let X be a Campedelli surface (the associated configuration of 7 lines in the bicanonical plane should have at worst triple points) and assume that the lines D_α, D_β and D_γ are concurrent in $|2K_X|^\vee$: then $x_\alpha^2 + x_\beta^2 + x_\gamma^2$ belongs to the defining linear system, and there exists a point R such that $x_\alpha = x_\beta = x_\gamma = 0$. Note that there exists an element of $\pi_1(X)$ whose action on coordinates reverses the sign of x_i for $i = \alpha, \beta, \gamma, \kappa$. This implies that R is fixed under the involution s_κ . In the following, we denote $(\kappa, \alpha, \beta, \gamma)$ by numbers 4, 5, 6, 7.

Note that R cannot have a fourth vanishing coordinate, since this would mean that a fourth branching line is concurrent with $D_\alpha, D_\beta, D_\gamma$.

By the Picard-Lefschetz formula, the monodromy of the Gauss-Manin connection around the hypersurface of configurations with three concurrent lines has order two, and there cannot exist (even locally) a continuous choice of trivialisation of the lattices $H^2(X_\kappa(t), \mathbb{Z})$ (hence neither of $H^2(X_t, \mathbb{Z}_-)$) in any neighbourhood of X in the moduli space.

However, taking the double cover ramified along this hypersurface trivialises the monodromy and allows to get a simultaneous resolution of singularities [A2], since the hypersurface parametrises surfaces acquiring double points. It becomes possible to define a local period map with values in a type IV domain \mathcal{D} , which is then holomorphic.

Let t be a complex parameter and consider the deformation of X given by the matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ 0 & 0 & 0 & -t^2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

which corresponds to the double cover of a one-parameter family which is transverse to the hypersurface defined by the minor of the first columns.

We make the following regularity hypothesis:

$$\text{the determinant } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ does not vanish.}$$

Lemma 5.16. *This hypothesis is equivalent to requiring that R has no fourth vanishing coordinate, or to the assumption that no set of four lines are concurrent.* \square

As before, the period map of this family can be identified (locally) with the period map of the associated family of hypersurfaces of bidegree $(1, 2)$ in $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^6$, with equations $F_t = \sum u_j q_j$ where $q_1 = \sum a_i x_i^2$ and so on.

The singular locus of F_t is defined by the equations q_j , and the vanishing of the Jacobian matrix of (q_1, q_2, q_3, q_4) on (u_i) . For generic choices of q_1, q_2, q_3 (described by our regularity hypothesis), there is an isolated fixed point at $([0 : 0 : 0 : 1], R)$. Choosing $u_4 = 1, x_4 = 1$ as a local chart, the equation of the family is given by

$$u_1 q_1 + u_2 q_2 + u_3 q_3 - t^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 = 0$$

which defines an isolated ordinary double point: in other words, $\{q_1, q_2, q_3, x_5, x_6, x_7\}$ is a set of local coordinates on \mathbb{P}^6 . The action of s_κ lifts to these local coordinates by changing signs in x_5, x_6, x_7 .

If \tilde{X}_t is the complete intersection of quadrics associated to the parameter t , and Y_t is the associated 8-fold in $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^6$, the Hodge structure on $H^8(Y_t)$ is described by $H^{3,5}(Y_t) = \mathbb{C}\tilde{\omega}$, where

$$\tilde{\omega} = \text{Res}_{Y_t} \frac{x_\kappa \Omega}{F_t^4}$$

where Ω is a non-vanishing generator of $\Omega^9(4, 7)$.

By the works of Griffiths and Konno, we know that the variation of Hodge structure along this family will be described by the following type $(4, 4)$ form:

$$\tilde{\omega}' = \text{Res}_{Y_t} \frac{t u_4 x_4^2 x_\kappa \Omega}{F_t^5}$$

up to some multiplicative constant.

In the local chart described above ($u_4 = x_4 = 1$), we can write

$$\tilde{\omega}' = \text{Res}_{Y_t} \frac{t x_\kappa \Omega}{F_t^5}$$

where Ω is the canonical holomorphic volume form on $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^6$.

If κ were not $\alpha + \beta + \gamma$, then R would not be a fixed point of the involution: the regularity of the period map follows from a blow-up at the singular point of the family Y_t . In the affine chart where $x_i = tX_i$, $q_i = tQ_i$, $u_i = tU_i$ (note that x_κ is nonzero):

$$\tilde{\omega}'(t) = \text{Res}_{Y_t} \frac{t^{10} x_\kappa \Omega_{\text{bl}}}{t^{10} (F_t^{\text{bl}})^5}$$

$$\text{where } F_t^{\text{bl}} = U_1 Q_1 + U_2 Q_2 + U_3 Q_3 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2 - 1$$

A change of variables turns F_t into $\sum Y_i^2 - 1$, and the period over the corresponding vanishing sphere has a finite limit (since the given residue is the way of expressing the primitive cohomology of the quadric).

We now need to know how this differential form integrates in the case where R is invariant under s_κ : in this case some cohomology class is anti-invariant under s_κ and its period vanishes for $t = 0$. Such a situation has already been studied by Horikawa for Enriques surfaces [H2].

The key fact is that the projective quadric in \mathbb{P}^9 , which is the normal cone to the singular point in the 9-fold $\mathcal{Y} = (Y_t)$, has two base classes in $H^{4,4}$, corresponding to classes of maximal isotropic subspaces, σ_1 and σ_2 , which form a hyperbolic plane. They are such that $h^4 = \sigma_1 + \sigma_2$ is the class of a 4-dimensional linear section, and $\rho = \sigma_1 - \sigma_2$ is the class of the real sphere \mathbb{S}^8 . Note that $\rho^2 = -2$.

Since s_κ acts by changing signs of three coordinates, it exchanges σ_1 and σ_2 (it is not in SO_{10}), hence the real sphere is anti-invariant under this transformation (s_κ reverses the orientation of the associated real manifold), and by the same argument the associated period has a nonzero derivative at $t = 0$.

5.2 TODOROV SURFACES AND DOUBLE COVERS OF ENRIQUES SURFACES

Todorov surfaces were introduced by Todorov to give examples of surfaces whose infinitesimal period map is nontrivial and not injective [T]. A systematic study of these surfaces is done in [M3], which we quote for most of the properties stated below.

Campedelli surfaces are double covers of Enriques surfaces, and their étale double covers (whose periods are what we actually study) are Todorov surfaces. In section 5.2 we carry out a study of basic properties of double covers of Enriques surfaces, similar to [M3]. If $X \rightarrow S$ is such a double cover, the geometry of S usually gives good information about the transcendental part of $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$, and in section 5.2 we compute a formula giving the index of the embedding $H^2(S, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$ (theorem 5.25) between (twisted) cohomology lattices. It will be used to compare the global period maps for S and X .

CLASSICAL TODOROV SURFACES

Definition 5.E (Todorov surface). *A Todorov surface is a surface Z with canonical singularities, and an involution j , such that $S = Z/j$ is a K3 surface with rational double points and $\chi(\mathcal{O}_Z) = 2$.*

If \tilde{Z} is the minimal resolution of Z , the natural morphism $\tilde{j} : \tilde{Z} \times_{Z,j} Z \rightarrow \tilde{Z}$ lifts j to an involution of \tilde{Z} . The quotient $\Sigma = \tilde{Z}/\tilde{j}$ is again a K3 surface, which is a partial desingularisation of S .

Definition 5.F (Fundamental invariants). *Let (Z, j) be a Todorov surface. Then Σ as above is a nodal K3 surface: the lattice generated by its nodes has index 2^α inside its primitive saturation in $H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$. The number of nodes of Σ is denoted by k . The fundamental invariants of Z are the integers (α, k) .*

Theorem 5.17 (Todorov). *Several topological invariants of \tilde{Z} can be calculated using the fundamental invariants. The order of the 2-torsion subgroup of $H^2(\tilde{Z}, \mathbb{Z})$ is 2^α . The divisorial part of the ramification locus $B \subset \Sigma$ satisfies $B^2 = 2k - 16$. The integer k can also be expressed as $c_1(\tilde{Z})^2 + 8$.*

Proposition 5.18. *If X is a Campedelli surface without (-2) -curves, X_κ is a Todorov surface with invariants $(2, 12)$.*

Proof. As seen in section 5.1, the involution s_κ on X lifts to X_κ , which is a projective surface with rational double points, and the quotient X_κ/s_κ is the universal cover of the Enriques surface X/s_κ . We recover $\alpha = 2$ from the order of the 2-torsion subgroup of $H^2(X_\kappa, \mathbb{Z})$ (which is identified with the character group of $\pi_1(X_\kappa)$), and $k = 12$ from the number of double points of $T_\kappa = X_\kappa/s_\kappa$ (we know that S_κ has six double points). \square

Another invariant of Todorov surfaces is a natural sublattice of the Picard group of the underlying K3 surface:

Definition 5.G (Todorov lattice [M3]). *Let Z be a smooth Todorov surface and $\Sigma = Z/j$ be the associated nodal K3 surface. The resolution of singularities of Σ is denoted by $\tilde{\Sigma}$: each double point of Σ is resolved to a (-2) -curve E_i on $\tilde{\Sigma}$.*

The Todorov lattice associated to Z is the primitive saturation $L_T(Z)$ of the sublattice $\langle B, E_i \rangle$ of $H^2(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z})$ generated by the ramification divisor B and the classes E_i .

The Todorov lattice is the Picard lattice of K3 surfaces associated to generic Todorov surfaces with given invariants (α, k) . Such K3 surfaces are parametrised by a period domain: a moduli space for Todorov surfaces can thus be constructed using their period map [M3].

TODOROV-ENRIQUES SURFACES

We define a class of surfaces inspired by the definition of Todorov surfaces. This class includes Keum-Naie surfaces [N1] and the construction by Mendes Lopes and Pardini [MLP] of surfaces such that $p_g = q = 0$. We gather here a collection of results which fit Campedelli surfaces in this class.

Definition 5.H. *A Todorov-Enriques surface is a pair (X, j) where X is a canonical surface with an involution $j : X \rightarrow X$, such that $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$, and X/j is an Enriques surface with at worst rational double points.*

Replacing if necessary X by its minimal desingularisation, we will assume that X is smooth, and that the double points of X/j come from the isolated fixed points of j . The smooth Enriques surface obtained by blowing-up the double points of X/j is denoted by S .

The double points of X/j define (-2) -classes E_1, \dots, E_k in $\text{Pic}(S)$. The invariants of (X, j) are k (the number of fixed points of j , which is also the number of double points on X/j) and α , which is the dimension of the kernel of the natural map

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle E_1, \dots, E_k \rangle \rightarrow \frac{\text{Pic } S}{2 \text{ Pic } S}$$

(the space of “even sets” made of E_1, \dots, E_k).

Proposition 5.19. *The ramification divisor $B \subset X/j$ has self-intersection $2K_X^2 = 2k - 8$, and $h^0(S, \mathcal{O}_S(B)) = k - 3$.*

Proof. Since $K_X = K_S + \pi^* B/2$, $K_X^2 = B^2/2$. Now, if X_b is the blowup of the k fixed points of j ,

$$e(X_b) - e(B) - 2k = 2(e(S) - e(B) - 2k)$$

hence $e(X_b) = e(X) + k = 2 \cdot 12 + B^2 - 2k$. By Noether's formula, $12 = K_X^2 + e(X)$, giving $12 = 24 + 3B^2/2 - 3k$ and the equality $B^2 = 2k - 8$. \square

Proposition 5.20. *The inequality $2\alpha \leq k \leq \alpha + 5$ holds, or equivalently $k - 5 \leq \alpha \leq k/2$.*

Proof. Let N_S be the primitive saturation of the lattice generated by the nodal classes E_i in $\text{Pic}(S)$ (which is a rank 10 unimodular lattice).

The double point lattice N_S of S has rank k and discriminant $2^{k-2\alpha}$ (hence $k \geq 2\alpha$), but its orthogonal complement has rank $10 - k$. Since the discriminant group of N_S^\perp is a \mathbb{F}_2 -vector space of rank at most $10 - k$, which is isomorphic to the discriminant group of N_S , $k - 2\alpha \leq 10 - k$. \square

Using this inequality (and the fact that $K_X^2 = k - 4 > 0$), the possible values of (α, k) are

$$(0, 5) \quad (1, 5) \quad (2, 5) \quad (1, 6) \quad (2, 6) \quad (3, 6) \quad (2, 7) \quad (3, 7) \quad (3, 8) \quad (4, 8)$$

Remember that an even set of nodes on an Enriques surface is made of 4 or 8 nodes. If $k = 5$, the existence of two distinct even sets of nodes would imply the existence of an even set of two nodes, which is impossible.

If $k = 8$, the universal cover of S is necessarily a Kummer surface: the study of even sets on a Kummer surface (see [BHPvdV] for example) tells us that in this case $\alpha = 4$.

The pair $(3, 6)$ is also impossible: since any even set of nodes has four elements, two distinct even sets must share exactly two nodes, in other words, the complements of distinct even sets are disjoint, so there cannot be more than three non trivial even sets.

The possible values of (α, k) are now

$$(0, 5) \quad (1, 5) \quad (1, 6) \quad (2, 6) \quad (2, 7) \quad (3, 7) \quad (4, 8)$$

Proposition 5.21. *The 2-torsion subgroup of $\text{Pic}(X)$ is an extension of $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\alpha$ by the 2-torsion subgroup of $H^2(S, \mathbb{Z})$ (which is isomorphic to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).*

Proof. Let $\pi : X_b \rightarrow S$ be the projection, and U be the complement in S of the image of the fixed locus $F \subset X_b$ of j , and $u : U \hookrightarrow S$ be the standard inclusion. Consider the extensions of sheaves

$$\begin{aligned} e_U : 0 &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \pi_* \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \\ e_S : 0 &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \pi_* \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow u_* \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \\ \chi : 0 &\rightarrow u_* \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow i_* \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

which determine $e_U \in H^1(U, \mathbb{Z}/2)$, $e_S \in \text{Ext}_S^1(u_* \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ and $\chi \in \text{Ext}_S^1(i_* \mathbb{Z}/2, u_* \mathbb{Z}/2)$.

The exact sequence of sheaves

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \pi_* \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow u_* \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

induces an exact sequence

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq H^1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X_b, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_c^1(S \setminus F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

which expresses $H^1(X_b, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ as an extension of $\ker e_S \subset H_c^1(S \setminus F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ by $\mathbb{Z}/2$.

The relative cohomology exact sequence now tells us that

$$H^0(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^0(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\chi} H_c^1(S \setminus F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

is exact, but the last map being injective, $H_c^1(S \setminus F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ is isomorphic to $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^f/e$, where f is the number of components of F and e is the sum of elements of F . We must now compute

$$\ker e_S = \ker(e_S \chi : H^0(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}/2))/e$$

But $e_S \chi$ is an element of $\text{Ext}_S^2(i_* \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \simeq H^0(\mathbf{Ext}^2(i_* \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2))$ which is totally determined by looking at the sections of $\mathbf{Ext}^1(i_* \mathbb{Z}/2, u_1 \mathbb{Z}/2)$ and $\mathbf{Ext}^1(u_1 \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ determined by e_S and χ . It is easy to check that it is exactly the Gysin map.

Its kernel is identified with the code of even sets of nodes in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$. \square

This shows that $(1, 5)$ is impossible, since it would give a numerical Godeaux surface such that $H^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ contains $(\mathbb{Z}/2)^2$, which is impossible [M1, sec. 3].

Proposition 5.22. *A Todorov-Enriques surface admits a canonical étale double cover, induced by the universal cover of the quotient Enriques surface. This double cover is a Todorov surface.* \square

Since Todorov surfaces are known to satisfy $q = 0$ [M3], Todorov-Enriques surfaces satisfy $p_g = q = 0$.

If X is a Todorov-Enriques surface, and $(\tilde{\alpha}, \tilde{k})$ are the invariants of a Todorov surface Y which is an étale double cover of X , then $\tilde{k} = 2k$, and we have the following possibilities.

$$\begin{array}{ccccccccc} (\alpha, k) & (0, 5) & (1, 6) & (2, 6) & (2, 7) & (3, 7) & (4, 8) & & \\ (\tilde{\alpha}, \tilde{k}) & (0, 10); (1, 10) & (1, 12); (2, 12) & (2, 12) & (3, 14) & (3, 14) & (5, 16) & & \end{array}$$

In [N1], D. Naie constructed examples of such surfaces for the invariants $(0, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 6)$, $(2, 7)$ and $(4, 8)$, starting with an Enriques surface with 8 nodes (the value of α can be deduced from the observation that the 2-torsion groups have order 2 for $k = 5, 4$ or 8 for $k = 6, 2^3$ for $k = 7$). The general description of surfaces of type $(2, 7)$ can be found in [MLP]. The case $(3, 7)$ is actually impossible [MLP, 4.4]: the Enriques surface would be realised as a surface with seven nodes in \mathbb{P}^3 , the nodes being aligned like the seven points of $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$, which is impossible.

Proposition 5.23. *The Campedelli surfaces are examples of Todorov-Enriques surfaces with invariants $(\alpha, k) = (2, 6)$.*

Proof. Let (X, κ) be a marked (smooth) Campedelli surface and $S = X/s_\kappa$ be the associated Enriques surface with six nodes. Here B is the (reduced) image of D_κ in S ($B^2 = 2k - 8 = 4$ by proposition 5.19). This gives $k = 6$, and explained after definition 5.H, $\alpha = 2$ means there are three sets of even nodes among the six nodes on S .

Note that any twisted canonical divisor $D_i \neq D_\kappa$ goes through the two fixed points $\{e_i, e'_i\} = D_i \cap D_{i+\kappa}$ and no other fixed point (except those of D_κ): let B_i be the image of $2D_i$ in S , which is a divisor with generic multiplicity two, which pulls back to $2K_X$, B_i is an element of $|2B|$.

There are two rational curves E_i, E'_i in the desingularisation \tilde{S} corresponding to the points e_i and e'_i . The decomposition of B_i into irreducible components is $B'_i + S_i + S'_i$ (since S_i pulls back to $2E_i$), and $B'_i = 2B - S_i - S'_i$ is divisible by two. This implies that the complementary set of four rational curves on \tilde{S} is even, since the existence of the ramified double cover $X \rightarrow S$ requires that the sum of B and the six rational (-2) -curves is divisible by two.

The three possible pairs of fixed points $D_i \cap D_{i+\kappa}$ provide the three required even sets of nodes. \square

It should be noted that numerical Campedelli surfaces may be also constructed using an Enriques surface with invariants $(\alpha, k) = (1, 6)$, giving fundamental groups $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ or $\mathbb{Z}/2$. We hope to study these families of Enriques surfaces in detail in a future work.

In order to compare the period map of Enriques surfaces with the actual period map of a family of covering Todorov-Enriques surfaces, we give a formula computing the index of the map $H^2(S, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)_{\text{num}}^G$, when $f : X \rightarrow S$ is a degree two cover of an Enriques surface, G is the group generated by the associated involution of X , and $\mathbb{Z}_\kappa = f^* \mathbb{Z}_-$. Then $f^* : H^2(S, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)_{\text{num}}$ is a morphism of quadratic lattices, which multiplies the intersection form by two. The notation H_{num} denotes the quotient of an abelian group H by its torsion subgroup (cohomology classes up to numerical equivalence).

We make the following assumptions: the ramification locus of f is a disjoint union of ρ smooth curves (ρ being a positive integer), and any étale double cover X' of X is regular ($q(X') = 0$). The only needed consequence of S being an Enriques surface is that $H^3(S, \mathbb{Z}_-) = 0$.

The computation is done using spectral sequences for G -equivariant cohomology: here $H_G^k(X, \bullet)$ can be understood as the k -th derived functor of $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})^G$. The Borel diagram for the action of G is

$$\begin{array}{ccccc} EG & \longleftarrow & X \times EG & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow f \\ BG & \longleftarrow \pi & [X/G] & \xrightarrow{\gamma} & S \end{array}$$

where BG is the classifying space of G and EG the universal G -bundle over BG . Then $H_G^\bullet(X, \mathbb{Z}_\kappa) = H^\bullet([X/G], \mathbb{Z}_\kappa)$ can be calculated by the Leray spectral sequences for π and γ .

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, \mathbb{Z}_\kappa)) \implies H_G^{p+q}(X, \mathbb{Z}_\kappa)$$

$$E_2'^{p,q} = H^p(S, R^q \gamma_* \mathbb{Z}_\kappa) \implies H_G^{p+q}(X, \mathbb{Z}_\kappa)$$

The computation of sheaves $R^q \gamma_* \mathbb{Z}_\kappa$ corresponds to cohomology groups of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$\gamma_* \mathbb{Z}_\kappa \simeq \mathbb{Z}_- \quad R^{2k+1} \gamma_* \mathbb{Z}_\kappa = 0 \quad \text{and} \quad R^{2k+2} \gamma_* \mathbb{Z}_\kappa \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})|_F \quad (k \geq 0).$$

The map f^* is decomposed as follows:

$$f^* : H^2(S, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\gamma^*} H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa) \xrightarrow{\tilde{f}^*} H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)^G$$

By eliminating torsion, we obtain two maps of free abelian groups

$$\begin{aligned} H^2(S, \mathbb{Z}_-)_{\text{num}} &\rightarrow H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)_{\text{num}} \quad (\text{of index } 2^{N_1}) \\ \text{and } H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)_{\text{num}} &\rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)_{\text{num}}^G \quad (\text{of index } 2^{N_2}). \end{aligned}$$

The index of f^* is thus expressed as the $(N_1 + N_2)$ -th power of two. We are actually going to prove the following formulas:

Proposition 5.24. *The integer N_1 (see proposition 5.26) is equal to*

$$\rho - \ell_2(H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)) + \ell_2(H^2(S, \mathbb{Z}_-)). \quad (2.a)$$

The integer N_2 (see propositions 5.28 and 5.29) is equal to

$$\ell_2(H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)) - \ell_2(H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)^G) - \varepsilon \quad (2.b)$$

where ε is 1 if \mathbb{Z}_κ is trivial, 0 otherwise.

Here ℓ_2 denotes the length of the 2-adic torsion subgroup.

Theorem 5.25. *Under the hypotheses above, the map of lattices associated to f^* has index*

$$2^{\ell_2(H^2(S, \mathbb{Z}_-)) - \ell_2(H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)^G) + \rho}$$

if \mathbb{Z}_κ is non trivial,

$$2^{\ell_2(H^2(S, \mathbb{Z}_-)) - \ell_2(H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)^G) + \rho - 1}$$

otherwise.

Second spectral sequence

Since $E_2^{p,q} = 0$ for any odd q , the differential d_2 is zero. The remaining differential is $d_3^{(0,2)} : H^0(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^3(S, \mathbb{Z}_-) = 0$. The resulting filtration on $H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$ is graded by

$$\text{Gr}^2 = H^2(S, \mathbb{Z}_-) \quad \text{Gr}^1 = 0 \quad \text{Gr}^0 = H^0(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\rho$$

Proposition 5.26. *The map $H^2(S, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$ is injective, its cokernel is a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -module of rank ρ , and $N_1 = \rho - \ell_2(H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)) + \ell_2(H^2(S, \mathbb{Z}_-))$, as stated by formula 2.a.*

Proof. Let $T(S)$, $T_G(X)$ be the torsion groups of $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ and $H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$. The natural map $H^2(S, \mathbb{Z}_-)/T(S) \rightarrow H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)/T_G(X)$ has again cokernel $\simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\rho$. This cokernel is an extension of the 2-torsion of the target (with length $\ell_2(H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)) - \ell_2(H^2(S, \mathbb{Z}_-))$), and the contribution from the torsion-free part (a group of order 2^ρ). We get the equation stated above. \square

First spectral sequence

Lemma 5.27. *Let \mathbb{Z}_κ be a \mathbb{Z} -local system on an algebraic surface X with no irregular étale double cover. Then $H^1(X, \mathbb{Z}_\kappa) = 0$ if $\mathbb{Z}_\kappa = \mathbb{Z}_X$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ if \mathbb{Z}_κ is non trivial.*

Proof. If $\mathbb{Z}_\kappa = \mathbb{Z}_X$, then $H^1(X, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z})$ by the universal coefficient theorem, and this is torsion-free, but since $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$, it must be zero.

If \mathbb{Z}_κ is non trivial, then \mathbb{Z}_κ is given by a character $\kappa : \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. There is a canonical double cover $X_\kappa \rightarrow X$ and a short exact sequence:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_\kappa) \rightarrow H^1(X_\kappa, \mathbb{Z}) = 0.$$

\square

Suppose that $\mathbb{Z}_\kappa = \mathbb{Z}_X$. Then $H^p(G, H^q(X, \mathbb{Z}_\kappa))$ is zero for $q = 1$, and for $(p, q) = (2p' + 1, 0)$. The graded parts Gr_i^p of $H_G^2(X, \mathbb{Z})$ are

$$\begin{aligned} \text{Gr}^2 &= H^2(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{Gr}^1 &= 0 \\ \text{Gr}^0 &= H^0(G, H^2(X, \mathbb{Z})) \end{aligned}$$

Proposition 5.28. *When \mathbb{Z}_κ is trivial, the map $H_G^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})^G$ is surjective and induces an isomorphism between the torsion-free quotients (i.e. $N_2 = 0$). Moreover the following relation holds:*

$$\ell_2(H_G^2(X, \mathbb{Z})) = \ell_2(H^2(X, \mathbb{Z})^G) + 1.$$

Suppose now that $\mathbb{Z}_\kappa \neq \mathbb{Z}_X$: then $H^0(X, \mathbb{Z}_\kappa) = 0$ and $H^1(X, \mathbb{Z}_\kappa) = \mathbb{Z}/2$. The graded parts Gr_I^p of $H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$ are

$$\begin{aligned} \text{Gr}^2 &= 0 \\ \text{Gr}^1 &= H^1(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{Gr}^0 &= \ker : H^0(G, H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)) \rightarrow H^2(G, H^1(X, \mathbb{Z}_\kappa)) \end{aligned}$$

hence there is an exact sequence

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)^G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Proposition 5.29. *When \mathbb{Z}_κ is not trivial, $N_2 = \ell_2(H_G^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)) - \ell_2(H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)^G)$ as in formula 2.b.*

5.3 ENRIQUES SURFACES WITH A $D_{1,6}$ POLARISATION

The Enriques surfaces appearing as quotients of Campedelli surfaces have (in the generic case) six ordinary double points: these surfaces are exactly the Enriques surfaces S containing a D_6 sublattice in $H^{1,1}(S, \mathbb{Z}_-)$. In other words their six nodes can form three even sets, as seen in proposition 5.23.

This allows to determine the generic transcendental part of $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ (section 5.3), which is the orthogonal complement of the D_6 lattice. It is isomorphic to $\mathbb{Z}^2(2) \oplus \mathbb{Z}^4(-1)$ (proposition 5.57).

These Enriques surfaces can be defined as bidouble covers of the plane (proposition 5.33), whose ramification locus consists of three pairs of lines. We will see that a Cremona transformation can map these pairs to another configuration (which is not projectively equivalent in generic cases), defining a birationally equivalent Enriques surface (proposition 5.38).

LINEAR SYSTEMS AND GEOMETRY

Let $D_{1,6}$ be the index 2 sublattice of the standard Lorentzian lattice $\mathbb{Z}^{1,6}$, containing vectors whose sum of coordinates is even. If $\langle e_0; e_1, \dots, e_6 \rangle$ is the canonical basis of $\mathbb{Z}^{1,6}$, we distinguish a norm 4 vector $2e_0$ and six mutually orthogonal (-2) -vectors $e_1 \pm e_2, e_3 \pm e_4, e_5 \pm e_6$.

Definition 5.I. *A $D_{1,6}$ -polarised Enriques surface is an Enriques surface whose Picard group contains a primitively embedded copy of $D_{1,6}$ such that the distinguished vectors described above correspond to 6 smooth rational curves R_i and a nef class H with $H^2 = 4$.*

This is equivalent to the requirement that the R_i 's contain three even sets of rational curves, and $H + \sum R_i$ is divisible by two.

In proposition 5.23, we proved essentially that the quotient of a smooth Campedelli surface by the involution induced by a reflection of the form s_κ is such an Enriques surface: the six nodes are images of the isolated fixed points of s_κ and form three even sets.

In this case, the Enriques surface can be written as the quotient of a complete intersection of three diagonal quadrics in \mathbb{P}^5 by a group $G \simeq (\mathbb{Z}/2)^3$: the linear system H is generated by G -invariants quadratic forms (the various x_i^2).

Proposition 5.30. *On a $D_{1,6}$ -Enriques surface S , the linear system $|H|$ is base point free and induces a map $S \rightarrow \mathbb{P}^2$ of degree 4.*

Proof. According to [C2], since H is nef, $|H|$ has no fixed components (nef divisors with fixed components have self-intersection 2). Moreover $|H|$ has base points if and only if it has the form $2E + F$ (where E and F are half-elliptic pencils with $EF = 1$) or $3E + R$ where R is a smooth rational curve and E is a half-pencil with $ER = 1$ [C2, 2.12].

Following [M3], we note that $E \cdot H = 1$, but

$$E \cdot (H + \sum R_i)$$

is an even integer, so E should intersect one of the R_i 's, let Q be this rational curve.

The case $H = 3E + R$. Then $0 = Q \cdot H = Q \cdot (3E + R)$, hence $Q \cdot R < 0$, hence $Q = R$, but then $0 = H \cdot Q = (3E + R) \cdot R = 1$, yielding a contradiction.

The case $H = 2E + F$. We note that $Q \cdot (2E + F)$ is zero, but since $Q \cdot E > 0$, $Q \cdot F < 0$, which is absurd.

It is also known that $H^1(\mathcal{O}_S(H)) = 0$, see [C2]. □

This proposition is a particular case of the following analogue of [M3, Lemma 5.1]

Proposition 5.31. *Let S be a smooth Enriques surface with ν disjoint rational (-2) -curves R_i , and H a nef divisor with $H^2 > 0$ such that $H \cdot R_i = 0$ and $H + \sum R_i$ is divisible by 2 in $\text{Pic}(S)$.*

Then $|H|$ contracts the curves R_i , and is base point free, except in the special case: $H^2 = 2$ and there is one rational curve such that the others form an even set of nodes. In the special case, the special rational curve is a fixed component of $|H|$, and is not contracted by $|H|$.

Proof. According to [C2], if H has a fixed component or base points, it can be written $kE + F$, where E and F are half-elliptic pencils with $EF = 1$, or $(k + 1)E + R$ where E is a half-pencil, R a rational nodal curve and $ER = 1$. In both cases $H^2 = 2k$, and $HE = 1$. We need to show that we are then precisely in the *special* case.

Since E has an even intersection number with $H + \sum R_i$ (which is divisible by two), and $E \cdot H = 1$, for some Q among the R_i 's, $E \cdot Q > 0$.

Now $Q \cdot H = 0$. In the case $H = (k + 1)E + R$, it follows that $QR < 0$, hence $Q = R$, and $HR = k + 1 + R^2 = 0$, which is a contradiction, except when $k = 1$. If $H = kE + F$, then $HQ = 0$ gives $FQ < 0$, which is also a contradiction.

Thus $k = 1$, and it follows that $2E = H - Q$ is divisible by two, but since $H + \sum R_i$ is also divisible by two, $\sum_{R_i \neq Q} R_i$ is an even set of nodal curves, hence we are in the special case. In other cases, H is base point free and has no fixed component: since $H \cdot R_i = 0$, the curves R_i are contracted by $|H|$.

Conversely, under the hypotheses of the special case, let Q be the distinguished rational curve. Then $H + Q$ and $H - Q$ are divisible by two and effective. Let $H = 2E + Q$. Then $h^0(H) \geq h^0(2E) \geq 2$, and since H is nef and big, $h^0(H) = \chi(H) = 2$, hence Q is a fixed component of H . □

Proposition 5.32. *Let S be a $D_{1,6}$ -polarised Enriques surface, H the distinguished positive class in $D_{1,6}$. Then $S \rightarrow |H|^\vee$ is a surjective morphism of degree 4, contracting the 6 rational curves and ramified over six lines.*

Proof. As before, H is base point free, has no fixed components, and $H \cdot R_i = 0$ so $|H|$ contracts all curves R_i . Consider the three elliptic pencils $2E_1 = H - R_1 - R_2$, $2E_2 = H - R_3 - R_4$, $2E_3 = H - R_5 - R_6$ (by construction they are 2-divisible). They have a natural interpretation as linear subsystems of $|H|$, so they are pulled back from pencils of lines in $|H|^\vee$.

The corresponding half-pencils map to six lines in the plane. Each of them is part of the ramification locus, since pulling back one of these lines gives a multiplicity 2 divisor.

Now note that $K_S = K_{\mathbb{P}^2} + R$ (the formula is both valid for S and the nodal surface obtained by contracting the R_i 's) where R is the ramification locus of $S \rightarrow \mathbb{P}^2$. Then $R \equiv 3H + K_S$ (since $K_{\mathbb{P}^2} \equiv -3H$), and the definition of the pencils implies

$$R \equiv \sum_{i=1,2,3} E_i + (E_i + K_S) + \sum_{i=1}^6 R_i.$$

Since R is an effective divisor containing all half-pencils as well as the R_i 's, the linear equivalence above is an equality. \square

In the proof above, we see that $E_1 \cdot R_1 = E_1 \cdot R_2 = 1$: this indicates that the image point of R_1 and R_2 is actually the base point of the elliptic pencil $|2E_1|$, which is the intersection of the images of E_1 and $E'_1 = E_1 + K_S$ in the plane.

Proposition 5.33. *The above morphism is a Galois cover with Galois group $(\mathbb{Z}/2)^2$.*

If X is a Campedelli surface, with an involution s_κ , the Galois cover $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ given by the bicanonical map (proposition 5.5) factors through the quotient S_κ , and the Galois group of the cover $S_\kappa \rightarrow \mathbb{P}^2$ is identified with the order 4 group $\Gamma/\langle G, s_\kappa \rangle$.

Proof of proposition 5.33. Let E_i ($i = 1, 2, 3$) be the three half-pencils as above, and consider the divisor $M_i = E_j + E_k$, where $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$

Then M_1 is a genus two linear system, and by [C1, 6.1] we know that $|2M_1|$ defines a degree two morphism onto a degree 4 del Pezzo surface. Let s_1 be the associated involution. Note that $|H|$ is a linear subsystem of $|2M_1|$ by the map $D \mapsto D + L_{23}$ where L_{23} is the unique element of $|H - R_3 - R_4 - R_5 - R_6|$. Hence $X \rightarrow |H|^\vee$ is s_1 -equivariant.

Such involutions determine the divisor class $|2M_i|$ as the ramification divisor of $X \rightarrow X/s_i$.

Hence s_i ($i = 1, 2, 3$) are distinct involutions, and since $X \rightarrow |H|^\vee$ has degree four, the group $\langle 1, s_1, s_2, s_3 \rangle$ is exactly the Galois group. \square

A Galois cover as above is called a *bidouble* cover: it is a special case of abelian covers which are studied in [P]. Such a cover has three involutions: for each of them, we consider the image of the (divisorial part of the) fixed locus in the base variety (here \mathbb{P}^2). Write f, g, h for sections of line bundles defining them. By Galois theory, fgh can be written as a square s^2 , where s is a section of some line bundle.

Then the bidouble cover can be defined by equations of the form

$$u^2 = f \quad v^2 = g \quad w^2 = h \quad uvw = s$$

(changing signs of u, v, w gives the other component $uvw = -s$). In the case of $D_{1,6}$ -Enriques surfaces, the divisors of f, g, h are $e_i + e'_i + e_j + e'_j$ (denoting by e_i the image of E_i in the plane). This point of view highlights the fact that the data of three pairs of lines in the planes (e_i, e'_i) ($i = 1, 2, 3$) determines uniquely a surface which is generically the blow-down of six rational curves on an Enriques surface.

AN INVOLUTION OF THE MODULI SPACE

Consider a $D_{1,6}$ -polarised Enriques surface S : we will now choose more symmetric notations. The six rational curves are denoted by R_i^+ and R_i^- , the six half-pencils E_i^+ and E_i^- , such that $2E_i^+ = 2E_i^- = H - R_i^+ - R_i^-$. The linear system $|H|$ determined a finite Galois cover $S_r \rightarrow \mathbb{P}^2$, where S_r is obtained from S by contracting the (-2) -curves R_i^\pm .

Assume that S is given by three pairs of lines in general position, whose vertices are denoted by a_i (which are the images of the double points of S).

Let \mathcal{P} be the blowup of the three vertices: the pencil of lines through a_i corresponds to a linear system $|e_i|$ on \mathcal{P} such that $e_i^2 = 0$, and $e_i e_j = 1$ if $i \neq j$. The proper transforms of the three pairs of lines define pairs of divisors e_i^\pm in each $|e_i|$.

Let S' be the (well-defined) bidouble cover of \mathcal{P} ramified over the three pairs (e_i^\pm) . The linear system e_i pulls back to the elliptic pencil $|2E_i|$. Note that \mathcal{P} has 6 (-1) -curves, given by the a_i and ℓ_i (proper transform of the line $a_j a_k$). The inverse image of a_i in S' is made of two disjoint curves since a_i is disjoint from e_j^\pm and e_k^\pm ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$): it is actually the union of two (-2) -curves. It follows that S and S' are isomorphic, and that the inverse image of a_i is identified with $R_i^+ + R_i^-$.

The curves a_i and ℓ_i play equivalent roles (they can be exchanged by a standard quadratic transformation). The intersection numbers on \mathcal{P} are $a_i \cdot \ell_j = 1$ if $i \neq j$, zero otherwise. Using a similar proof, we show that ℓ_i pull back to two disjoint (-2) -curves Λ_i^\pm : ℓ_i is also disjoint from e_j^\pm and e_k^\pm . If h denotes the linear system of lines on \mathbb{P}^2 and its pull-back to \mathcal{P} , $h = e_i + a_i$ and $h = \ell_i + a_j + a_k$.

The $D_{1,6}$ -polarisation on S can be described by $3H = \sum \Lambda_i^\pm + 2 \sum R_i^\pm$ and the six rational curves R_i^\pm mapping to a_i . Let $h' = e_i + \ell_i = 2h - a_1 - a_2 - a_3$.

Proposition 5.34. *The pull-back H' of h' to S is an effective divisor such that $H'^2 = 4$, and Λ_i^\pm define six disjoint (-2) -curves such that $H' + \sum \Lambda_i^\pm$ is divisible by two. In other words (H', Λ_i^\pm) is another $D_{1,6}$ -polarisation on S .*

Proof. The pullback of h' is $H' = 2E_i + \Lambda_i^+ + \Lambda_i^-$, which is an effective divisor and $(H')^2 = 4$. The formula

$$H' + \sum \Lambda_i^\pm = (3H - H) - \sum R_i^\pm + \sum \Lambda_i^\pm = 2\left(\sum \Lambda_i^\pm + \sum R_i^\pm\right) - (H + \sum R_i^\pm)$$

shows that it is also 2-divisible.

Moreover $H' - \Lambda_i^+ - \Lambda_i^-$ is the pull-back of $h' - \ell_i = e_i$, which is the elliptic pencil $2E_i$. This proves that the lattice generated by H' and the Λ_i^\pm is $D_{1,6}$. \square

Proposition 5.35. *The new $D_{1,6}$ -polarisation defines another configuration of lines which can be obtained from the initial one by performing a Cremona quadratic transformation of the plane, with vertices a_i .* \square

Proposition 5.36. *The nonzero intersection numbers of the R_i 's and Λ_i 's are $R_i^\pm \cdot \Lambda_j^\pm = 1$ for $i \neq j$.* \square

Proposition 5.37. *A $D_{1,6}$ -polarised Enriques surface S defines an embedding of the root lattice $D_6 \subset H^2(S, \mathbb{Z}_-)$, using the classes of the six rational curves R_i^\pm as a standard orthogonal frame.*

Proof. The curves R_i^\pm and Λ_i^\pm define classes in $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ (up to a choice of sign), using their fundamental classes and the fact that \mathbb{Z}_- restricts to a trivial local system on rational curves. Their self-intersection is -2 : this gives an embedding of $\mathbb{Z}^6(-2)$ in $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$, since the R_i^\pm do not intersect.

The intersection numbers show that the classes $[R_1^+], [\Lambda_3^+], [R_2^+], [\Lambda_1^+], [R_3^+]$ (up to a choice of signs) form a D_6 lattice: the associated curves define a dual graph which is the Dynkin diagram of D_6 (this is graph is simply connected, so there actually exists a suitable choice of sign).

By a small deformation, we can assume that the Hodge structure on $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ is generic (using the infinitesimal period map), and that the D_6 lattice is actually the whole $H^{1,1}(S, \mathbb{Z}_-)$. It is then easily checked that $[R_2^+] + [R_2^-] + [R_3^+] + [R_3^-]$ is divisible by 2: it has even pairing with any of the roots mentioned above. \square

Configurations of six lines may be represented by elements of $\text{Gr}(3, 6)$: the coefficients of six equations of lines in \mathbb{P}^2 may be written in the 6 columns of a 3×6 matrix, whose

lines define a three-dimensional subspace of \mathbb{C}^6 if the lines do not pass through a common point. A given point in $\text{Gr}(3, 6)$ defines the configuration only up to a projective transformation. We now prove the following fact:

Proposition 5.38. *There is an explicit biregular involution Q on the Grassmann variety $\text{Gr}(3, 6)$, such that for general $x \in \text{Gr}(3, 6)$, x and $Q(x)$ represent conjugate configurations under the transformation described above: $Q(x)$ is equivalent to the Cremona transform of x with vertices $x_1 \wedge x_2, x_3 \wedge x_4, x_5 \wedge x_6$.*

Proof. Given a configuration of six lines in general position, there exists a choice of basis such that $A_1 = [1 : 0 : 0]$, etc. Let M be a matrix of the configuration given by columns M_1, \dots, M_6 , and N be the matrix whose lines are $M_1 \wedge M_2, M_3 \wedge M_4, M_5 \wedge M_6$ (which are coordinates of the vertices of each pair of lines).

Then N is invertible and

$$NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_{123} & m_{124} & m_{125} & m_{126} \\ m_{341} & m_{342} & 0 & 0 & m_{345} & m_{346} \\ m_{561} & m_{562} & m_{563} & m_{564} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where $m_{ijk} = \det(M_i, M_j, M_k)$.

The quadratic transformation with centres A_i can be described by inverting each of the non-zero coefficients of NM , or equivalently, exchanging nonzero coefficients in each column (up to a dilation on columns).

Let Q be the transformation of $\mathbb{P}^{19} \supset \text{Gr}(3, 6)$ which exchanges the 6 pairs of coordinates as above (e.g. x_{123} and x_{563}) and leaves the others untouched. Then Q is a well-defined involution of $\text{Gr}(3, 6)$, and it acts as specified. \square

The description of the action of Coble's association show that it differs from Q by the transpositions of each pair of columns. In particular if t is an element of the torus T , then $Q(t \cdot x) = t'Q(x)$, where t' is obtained from t'^{-1} by exchanging the pairs of coefficients. It follows Q also acts on the ring of T -invariants of $\text{Gr}(3, 6)$, and descends to an involution of $\text{Gr}(3, 6) // T$.

GIT STABILITY FOR CONFIGURATIONS OF SIX LINES

The moduli space we are interested in is the space of configurations of six lines, which can be described as a GIT quotient $\mathbb{C}^{18} // (GL_3 \times T)$ where T is the diagonal torus in GL_6 and $GL_3 \times T$ acts on $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^6 \simeq \mathbb{C}^{18}$. This space is also $(\mathbb{P}^2)^6 // SL_3$ whose coordinate ring is determined by the \mathfrak{S}_6 -equivariant line bundle $\mathcal{O}(1, \dots, 1)$, or $\text{Gr}(3, 6) // T$ where $\text{Gr}(3, 6)$ is the Grassmannian, with the linear action of T on $\bigwedge^3 \mathbb{C}^6$ (which is the target of the Plücker embedding of the Grassmannian).

Semi-stability and instability can be given the following description: we say a configuration of points in the plane has type ijk with respect to a flag $\mathbb{C}^3 = V_1 \supset V_2 \supset V_3$ of \mathbb{C}^3 iff the associated matrix has i (resp. j, k) columns belonging to the first (resp. second, third) element of the flag (note that $i + j + k = 6$). The type of a configuration can be read on the Schubert cell it belongs to: configurations of type ijk corresponding to a Schubert cell $X_{i,j,i+j+k}$. Stability can be decided from the type, using Seshadri's criterion. In this particular case, the conditions are very explicit:

Proposition 5.39. *Given a flag of \mathbb{C}^3 and a 1-parameter subgroup of SL_3 $t \mapsto (t^a, t^b, t^c)$ where $a > b > c$, a point p of $(\mathbb{P}^2)^6$ is unstable (resp. non stable) w.r.t. (g_t) iff p is described by an element of the Schubert cell $\mathcal{X}_{i,j,i+j+k}$ where $ia + jb + kc < 0$ (resp. ≤ 0).*

Proof. In the Segre embedding, basic coordinates of p are given by the product of coordinates from each points: the given formula is the biggest weight which can be obtained in this way. \square

It is enough to check stability against subgroup whose weights are $(2, -1, -1)$ and $(1, 1, -2)$: we need to check the sign of $2i - (j + k) = 3i - 6$ and $(i + j) - 2k = 6 - 3k$.

Proposition 5.40. *If a configuration has type $0xx$ in some basis, it is unstable.*

In the following we thus only consider configurations having type ijk where $i > 0$. The shape of configurations of given type is here described by interpreting them as configurations of lines, which is more directly related to the shape of corresponding surfaces.

Proposition 5.41. *The unstable types are $1xx$ and $xx3$. The strictly semi-stable types are 231 (4 concurrent lines), 312 (2 identical lines), and 222 .*

The notions of stability, semi-stability and polystability coincide for the GIT quotients $\text{Gr}(3, 6) // T$ and $(\mathbb{P}^2)^6 // SL_3$.

We obtain the following stratification of the Grassmannian:

- unstable 141 (codim. 3): five concurrent lines;
- unstable 213 (codim. 4): three identical lines;
- polystable 222 (codim. 6): three pairs of identical lines, the stabiliser has dimension 2, note there are three possible combinatorial types (AA, BB, CC) , (AA, BC, BC) or (AB, BC, CA) (where A, B, C denote lines from each pair);
- semistable 222 (codim. 3): four concurrent lines, two of them being identical;
- polystable $231=312$ (codim. 4): 2 identical and 4 concurrent; there are two ways, up to permutation, in which they can be arranged (either two lines in the same pairs coincide, or two lines from different pairs coincide), the stabiliser has dimension 1;
- semistable 231 (codim. 2): 4 concurrent lines;
- semistable 312 (codim. 2): 2 identical lines;
- type 321 (codim. 1): only one concurrent triple of lines;
- type 411 (open): lines linearly in general position (intersection of the “big cells”).

The description of the stability locus can be summarised as follows:

Proposition 5.42. *A configuration of lines is stable if and only if it consists of six distinct lines and has at worst triple points.*

THE COHOMOLOGY OF A GENERIC $D_{1,6}$ -ENRIQUES SURFACES

Cohomology lattices of Enriques surfaces

Let S be a generic smooth Enriques surface of type $D_{1,6}$. Traditional presentations of the period map of Enriques surfaces use the anti-invariant cohomology lattice of the double cover $\pi : T \rightarrow S$, which is isomorphic to $H \oplus E_{10}(-2)$. For some uses, it may be more convenient to study the unique non-trivial local system of rank one on S , which we denote by \mathbb{Z}_- . A lattice-theoretic version of this choice was described by Allcock [A1].

Proposition 5.43. *The cohomology groups of \mathbb{Z}_- are $H^0 = 0$, $H^1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and H^2 is torsion-free.*

Proof. From the exact sequence of sheaves

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_- \xrightarrow{\pi^{-1}} \pi_* \mathbb{Z}_T \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{Z}_S \rightarrow 0$$

we deduce

$$0 = H^0(S, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^0(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^1(T, \mathbb{Z}) = 0$$

which gives H^0 and H^1 , since $H^0(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(S, \mathbb{Z})$ is integration on fibres.

Since $H^1(S, \mathbb{Z}) = 0$, the torsion subgroup of $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ maps injectively to the torsion subgroup of $H^2(T, \mathbb{Z})$, which is zero. \square

Proposition 5.44. *The torsion subgroups of $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ and $H^3(S, \mathbb{Z}_-)$ are isomorphic.*

Proof. Since \mathbb{Z}_- is Verdier self-dual, Poincaré-Verdier duality gives a (degenerate) spectral sequence

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}^p(H^{n-q}(S, \mathbb{Z}_-), \mathbb{Z}) \implies H^{p+q}(S, \mathbb{Z}_-)$$

Hence there is a short exact sequence

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H^2(S, \mathbb{Z}_-), \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(S, \mathbb{Z}_-) \rightarrow \text{Hom}(H^1(S, \mathbb{Z}_-), \mathbb{Z}) = 0$$

And similarly

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H^3(S, \mathbb{Z}_-), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}_-) \rightarrow \text{Hom}(H^2(S, \mathbb{Z}_-), \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

\square

Proposition 5.45. *The lattice $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ is odd and unimodular, with signature $(2, 10)$.*

Proof. The parity of the lattice follows from Wu's formula: the Steenrod square Sq^2 coincides with the cup product with the second Stiefel-Whitney class of S . But the class $w_2(S)$ can be seen as the reduction mod 2 of $c_1(S) \in H^2(S, \mathbb{Z})$, which is nonzero. Since the reduction map $H^2(S, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}/2)$ is surjective ($H^3(\mathbb{Z}_-) = 0$), the intersection form is odd.

Unimodularity follows from Poincaré duality. Additionally, $H^2(S, \mathbb{R})$ and $H^2(S, \mathbb{R}_-)$ have the same signature, either by using index formula, or by identifying $H^2(S, \mathbb{R}_-)$ with the anti-invariant subspace of $H^2(T, \mathbb{R})$, and resorting to standard calculations [BHPvdV]. \square

Proposition 5.46. *Let $H^2(T, \mathbb{Z})_-$ be the sublattice of vectors in $H^2(T, \mathbb{Z})$ which are anti-invariant under the involutive deck transformation of $T \rightarrow S$. The pull-back map from the lattice $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ to $H^2(T, \mathbb{Z})_-(1/2)$ is an isometric embedding of index 2.*

Proof. This is either deduced from our computations in section 5.2, or from the unimodularity of $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ and the fact that $H^2(T)_-(1/2)$ is isometric to $H(1/2) \oplus E_{10}(-1)$ [BHPvdV] which has discriminant $1/4$. \square

There is actually a unique odd unimodular sublattice of $H(1/2) \oplus E_{10}(-1)$, as shown by Allcock in [A1].

Theorem 5.47 (Allcock). *There is a unique odd unimodular sublattice of $H^2(T)_-(1/2)$. The dual of $H^2(T)_-(1/2)$ is characterised as the lattice of even vectors in this unimodular lattice.*

Proof. Let L be the lattice $H(1/2) \oplus E_{10}(-1)$ and $L^\vee = H(2) \oplus E_{10}(-1)$ be the dual lattice. If M is a unimodular sublattice of L , then $L^\vee \subset M^\vee = M \subset L$.

Note that $L/L^\vee = H(1/2)/H(2)$, which is isomorphic to $(\mathbb{Z}/2)^2$. The quadratic form on L/L^\vee is well defined mod 2, and takes values 0, 0, 1, on the three nonzero vectors. So among the three integral lattices between L and L^\vee , there is only one which is odd. \square

The orthogonal complement of the polarising lattice

We are interested in the embedding $D_6 \hookrightarrow \mathbb{Z}^{2,10}$ which represents the type (1, 1) part of the lattice $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ for a generic $D_{1,6}$ -Enriques surface S . Its orthogonal complement (the “transcendental part”) will be denoted by L . Note that $D_6 \subset H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ is primitive, since its pull-back to $H^2(T, \mathbb{Z}_-)$ is also primitive.

First note that the dual of $D_6 \subset \mathbb{Z}^6$ (the embedding being the standard embedding of D_6 as the even sublattice of \mathbb{Z}^6) is the lattice generated by \mathbb{Z}^6 and $(1/2, \dots, 1/2)$. The discriminant group of D_6 is then generated by a basis vector of \mathbb{Z}^6 and the half-integer vector. The matrix of the associated bilinear form $b : \text{Sym}^2(D_6^*/D_6) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ is

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

The quadratic form takes the basis vector to 1 (mod 2), the half-integer vector to $-1/2$ (mod 2) and their sum to $-1/2$.

The following proposition is classical:

Proposition 5.48. *Let M be a primitive sublattice of a unimodular lattice L . The inclusions $M \oplus M^\perp \subset L \subset M^* \oplus (M^\perp)^*$ define maps $L \rightarrow M^*/M$ and $L \rightarrow (M^\perp)^*/M^\perp$ which induce a bijective correspondence between the discriminant groups.*

This correspondence is an isometry for the associated bilinear forms $-b_M$ and b_{M^\perp} with values in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . If all lattices involved are even, it is also an isometry for the quadratic forms $-q_M$ and q_{M^\perp} , with values in $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$.

Conversely, given such an isometry of bilinear forms, the pull back of the graph along the map $(M \oplus M^\perp)^ \rightarrow D_M \oplus D_{M^\perp}$ defines a unimodular lattice.*

Proposition 5.49. *The orthogonal complement of $D_6(-1)$ in $\mathbb{Z}^{2,10}$ is a lattice L of signature (2, 4) and discriminant 4. Its discriminant bilinear form has matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.*

Lemma 5.50. *The lattice L is isomorphic to an index two sublattice of $\mathbb{Z}^{2,4}$.*

Proof. The values of the discriminant bilinear form show that there is a lattice between L and L^* which is integral. Since it must be unimodular, it is isomorphic to $\mathbb{Z}^{2,4}$. \square

Note that any sublattice of index two in $\mathbb{Z}^{2,4}$ has the form $\mathbb{Z}^{p,q} \oplus D_{r,s}$ where $D_{r,s}$ is the lattice of vectors in $\mathbb{Z}^{r,s}$ whose coordinates have an even sum: such a sublattice is necessarily obtained as the kernel of a group homomorphism $\mathbb{Z}^{2,4} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, which is the set of vectors whose sum of specified coordinates is even. The discriminant of $D_{r,s}$ is 4.

Lemma 5.51. *A sublattice $\mathbb{Z}^{p,q} \oplus D_{r,s}$ of $\mathbb{Z}^{2,4}$ has a 2-torsion discriminant group if and only if $r + s$ is even. The index 2 sublattices of $\mathbb{Z}^{2,4}$ with 2-torsion discriminant group are*

$$\begin{aligned} D_{2,4} &\simeq H \oplus H \oplus \mathbb{Z}^2(-2) \\ D_{0,4} \oplus \mathbb{Z}^2 &\simeq H(2) \oplus \mathbb{Z}^{1,3} \\ D_{2,2} \oplus \mathbb{Z}^{0,2} &\simeq H(2) \oplus H \oplus \mathbb{Z}^2(-1) \\ D_{2,0} \oplus \mathbb{Z}^{0,4} &\simeq \mathbb{Z}^2(2) \oplus \mathbb{Z}^4(-1) \\ D_{0,2} \oplus \mathbb{Z}^{2,2} &\simeq \mathbb{Z}^{2,2} \oplus \mathbb{Z}^2(-2) \\ D_{1,3} \oplus \mathbb{Z}^{1,1} &\simeq H \oplus \mathbb{Z}^2(-2) \oplus \mathbb{Z}^{1,1} \\ D_{1,1} \oplus \mathbb{Z}^{1,3} &\simeq H(2) \oplus \mathbb{Z}^{1,3} \end{aligned}$$

A basis for $H \subset D_{1,3}$ is given by $(1; 1, 0, 0)$ and $(1; 0, 1, 0)$. A basis for $\mathbb{Z}^{0,3}$ in $\mathbb{Z} \oplus D_4(-1)$ is given by $(1; 1, 1, 0, 0)$, $(1; 0, 1, 1, 0)$, $(1; 0, 0, 1, 1)$. Note that

$$D_{2,2} \oplus \mathbb{Z}^{0,2} \simeq D_{1,1} \oplus \mathbb{Z}^{1,3} \simeq D_{0,4} \oplus \mathbb{Z}^{2,0}$$

and $D_{2,0} \oplus \mathbb{Z}^{0,4} \simeq D_{1,3} \oplus \mathbb{Z}^{1,1} \simeq D_{0,2} \oplus \mathbb{Z}^{2,2}$.

Lemma 5.52. *The discriminant bilinear forms of D_6 and $D_{r,s}$ coincide if and only if $r - s \equiv 6 \pmod{4}$. This rules out $(r, s) = (2, 2)$ and $(r, s) = (1, 1)$ and $(r, s) = (0, 4)$.*

Lemma 5.53. *The discriminant quadratic forms, with values in $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$, of D_6 and $D_{2,4}$ coincide. In particular, any unimodular lattice containing orthogonal primitive copies of $-D_6$ and $D_{2,4}$ should be even.*

Proof. Any isomorphism between the discriminant groups which is an isometry between the bilinear forms is automatically an isometry for the quadratic forms whenever they coincide. \square

There is only one case left.

Theorem 5.54. *The lattice L is isomorphic to $D_{2,0} \oplus \mathbb{Z}^{0,4} \simeq D_{1,3} \oplus \mathbb{Z}^{1,1} \simeq D_{0,2} \oplus \mathbb{Z}^{2,2}$.* \square

Corollary 5.55. *All primitive embeddings $D_6(-1) \subset \mathbb{Z}^{2,10}$ are conjugate.*

Any primitive embedding $D_6(-1) \subset \mathbb{Z}^{2,10}$ can be factored as $D_6(-1) \rightarrow \mathbb{Z}^{2,6} \rightarrow \mathbb{Z}^{2,6} \oplus \mathbb{Z}^{0,4}$ or $D_6(-1) \rightarrow E_8(-1) \rightarrow \mathbb{Z}^{2,2} \oplus E_8(-1)$.

Proof. For any primitive embedding $D_6(-1) \subset \mathbb{Z}^{2,10}$, D_\perp contains a copy of $\mathbb{Z}^{0,4}$, hence the image of $D_6(-1)$ is contained in the orthogonal complement of $\mathbb{Z}^{0,4}$, which is isomorphic to $\mathbb{Z}^{2,6}$. Similarly, $D_6(-1)$ and $D_{0,2}$ should span a copy of $E_8(-1)$.

The fact that all primitive embeddings are conjugate follows from the construction of the unimodular lattice: suppose we are given two sublattices of the form $D_6(-1) \oplus D_\perp$ inside $\mathbb{Z}^{2,10}$, and an isomorphism between the copies of $D_6(-1)$. Then there is a choice of isomorphism between the copies of D_\perp which is compatible with the correspondences between discriminant groups induced by $\mathbb{Z}^{2,10}$: it thus extends to an automorphism of $\mathbb{Z}^{2,10}$. \square

A particular embedding of $D_6(-1)$ in $\mathbb{Z}^{2,10}$ is given by the embedding of Dynkin diagrams between D_6 and E_8 , and the fact that $\mathbb{Z}^{2,10} \simeq \mathbb{Z}^{2,2} \oplus E_8(-1)$.

The Torelli property of Enriques surfaces can be propagated to a smaller lattice provided that it embeds uniquely in the standard Enriques lattice and any automorphism of L extends to $\mathbb{Z}^{2,10}$.

Corollary 5.56. *Two $D_{1,6}$ -Enriques surfaces are isomorphic if and only if their periods with values in L are equivalent.*

Proposition 5.57. *The generic transcendental lattice of a $D_{1,6}$ -Enriques surface, in the Hodge structure $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$, is isomorphic to the lattice $\mathbb{Z}^2(2) \oplus \mathbb{Z}^4(-1)$.*

Bijektivité de l'application de périodes

6.1 THE PERIOD MAP

In this section we study the period map of $D_{1,6}$ -polarised Enriques surfaces, which are parametrised by the space of line configurations in the plane: we have seen in section 5.3 how three pairs of lines gave rise to an Enriques surface as a bidouble cover of the plane.

The period map behaves well on the stable locus of the parameter space (which can be identified with $\mathbb{C}^{3 \times 6}$): since extra singularities appear when configurations of lines acquire triple points, the discriminant locus consists of the vanishing locus of Plücker coordinates (which map $\mathbb{C}^{3 \times 6}$ to the Grassmann variety $\text{Gr}(3, 6) \subset \mathbb{P}^{19}$). This is a divisor with normal crossings (proposition 6.5), and the finite cover obtained by adding square roots to these coordinates produces a local uniformisation for the period map, with values in the space $\mathcal{X}_L = \mathcal{D}(L)/\mathcal{O}(L)$.

The goal is to actually prove that denoting by \mathcal{M}_{GIT} the quotient $\text{Gr}(3, 6) // T$ (where the stable locus parametrises configurations having at worst triple points), the quotient $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s / (W_3 \times \langle Q \rangle)$ (where W_3 is the wreath product $\mathbb{Z}/2 \wr \mathfrak{S}_3$ and Q is the Cremona transformation of proposition 5.38) is actually isomorphic to \mathcal{X}_L via the period map. Theorem 6.14 states that a suitably chosen point has only one preimage, and that the period map is a local isomorphism around it (using section 5.1).

A criterion of Looijenga and Swierstra, described in section 6.1, can be used to prove that the complement of $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s$ in \mathcal{M}_{GIT} is mapped to the complement of \mathcal{X}_L in $\mathcal{X}_L^{\text{BB}}$, i.e. that the map $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s \rightarrow \mathcal{X}_L$ is proper, and the previous remark shows that it has degree one. It suffices to note that this map has finite fibres (since fibres correspond to a set of [almost] polarisations on some K3 surface), to obtain the required isomorphism.

The extension to the compactified moduli spaces follows from a Hartogs-type argument. However, we give an explicit calculation in section 6.1, which details the geometry of the singularities in the neighbourhood of one of the boundary strata.

THE PERIOD MAPPING AND ITS EXTENSION TO THE STABLE LOCUS

Let S be a $D_{1,6}$ -polarised Enriques surface. Then $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ contains a distinguished D_6 sublattice as previously explained, and the line of (twisted) 2-forms $\mathbb{C}\omega$ lies in the complex vector space spanned by the orthogonal complement of the distinguished sublattice. If φ is a choice of isometry between $D_6^\perp \subset H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ and L , (S, φ) determines a point in $\mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C})$ which is the image of the line $\mathbb{C}\omega$. Let q be the quadratic form on L : for example, we can choose integral coordinates $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4)$ such that

$$q = 2x_1^2 + 2x_2^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2.$$

The associated symmetric bilinear form is denoted by $q(a, b)$.

Since $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ is a polarised Hodge structure, a representative ω must satisfy $q(\omega) = 0$ and $q(\omega, \bar{\omega}) > 0$. The *period point* of (S, φ) is the element $[\omega]$ of the Hermitian symmetric domain associated to the lattice L computed above:

$$\mathcal{D}_L = \{[\omega] \in \mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C}) \text{ such that } \langle \omega, \bar{\omega} \rangle > 0 \text{ and } \langle \omega, \omega \rangle = 0\}$$

The period domain \mathcal{D}_L contains two connected components: the equations of \mathcal{D}_L induce the constraints

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + 2x_2^2 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \\ 2|x_1|^2 + 2|x_2|^2 &> |y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2 + |y_4|^2 \end{aligned}$$

which imply, for example, that $|x_1^2 + x_2^2| < |x_1|^2 + |x_2|^2$. It follows that a point of \mathcal{D}_L with coordinates $(x_i; y_j)$ cannot be such that x_1/x_2 is real. The connected components of \mathcal{D}_L are distinguished by the sign of $\Im(x_2/x_1)$.

The correspondence between Enriques surfaces with a $D_{1,6}$ polarisation and their period points is holomorphic.

Theorem 6.1 (Griffiths [V2, chapitre 10]). *Let $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}$ be a holomorphic family of $D_{1,6}$ -polarised Enriques surfaces, parametrised by a base \mathcal{B} , equipped with a continuous family of isomorphisms $\varphi(b)$ between the orthogonal complement of the D_6 sublattice of $H^2(S_b, \mathbb{Z}_-)$ and L .*

Then the map $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}_L$ mapping a point b to the period point of $(S_b, \varphi(b))$ is holomorphic.

Let $\Gamma = O(L)$ and $\mathcal{X}_L = \mathcal{D}_L/\Gamma$: note that elements of Γ can exchange the connected components of \mathcal{D}_L . Our goal is to define a period map from the stable locus $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s$ to \mathcal{X}_L , and then to extend it to a morphism from the full GIT quotient \mathcal{M}_{GIT} to the Baily-Borel compactification $\mathcal{X}_L^{\text{BB}}$ of \mathcal{X}_L .

Let \mathcal{U}^{sm} and \mathcal{U}^s be the open subsets in \mathbb{C}^{18} parametrising configurations of lines without triple points (resp. with at worst triple points).

Proposition 6.2. *There is a well-defined holomorphic map $\mathcal{U}^{\text{sm}} \rightarrow \mathcal{X}_L$, which is locally liftable to \mathcal{D}_L . The automorphic line bundle over \mathcal{X}_L lifts to the linearised line bundle $\mathcal{O}(3)$ on $\mathbb{P}(\mathcal{U}^{\text{sm}})$.*

Proof. Let $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}^{\text{sm}}$ be the family of K3 surfaces with double points, defined in \mathbb{P}^5 by the equations $u^2 = f_t(x, y, z)$, $v^2 = g_t(x, y, z)$ and $w^2 = h_t(x, y, z)$, where f_t, g_t, h_t are products of two linear forms, depending on the parameter $t \in \mathcal{U}^{\text{sm}}$. There is an associated family $\tilde{\mathcal{T}}$ of smooth K3 surfaces over \mathcal{U}^{sm} : it is obtained as the corresponding cover of \mathcal{P} (a family of rational surfaces such that \mathcal{P}_t is the plane blown up at the vertices of f_t, g_t , and h_t).

Let dF, dG, dH be the differentials of these equations, which can be naturally interpreted as elements of $H^0(T_t, N_{T_t/\mathbb{P}^5}^*(2))$, and τ be a fixed section of $(\det T^{\mathbb{P}^5})(-6)$ on \mathbb{P}^5 (which is unique up to a scalar).

Then the pairing of τ with $dF \wedge dG \wedge dH$ is a well-defined, nowhere degenerate bivector field w (section of the dual of $\Omega_{T_t}^2$) over the regular part of T_t , which defines a symplectic form $\omega = w^{-1}$ on \tilde{T}_t .

Since $\tilde{\mathcal{T}}$ is a locally trivial fibration, there is on the universal cover of \mathcal{U}^{sm} a uniform choice of basis of twisted homology classes γ_i ($i = 1 \dots 6$), giving a period map from the universal cover of \mathcal{U}^{sm} to \mathcal{D}_L . This gives local lifts for the quotient map:

$$\mathcal{U}^{\text{sm}} = \frac{\widetilde{\mathcal{U}^{\text{sm}}}}{\pi_1(\mathcal{U}^{\text{sm}})} \rightarrow \frac{\mathcal{D}_L}{\Gamma} = \mathcal{X}_L$$

Let T_{ks} be the K3 surface obtained from a surface T_s by multiplying the matrix s of linear forms by k . An isomorphism $m_k : T_s \rightarrow T_{ks}$ is obtained by multiplying u, v , and w , by k . The differential forms transform as $(m_k)^*(dFdGdH)_{ks} = k^6(dFdGdH)_s$, and τ pulls

back as $(m_k^{-1})_* \tau = k^{-3} \tau$. It results that $w_{k_s} = k^3 w_s$ under the identification $m_k : T_s \simeq T_{k_s}$ and that the periods of T_{k_s} are k^{-3} times the periods of T_s . This proves that the automorphic line bundle pulls back as $\mathcal{O}(3)$ on $\mathbb{P}(\mathcal{U}^{\text{sm}})$. \square

The period map is of course equivariant under action of GL_3 and T . Note that the 2-form ω defined above can be written with the simpler formula:

$$\omega = \frac{zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx}{uvw}$$

since $\omega dF dG dH$ is a multiple of the standard 5-form on \mathbb{P}^5 with values in $\mathcal{O}(6)$ (replace dF by udu , etc.).

Proposition 6.3. *The period map from the universal cover of \mathcal{U}^{sm} to \mathcal{D}_L is submersive. Consequently, the map $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^{\text{sm}} \rightarrow \mathcal{X}_L$ can be locally lifted to an étale map with target \mathcal{D}_L .*

Proof. Since the two spaces have the same dimension, it is enough to prove that it is a submersion. But if \mathcal{V}^{sm} is the subspace of $\mathbb{C}^{4 \times 7}$ which parametrises smooth Campedelli surfaces, the forgetful map $\mathcal{V}^{\text{sm}} \rightarrow \mathcal{U}^{\text{sm}}$ is itself submersive.

Since the local period map $\mathcal{V}^{\text{sm}} \rightarrow \mathcal{D}_L$ is submersive (section 5.1), the result follows. \square

We are going to use the following theorem of Borel

Theorem 6.4 (Borel [B, Thm. A]). *Let U be a polydisc in \mathbb{C}^n , and U^* the complement of a standard normal crossing divisor in U . Let \mathcal{D} be a bounded symmetric domain, Γ an arithmetic subgroup of the associated group \mathcal{G} , and let $X = \mathcal{D}/\Gamma$.*

Suppose we are given a holomorphic map $f : U^ \rightarrow X$. Then if f is locally liftable to \mathcal{D} , then f extends to a holomorphic map $U \rightarrow X^{\text{BB}}$ where X^{BB} is the Baily-Borel compactification of X .*

The extension to the whole stable locus can be carried out using this theorem and the following property:

Proposition 6.5. *The complement of $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^{\text{sm}}$ in $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s$ is made of coordinate hyperplane sections, with normal crossings.*

The geometry of the variety \mathcal{M}_{GIT} is very well known and studied thoroughly, for example in [MSY] in a similar context. We nevertheless provide a proof for the needed properties. Note the statement here concerns configurations of six ordered lines.

Proof. First observe that a stable configuration of six lines, having at worst standard triple points, can have at most four such points (proposition 5.42). Indeed, a given line cannot go through three triple points, hence five triple points would involve at least 8 lines. If there are four triple points, then *any* line goes through two of them. The graph having triple points as vertices and lines as edges is made of four vertices of valence three, which is only possible if it is a complete graph. This means that the combinatorics of the corresponding arrangement of lines (up to permutation in \mathfrak{S}_6) are fully determined (they form a complete quadrangle).

Then note that a stable configuration of lines always contains four lines which constitute a projective frame. If this were not the case, the 15 sets of four lines would contribute 5 triplets of concurrent lines (because each triplet is part of at most 3 sets of four lines), which is impossible by the previous remark.

Again up to a permutation, we can assume the stable configuration is described by a matrix of the form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 1 & e & f \end{pmatrix}$$

- For one triple point, we can assume that the vanishing minor is $m_{125} = e$, since a projective frame can be made out of every 4-tuple of non concurring lines. Neither a nor b can vanish, hence can be set to 1. The local structure of \mathcal{M}_{GIT} around this point is then described by the “étale slice”, and the locus of triple points is a smooth divisor $e = 0$.

In the case of two triple points, choosing two lines from each triple makes a projective frame: the vanishing minors are

- either $m_{125} = m_{346} = e = b - d = 0$; then a and b cannot vanish again, hence we set them to 1, the locus of triple points is the union of $e = 0, d = 1$ which meet transversely;
- either $m_{125} = m_{345} = e = a - c = 0$; then a and f cannot both vanish, the locus of triple points is a union of $e = 0, c = 1$.

- In the case of three triple points, two triples have a common line, say 125 and 345, up to permutation the third can be chosen to be 136. The corresponding equations are $e = a - c = d = 0$. Again a and b cannot vanish, hence can be chosen to be 1, and in the étale slice, the locus of triple points is defined by $ed(c - 1) = 0$, around $e = d = c - 1 = 0$.

- In the case of four triple points, as before we can assume that two triples are 125 and 345, then the others can be chosen to be 136 and 246, corresponding to the vanishing of $e, d, b - f$ and $a - c$. As before a, b can be chosen to be 1, and the locus of triple points is then the union of $e = 0, d = 0, c = 1, f = 1$ which is again a normal crossing divisor. \square

Triple points in the configuration of lines correspond to the appearance of rational double points in the K3 surfaces T_i : each triple point creates a local monodromy of order two. These local monodromies are eliminated by the following process: let $\widetilde{\mathcal{U}}^s = \text{sq}^{-1}(\mathcal{U}^s)$ be the finite cover obtained as the inverse image under the morphism $\text{sq} : \mathbb{P}^{19} \rightarrow \mathbb{P}^{19}$ which takes each Plücker coordinate to its square. By the previous proposition, $\widetilde{\mathcal{U}}^s$ is the smooth locally closed subscheme of \mathbb{P}^{19} , and the action of the diagonal torus T admits a lift to $\widetilde{\mathcal{U}}^s$ (and actually also to the inverse image of the Grassmannian, which is a singular variety).

Proposition 6.6. *Let $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GIT}}^s$ be the GIT quotient $\widetilde{\mathcal{U}}^s // T$, which is a Galois cover of $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s$. Then the period map $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GIT}}^s \rightarrow \mathcal{X}_L$ has local lifts to \mathcal{D}_L .*

Proof. Using the previous remark and the calculation carried in section 5.1, the finite cover $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GIT}}^s \rightarrow \mathcal{M}_{\text{GIT}}^s$ trivialises the monodromy: the period map extends regularly and has local lifts to \mathcal{D}_L . \square

LOCAL STRUCTURE AROUND THE ONE-DIMENSIONAL χ STRATUM

Consider a polystable configuration in the one-dimensional stratum of \mathcal{M}_{GIT} . It is made of four concurrent lines (whose cross-ratio is denoted by t), and two identical lines. We focus on the χ case, where the identical lines belong to the same pair. Up to some permutation, we can assume that the configuration is given by the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

with $t \neq 0$. Its stabiliser has dimension 1, it acts by multiplying lines by $(\lambda^{-1}, \lambda^{-1}, \lambda^2)$ and columns by $(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, \lambda^{-2}, \lambda^{-2})$.

An “étale slice” of \mathcal{M}_{GIT} around this configuration given by the five parameter family:

$$N(t, a, b, c, d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 & t & 0 & d \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

where \mathbb{G}_m acts by $\lambda \cdot (t, a, b, c, d) \mapsto (t, \lambda^3 a, \lambda^3 b, \lambda^{-3} c, \lambda^{-3} d)$ on the parameters (this action is equivalent to the action on lines and columns above). The étale slice itself is the quotient $\mathbb{C}\langle t, a, b, c, d \rangle // \mathbb{G}_m$ whose coordinate ring is $\mathbb{C}[t, ac, ad, bc, bd]$ (a cylinder over the quadratic cone with equation $(ac)(bd) = (ad)(bc)$).

Also recall that for a generic configuration γ , the quadratic transformation associated to the vertices of the three pairs of lines defines a new configuration $Q(\gamma)$ with isomorphic associated Enriques surface. Then Q defines a biregular involution of \mathcal{M}_{GIT} , commuting with the action of $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathfrak{S}_3)$.

Proposition 6.7. *Q lifts to a biregular involution of the étale slice mentioned above, given by the composite of $(a, b) \leftrightarrow (c, d)$ and reversing the order of the four first columns. Therefore the period map is invariant under exchange of (a, b) and (c, d) .*

Proof. Recall that Q can be defined as follows on matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_2 & d_2 & a_3 & b_3 \\ c_1 & d_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Given a configuration with matrix:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 & t & 0 & d \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

its three vertices are given by the columns of the matrix

$$M = \begin{pmatrix} b - at & -d & 0 \\ a - b & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and the associated matrix in this new basis is

$$M^T N = \begin{pmatrix} b - at & a - b & 0 & 0 & t - 1 & bc + ad - bd - act + t - 1 \\ -d & c & c - d & ct - d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(write $f(a, b, c, d) = bc + ad - bd - act + t - 1 = f(c, d, a, b)$). The transformed configuration $Q(M^T N)$ has matrix

$$\begin{pmatrix} -d & c & 0 & 0 & 1 & 1 \\ b - at & a - b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c - d & ct - d & t - 1 & f(a, b, c, d) \end{pmatrix} \\ \equiv \begin{pmatrix} ct - d & c - d & 0 & 0 & t - 1 & f(c, d, a, b) \\ b & a & a - b & b - at & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(the second matrix is obtained by reversing the first four columns as well as the lines). Now applying the substitution

$$(a, b, c, d) \mapsto (c, d, a, b)$$

gives back (up to changes of signs in columns) the matrix $M^T N$. \square

Note that the lift to the étale slice is equivariant under the action of \mathbb{C}^\times . It is useful to define a similar étale slice for the ramified cover $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GIT}}$: for this we need to formally add square roots to all minors of $N(t, a, b, c, d)$.

If a, b, c, d are in a small neighbourhood of zero, and t lies in a small disc U avoiding 0 and 1, then the only minors of the configuration matrix which possibly vanish involve two columns from the first four and one of the last two. More explicitly: three lines become concurrent when either $a, b, a - b, at - b, c, d, c - d, ct - d$ vanishes.

Let $\mathcal{E}_i = (E_t)$ be two identical families of cones of elliptic curves with equation $u_i^2 = x_i^2 - y_i^2, v_i^2 = tx_i^2 - y_i^2$. Then $\mathcal{E}_1 \times_U \mathcal{E}_2$ maps to a ramified cover of \mathbb{C}^5 (with coordinates $t \in U, a, b, c, d$):

$$a = x_1^2 \quad b = y_1^2 \quad c = x_2^2 \quad d = y_2^2$$

Each \mathcal{E}_i is equipped with an action of \mathbb{G}_m , $(u_i, v_i, x_i, y_i) \mapsto (\lambda u_i, \lambda v_i, \lambda x_i, \lambda y_i)$.

Proposition 6.8. *The action of \mathbb{G}_m on the affine space lifts to the action of \mathbb{G}_m on $\mathcal{E}_1 \times_U \mathcal{E}_2$ with weights $(6, -6)$, and $\mathcal{E}_1 \times_U \mathcal{E}_2 // \mathbb{G}_m$ is a local model for $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GIT}}$.*

The boundary period map

To study the behaviour the period map, we will not work on \mathcal{M}_{GIT} itself, but on the étale slice of $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GIT}}$ defined earlier. We denote by Z_i the central curve of \mathcal{E}_i (defined by $u_i = v_i = x_i = y_i = 0$), and by $\widetilde{\mathcal{E}}_i$ the blow-up of \mathcal{E}_i along Z_i .

We already know that a period map is well-defined and locally liftable over $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GIT}}^s$:

Proposition 6.9. *The period map from $\mathcal{E}_1 \times_U \mathcal{E}_2$ to \mathcal{X}_L is well-defined and locally liftable to \mathcal{D}_L outside of $Z_1 \times \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_1 \times Z_2$. \square*

This observation is compatible with a classical description: if Γ is a neat arithmetic subgroup of $O(L)$, \mathcal{D}_L/Γ locally looks like a family over a disc U of cones over a product of elliptic curves, near a point of a 1-dim. boundary component.

Proposition 6.10. *The period map with source domain $\widetilde{\mathcal{E}}_1 \times_U \widetilde{\mathcal{E}}_2$ is defined on the complement of a normal crossing divisor, which is the union of $\widetilde{Z}_1 \times \widetilde{\mathcal{E}}_2$ and $\widetilde{\mathcal{E}}_2 \times \widetilde{Z}_2$ (here \widetilde{Z}_i is the exceptional divisor in $\widetilde{\mathcal{E}}_i$).*

By Borel's extension theorem, the period map has a unique extension to this desingularisation, which takes values in the Baily-Borel compactification $\mathcal{X}_L^{\text{BB}}$.

We now want to prove that for a fixed t , the exceptional divisor is contracted to a point in $\mathcal{X}_L^{\text{BB}}$, which would prove that in some small neighbourhood of the semistable point, the period map $\mathcal{M}_{\text{GIT}} \rightarrow \mathcal{X}_L^{\text{BB}}$ is well-defined. Since Q lifts to the ramified cover, and exchanges the two factors, it is enough to prove it for one of the components: we choose to study the case where $c = d = 0$ (double line).

Proposition 6.11. *Let $\Delta \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_1 \times_U \widetilde{\mathcal{E}}_2$ be a one-parameter family such that $c = d = 0$ at the central point. Then for generic values of a and b , the limit of the period map only depends on t .*

The proof of this proposition is delayed to the next section: for the other boundary strata, we rely on a weaker result. We are going to prove that the rational map given by the period map $\mathcal{M}_{\text{GIT}} \rightarrow \mathcal{X}_L^{\text{BB}}$ maps the special semistable strata (0-dimensional strata) to the boundary as well.

Consider a one-parameter degeneration with special fibre a configuration of three double lines: the three ramification divisors degenerate to x^2, y^2, z^2 (for given projective plane coordinates $[x : y : z]$). We are using the same criterion as Looijenga in [L1] and [LS, sec. 3].

Proposition 6.12 (see [LS, L1]). *Let T_t be a one-parameter family of K3 surfaces whose special fibre is singular, and ω be a choice of twisted 2-forms on (T_t) such that $\omega_{t=0}$ is a nonzero cohomology class in $H^2((T_0)_{\text{reg}}, \mathbb{C})$, but the L^2 -norm of ω goes to infinity as $t \rightarrow 0$.*

Then the limit of the period map of the family as $t \rightarrow 0$ belongs to $\mathbb{P}(\ker : H^2(T_t, \mathbb{C}) \rightarrow H^2((T_0)_{\text{reg}}, \mathbb{C}))$. Moreover, the limit of the period map belongs to the boundary of the period domain.

On the special fibre, the chosen 2-form can be written as

$$\omega = \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{xyz}$$

which has non zero periods on the cycle

$$\gamma : (\theta_1, \theta_2) \mapsto [\exp(i\theta_1) : \exp(i\theta_2) : 1]$$

since for $z = 1$, $\omega = dx/x \wedge dy/y$: which has period $(2i\pi)^2$.

Moreover $\omega \wedge \bar{\omega} = dxd\bar{x}dyd\bar{y}/|xy|^2$ is not integrable over \mathbb{C}^2 : it follows that for any smoothing of this central fibre, the monodromy cannot have finite order. Now using Borel's extension theorem, we know that some birational model of \mathcal{M}_{GIT} , which is an isomorphism outside the non-stable locus, can be mapped regularly to $\mathcal{X}_L^{\text{BB}}$. The discussion above implies that the fibre above the special semistable point is mapped to the boundary. The discussion is similar for the remaining boundary strata, which correspond to similar line configurations, with various labellings.

THE MOST SPECIAL CONFIGURATION AND ITS ISOTROPY GROUP

We are interested in a very special point of \mathcal{X}_L .

Proposition 6.13. *There exists a unique period point $[\omega_0]$ such that ω_0^\perp in L is isomorphic to $\mathbb{Z}^4(-1)$.*

Since there are (-1) -classes in ω_0^\perp , this ω_0 is of course not the period point of an Enriques surface (but rather the one of a rational degeneration of Enriques surfaces).

Proof. Such period points are in bijection with isometry classes of decompositions $L \simeq \mathbb{Z}^2(2) \oplus \mathbb{Z}^4(-1)$. Indeed, any positive plane T such that $T^\perp \simeq \mathbb{Z}^4(-1)$ gives such a decomposition. It is clear that any two such decompositions are conjugate under some isometry. \square

We want to prove the following theorem: for convenience, W_3 denotes the wreath product $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathfrak{S}_3)$.

Theorem 6.14. *There is only one point which is mapped to $[\omega_0]$ under the period map $\mathcal{P} : \mathcal{M}_{\text{GIT}}/(W_3 \times \langle Q \rangle) \rightarrow \mathcal{X}_L^{\text{BB}}$, and \mathcal{P} is a local isomorphism around these points.*

In order to prove the theorem, we will describe how to uniformise the period map for each of these spaces: we will show that in a neighbourhood of the special point, uniformisation is obtained by performing a finite cover of degree 24×32 , both at the source and target, and that the uniformised period map is étale.

The stabiliser of the special period point is the group of automorphisms of $\mathbb{Z}^2(2) \oplus \mathbb{Z}^4(-1)$, preserving the direct sum decomposition (and the connected components of \mathcal{D}_L): it is the quotient of $SO_2(\mathbb{Z}) \times O_4(\mathbb{Z})$ by $\pm \text{id}$, which is a group of order 24×32 . This settles the statement for the target space.

Proposition 6.15. *A stable configuration of lines has period point ω_0 if and only if it is a complete quadrangle and the three pairs of lines are the opposite sides of the quadrangle.*

Proof. The associated surface should be a K3 surface with involution, with 4 disjoint rational (-2) -curves orthogonal to the polarisation H . Each one defines a fixed rational double point, and the only stable configurations having these should have exactly four distinct triple points through which goes a line from each pair.

Of course no line can go through three triple points, and counting vertices and edges in the graph drawn by the lines, we see that each line goes through exactly two triple points, giving a complete quadrilateral. \square

Proposition 6.16. *The GIT quotient $(\mathbb{P}^2)^6 // \mathrm{PSL}_3$ contains exactly two points representing complete quadrangles, whose triple points lie exactly on one line from each pair L_1L_2, L_3L_4, L_5L_6 .*

Proof. First note that a complete quadrangle has trivial stabiliser in PGL_3 . Fixing one of the lines ℓ_1 the combinatorics of the arrangement are fully determined by the two pairs of lines meeting on ℓ_1 : there are two possible inequivalent configurations (of six ordered lines). \square

A point representing a complete quadrangle lies at the intersection of four transverse hypersurfaces (one for each concurring triplet of lines).

The group $(\mathbb{Z}_2)^3 \rtimes \mathfrak{S}_3$ acts on these two points by the exact sequence

$$1 \rightarrow \mathfrak{S}_4 \rightarrow (\mathbb{Z}/2) \wr \mathfrak{S}_3 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 1$$

where the first map is the action of \mathfrak{S}_4 on the six pairs of vertices (\mathfrak{S}_4 is a semi-direct product $(\mathbb{Z}/2)^2 \rtimes \mathfrak{S}_3$), and the second one the signature map.

As before let $\widetilde{\mathcal{U}}^s$ be the ramified cover which adds a square root to each Plücker coordinate. The action of the torus T lifts to $\widetilde{\mathcal{U}}^s$ and defines a quotient $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{GIT}}^s$.

Theorem 6.17. *The period map $\widetilde{\mathcal{U}}^s \rightarrow \mathcal{X}_L$ is locally liftable to \mathcal{D}_L and the local lifts are submersive around the special points.*

Proof. Consider the 4-parameter family of configurations:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a+b & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & c+d \\ 1 & -1 & 1 & -1 & a-b & c-d \end{pmatrix}$$

corresponding to the configuration of lines

$$(x + y = \pm 1, x - y = \pm 1, y + a(x + 1) + b(x - 1) = 0, x + c(y + 1) + d(y - 1) = 0)$$

The relevant minors of the matrix are

$$m_{135} = 4b, m_{245} = -4a, m_{146} = 4d, m_{236} = -4c$$

which define divisors with normal crossings. Hence adding a square root to each of the variables a, b, c, d allows to lift the period map to $\widetilde{U} \rightarrow \mathcal{D}_L$ where U is a small neighbourhood of the origin. Write $a = \alpha^2, b = \beta^2, c = \gamma^2, d = \delta^2$.

Similarly, write S_a, S_b, S_c, S_d for the four (-1) -classes which are associated to the vanishing of a, b, c, d . They provide a basis of $H^{1,1}(\widetilde{S}, \mathbb{Z}_-)$ at the special point, and they also give local coordinates for \mathcal{D}_L around the associated period point.

We now need to compute the partial derivatives of $\int_{S_a} \omega$, with respect to the four variables: it is clear that the Jacobian matrix is diagonal, so it is enough to prove that $\partial/\partial\alpha(\int_{S_a} \omega)$ is nonzero. But this computation was done in section 5.1.

Note that since we are dealing with the lift of the period map, the integral structure is no longer relevant, and we can again work with Campedelli surfaces (and their universal cover), instead of Enriques surfaces, to determine the local structure of the period map. \square

The action of $W_3 \times \mathbb{Z}_2$ lifts to $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{GIT}}^s$ in the following way: W_3 acts by permutation matrices on $\bigwedge^3(\mathbb{C}^6)$ (with coefficients ± 1). Then its natural lift $\widetilde{W}_3 \simeq (\pm 1)^{19} \rtimes W_3$ acts on the finite cover $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{GIT}}^s \rightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{GIT}}^s$ by changing signs in the square roots of the Plücker coordinates and by the action of W_3 on the base.

Proposition 6.18. *The stabiliser of a special configuration in $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GIT}}^s$ inside \widetilde{W}_3 is an order 24×16 group.*

Proof. Remember that the local structure of $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GIT}}^s \rightarrow \mathcal{M}_{\text{GIT}}^s$ around a special configuration is the same as the double cover of \mathbb{C}^4 given by the formula $(a, b, c, d) \mapsto (a^2, b^2, c^2, d^2)$. The number 24×16 then accounts for the actions of $(\mathbb{Z}/2)^4$ and \mathfrak{S}_4 on this space, which stabilise the origin. \square

Proposition 6.19. *The action of Q lifts to the ramified cover. As a consequence, the uniformisation $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GIT}}^s \rightarrow \mathcal{M}_{\text{GIT}}^s/W_3 \times \langle Q \rangle$ has local degree 24×32 on small neighbourhoods of the special points.*

This proves the main result of this section:

Theorem 6.20. *The period map $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s/(W_3 \times \mathbb{Z}/2) \dashrightarrow \mathcal{X}_L^{\text{BB}}$ is birational.*

Proof. The preimage is \mathcal{X}_L under the period map is exactly the stable locus, hence the period map $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s \rightarrow \mathcal{X}_L$ is proper, and finite (it lifts locally to an étale map).

The map $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s/(W_3 \times \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathcal{X}_L$ is finite and the preimage of $[\omega_0]$ consists of a single point P . Considering the diagram of germs around the special points

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GIT}}^s, *) & \longrightarrow & (\mathcal{D}_L, [\omega_0]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s/W_3 \times \langle Q \rangle, *) & \longrightarrow & (\mathcal{X}_L, [\omega_0]) \end{array}$$

we check that the period map is a local isomorphism around this point. But since the map is finite, the preimage of a small contractible neighbourhood of $[\omega_0]$ can be chosen to be a small contractible neighbourhood of P : this proves that a generic fibre consists of a single element, and that $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s/(W_3 \times \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathcal{X}_L$ is an isomorphism. \square

The previous property can be refined in a genuine isomorphism.

Corollary 6.21. *The rational map of the previous theorem is an isomorphism.*

Proof. We already know that the natural map $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s/(W_3 \times \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathcal{X}_L$ is an isomorphism, and that the ample line bundles $\mathcal{O}(1)$ over $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s$ and the automorphic line bundle \mathcal{L} over \mathcal{X}_L are identified under this isomorphism, using the formula for the universal twisted 2-form. In particular, the sections of these line bundles on these Zariski open subsets can be identified.

The projective coordinate ring of the Baily-Borel compactification is by definition $\bigoplus H^0(\mathcal{X}_L, \mathcal{L}^k)$ [BB] while $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s/(W_3 \times \mathbb{Z}/2)$ can be obtained from the ring of invariants

$$\text{Proj} \bigoplus H^0(\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s, \mathcal{O}(3k))^{SL_3 \times T \times W_3 \times \mathbb{Z}/2}.$$

But sections over $\mathcal{M}_{\text{GIT}}^s$ are nothing more than invariant sections over the stable locus in the Grassmannian, which is the complement of a codimension 2 union of Schubert varieties: they extend to the whole Grassmannian, where invariant sections give, by definition, the coordinate ring of the GIT quotient. \square

6.2 MIXED HODGE STRUCTURES AND BOUNDARY CONFIGURATIONS

As an appendix to section 6.1, we determine more precisely how the Hodge structure on the twisted cohomology of Enriques surfaces $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$ degenerates when it approaches the boundary component “of type χ ” which was studied there.

The asymptotic behaviour of the periods is characterised by an isotropic sublattice I in the lattice $\mathbb{Z}^{2,10}$ (which is isomorphic to the generic $H^2(S, \mathbb{Z}_-)$). The main result is proposition 6.24, which states that I^\perp/I is isomorphic to $E_8(-1)$. A consequence is that the analogous computation in the smaller lattice L (which is used for our period map) gives a quadratic lattice $I^\perp/I \subset L/I$ isomorphic to $\mathbb{Z}^2(-2)$. This fact is used to determine the complete correspondence between boundary strata of the GIT moduli space and strata of the Baily-Borel compactification $\mathcal{X}_L^{\text{BB}}$ (see section 6.4).

GEOMETRIC SETUP

The type χ degeneration is a 1-parameter degeneration of Enriques surfaces, with central fibre a rational surface self-intersecting along an elliptic curve. It happens when two lines belonging to the same ramification divisor coincide.

The type χ degeneration admits the following description: consider the blowup \mathcal{P} of \mathbb{P}^2 at three points A, B, C , and let L_A, L_B, L_C be the (-1) -curves arising as the proper transforms of the sides BC, CA, AB . Then the linear systems $H_A = H - A, H_B, H_C$ are pencils of rational curves with self-intersection zero. Note that $K_{\mathcal{P}} = -3H + A + B + C = -H_A - H_B - H_C$.

A $D_{1,6}$ -Enriques surface can be constructed as the bidouble cover of \mathcal{P} with ramification divisors of the form $R_A = D_A + D'_A$ where D_A and D'_A are elements of $|H_A|$. A type I degeneration is obtained by making R_C into a double line, and we additionally suppose that R_A and R_B remain generic (see figure 6.1).

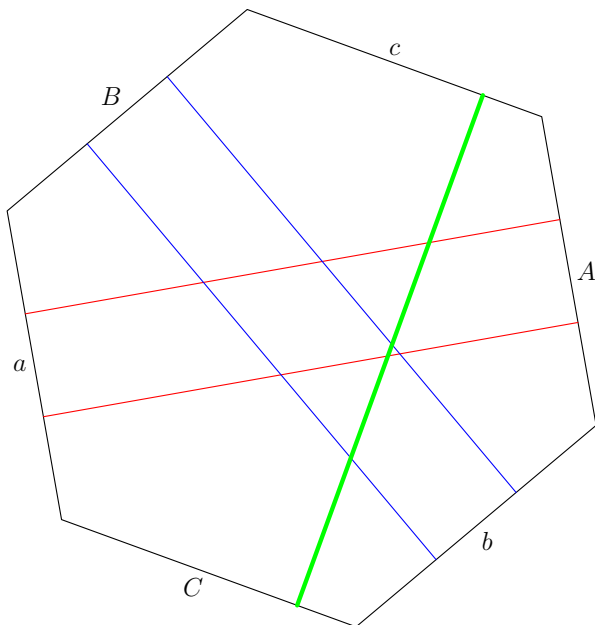


Figure 6.1: Type χ degeneration

Proposition 6.22. *The central fibre of a type χ degeneration of the K3 surfaces is a union of two isomorphic rational surfaces V_i , obtained as bidouble covers ramified over R_A and R_B , and $K_V = -H_C$.*

The central fibre of the corresponding degeneration of Enriques surfaces is a rational surface whose normalisation has $K^2 = 0$, having everywhere normal crossings along a smooth elliptic curve E .

Note that this degeneration can be obtained from the classical model of 6 lines in the plane by blowing up the four points lying over the vertex of the two collapsing lines.

Proposition 6.23 (see Friedman, or details in the next section). *A type χ degeneration is a semistable type II degeneration in the sense of Kulikov. The limit mixed Hodge structure of a type χ degeneration has $W_1 = H^1(E)$, $W_2/W_1 \simeq E^\perp/E$ (where E is an element of $H^2(V_1 \sqcup V_2)$).*

Let V be the normalisation of the degenerate surface, which is a Del Pezzo surface of degree 4 blown-up at 4 points. Note that $E = -K_V$, hence the lattice E^\perp is isomorphic to $-E_9 \simeq \mathbb{Z}E \oplus -E_8$.

Proposition 6.24. *The mixed Hodge structure of a type χ degeneration is characterised by a lattice $E^\perp/E \simeq E_8(-1)$, and only depends (up to isomorphism) on the isomorphism class of the elliptic curve E .*

Since the orthogonal complement of D_6 in E_8 is isomorphic to $\mathbb{Z}^2(2)$, the corresponding boundary component of the period space corresponds to isotropic sublattices of L such that $I^\perp/I \simeq \mathbb{Z}^2(-2)$.

THE CLEMENS-SCHMID EXACT SEQUENCE FOR COHOMOLOGY WITH LOCAL COEFFICIENTS

Let $\mathcal{S} \rightarrow \Delta$ be a type χ degeneration of Enriques surfaces, and write $\mathcal{S} = \mathcal{T}/\iota$ where ι is an involution without fixed points. As usual, we denote by \mathbb{Z}_- the nontrivial local system of integers over \mathcal{S} . The fibre of \mathcal{S} over $t \in \Delta$ is denoted by S_t and \mathcal{S}^* is the fibre product $\mathcal{S} \times_\Delta \Delta^*$.

Proposition 6.25. *The homology groups of S_0 with coefficients in \mathbb{Z}_- are $H_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H_1 = 0$, $H_2 = \mathbb{Z}^{11}$, $H_3 = 0$, $H_4 = \mathbb{Z}$.*

Proof. Remember that S_0 is obtained from its normalisation V_0 by replacing the double curve \tilde{E} by the singular locus E . Note that \mathbb{Z}_- pulls back to \mathbb{Z} on V_0 . Then by a Mayer-Vietoris type exact sequence

$$H_n(E, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(V_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(S_0, \mathbb{Z}_-) \rightarrow -1$$

We get $H_0 = \mathbb{Z}/2$, $H_1 = 0$, H_2 is an extension of $H_1(E)$ by $H_2(V_0, \mathbb{Z})/[E]$, $H_3 = 0$, $H_4 = \mathbb{Z}$. \square

Proposition 6.26. *The cohomology groups of S_0 with coefficients in \mathbb{Z}_- are $H^0 = 0$, $H^1 = \mathbb{Z}/2$, $H^2 = \mathbb{Z}^{11}$, $H^3 = 0$, $H^4 = \mathbb{Z}$.*

Proof. From the sequence of sheaves

$$0 \rightarrow (\mathbb{Z}_-)_{S_0} \rightarrow v_* \mathbb{Z}_{V_0} \rightarrow \mathbb{Z}_E \rightarrow 0$$

we derive the long exact sequence

$$H^n(S_0, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^n(V_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(E, \mathbb{Z}) \rightarrow +1$$

We get $H^0 = 0$, $H^1 = \mathbb{Z}/2$, H^2 is an extension of $H^2(V_0)$ by $H^1(E)$, $H^3 = 0$, $H^4 = \mathbb{Z}$. \square

Proposition 6.27. *The Clemens-Schmid exact sequence*

$$H_4(S_0, \frac{1}{2}\mathbb{Z}_-) = \mathbb{Z}E \rightarrow H^2(S_0, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H_{\lim}^2(S_t, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{N} H_{\lim}^2(S_t, \mathbb{Z}_-)$$

is exact over the integers.

Proof. Proceeding as in [F], we decompose the Clemens-Schmid exact sequence into a part of Wang's long exact sequence

$$H^1(S_t, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(S^*, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(S_t, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{T-1} H^2(S_t, \mathbb{Z}_-)$$

and the relative cohomology exact sequence

$$H^1(\mathcal{S}^*, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(\mathcal{S}, \mathcal{S}^*; \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(\mathcal{S}, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(\mathcal{S}^*, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^3(\mathcal{S}, \mathcal{S}^*, \mathbb{Z}_-)$$

By Poincaré duality, $H^3(\mathcal{S}, \mathcal{S}^*, \mathbb{Z}_-) \simeq H_3(S_0, \mathbb{Z}_-) = 0$. Hence $H^2(\mathcal{S}^*, \mathbb{Z}_-)$ is the cokernel of $H^2(\mathcal{S}, \mathcal{S}^*; \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(\mathcal{S}, \mathbb{Z}_-)$ which is also $H_4(S_0, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(\mathcal{S}, \mathbb{Z}_-)$.

Moreover, since the image of a generator of $H_4(S_0, \mathbb{Z}_-)$ is $\pm 2E$, the 2-torsion element in $H^2(\mathcal{S}^*, \mathbb{Z}_-)$ is $[E]$.

Now S_t is a honest Enriques surface, hence $H^2(S_t, \mathbb{Z}_-)$ is torsion-free, and $H^1(S_t, \mathbb{Z}_-)$ is isomorphic to $\mathbb{Z}/2$, hence the kernel of $T - 1$, or equivalently the monodromy operator N , is the quotient $H^2(\mathcal{S}^*, \mathbb{Z}_-)/[E]$. □

As a conclusion, $Gr_2^W H_{\text{lim}}^2(S_t, \mathbb{Z}_-)$ is isomorphic to $H^2(S_0, \mathbb{Z}_-)/[E], H^1(E, \mathbb{Z})$. But

$$H^2(S_0, \mathbb{Z}_-)/H^1(E, \mathbb{Z}) \simeq E^\perp \subset H^2(V_0, \mathbb{Z}).$$

6.3 THE MONODROMY OF MARKED CAMPEDELLI SURFACES

The results we obtained concerning Enriques surfaces can be summarised by the theorem stated in the introduction:

Theorem. *The structure of the period map of Campedelli surfaces can be described by the following diagram*

$$\begin{array}{ccc} \text{Gr}(4, 7) & \dashrightarrow & \text{Gr}(3, 6) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Gr}(4, 7)/\mathfrak{C}_4 & \dashrightarrow & \text{Gr}(3, 6)/(\mathbb{Z}/2)^2 \rtimes \mathfrak{C}_3 \longrightarrow \frac{\text{Gr}(3, 6)}{(\mathbb{Z}/2\mathfrak{C}_3) \times \langle Q \rangle} \simeq \mathcal{X}_L^{\text{BB}} \end{array}$$

where $\mathcal{X}_L^{\text{BB}}$ is the Baily-Borel compactification of \mathcal{X}_L .

In particular, the fibres of the period map we defined have generically four connected components. It is natural to ask whether the same statement is true when considering the period map of the integral Hodge structure $H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$ (we call *Campedelli lattice* the underlying integral quadratic lattice), instead of $H^2(\mathcal{S}, \mathbb{Z}_-)$ (whose lattice is isomorphic to L).

The main result of this section is corollary 6.35: the embedding of the lattice L in $H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$ is invariant under isometries of L , meaning that any isometry of L induces an isometry of the overlattice $H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$ (it is not true, however, that L is invariant under any isometry of $H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$). In particular, the isomorphism class of the Hodge structure $H^2(\mathcal{S}, \mathbb{Z}_-)$ fully determines that of $H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)$, meaning that the true period map of marked Campedelli surfaces also has disconnected fibres.

THE COHOMOLOGY LATTICE OF CAMPEDELLI SURFACES

Suppose X is a smooth Campedelli surface, with a chosen involution s_κ , and $X/s_\kappa = S$. By blowing up the six fixed points, we get a double cover $\tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ ramified over six (-2) -curves and a genus 3 curve, where S is the minimal resolution of S_κ and \tilde{X} is X

blown up at the six isolated fixed points of s_κ . The results of section 5.2 apply, and the index of $H^2(\tilde{\mathcal{S}}, \mathbb{Z}_-)(2) \subset H^2(\tilde{X}, \mathbb{Z}_\kappa)_{\text{num}}^{s_\kappa}$ is $2^{0-2+7} = 2^5$. The notation H_{num} still denotes the quotient of H by its torsion subgroup. We will see in the next section that $H^2(\tilde{\mathcal{S}}, \mathbb{Z}_-)$ contains $L \oplus D_6(-1)$ as an index 4 subgroup: consider the following maps

$$L(2) \oplus D_6(-2) \rightarrow H^2(\tilde{\mathcal{S}}, \mathbb{Z}_-)(2) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)_{\text{num}}^{s_\kappa} \oplus \mathbb{Z}^6(-1)$$

where the first one has index four, the second one index 2^5 .

Then the equation

$$4 \cdot 2^5 = [\mathbb{Z}^6(-1) : D_6(-2)] \times [H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)_{\text{num}}^{s_\kappa} : L(2)]$$

gives that $L(2) \subset H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)_{\text{num}}^{s_\kappa}$ has index 2^3 , and the lattice $L_0 = H^2(X, \mathbb{Z}_\kappa)_{\text{num}}^{s_\kappa}$ has also discriminant 4. Our goal is now to characterise L_0 as an integral overlattice of $L(2)$: as such, it is completely determined by the image Λ_0 of L_0 in $L(2)^*/L(2) = \Lambda$.

Lemma 6.28. *Let $\Lambda = \mathbb{Z}/4(4)^2 \oplus \mathbb{Z}/2(-2)^4$ be the discriminant group of $L(2)$, with its fractional bilinear form*

$$b(x, y) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{4} - \frac{x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 + x_6 y_6}{2} \pmod{1}.$$

An index 2^3 integral overlattice of $L(2)$ correspond to an isotropic subgroup of order 8 of Λ . Elements with integral norm form the subgroup Λ_i of order 64

$$\{(a, b, c, d, e, f) \text{ such that } a \equiv b \pmod{2}, s + c + d + e + f \equiv 0 \pmod{2}\}$$

where s is the common parity of a and b .

Proof. The decomposition $L(2) = \mathbb{Z}^2(4) \oplus \mathbb{Z}^4(-2)$ induces the description of Λ as a product of cyclic groups, and the description of isotropic vectors results from the fact that $(x^2 + y^2)$ is even if and only if $x \equiv y \pmod{2}$. \square

The determination of Λ_0 uses a strong symmetry property of the lattice L_0 : from this point, we identify L with the (limit of the) lattice $H^{1,1}(\mathbb{Z}_-)$ at the special point $[\omega_0]$ representing a configuration with four triple points. Consider a uniformising disk \mathbb{D} around $[\omega_0]$ in the space $\overline{\mathcal{M}}_{\text{GIT}}^s$. This disk supports a global identification of the twisted Picard lattice of a general member with L . The \mathfrak{S}_4 -action on the configuration, extends to an action on the disk (which at first order is equivalent to the linear action of \mathfrak{S}_4 on four coordinates). As in section 6.1, the group \mathfrak{S}_4 acts on the six lines of the configuration by its embedding $\mathfrak{S}_4 \subset (\mathbb{Z}/2) \wr \mathfrak{S}_3$: this action corresponds to the permutation of coordinates which we used to define Campedelli surfaces and their quotients (via the isomorphism $\mathfrak{S}_4 \simeq GA_2(\mathbb{F}_2)$ with the group of affine transformations of $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$).

Proposition 6.29. *The \mathfrak{S}_4 -action on \mathbb{D} lifts to the family of Enriques surfaces supported by the complement of the triple point locus, hence to a well-defined automorphism of L . \square*

The action of \mathfrak{S}_4 on the four triple points of the configuration gives the following property of the action on the cohomology:

Proposition 6.30. *The action of \mathfrak{S}_4 on the lattice induces the natural action of \mathfrak{S}_4 on the $\mathbb{Z}^4(-1)$ summand (up to choices of signs).*

We are then looking for the particular isotropic subgroup Λ_0 corresponding to the overlattice of Campedelli surfaces, which is also globally defined on \mathbb{D} : there exists a family of Campedelli surfaces, corresponding to the choices of a seventh line, whose base maps to \mathbb{D} with connected fibres, and to which the \mathfrak{S}_4 -action can be lifted, using the same action on coordinates. This family defines a uniform choice of Λ_0 in Λ over \mathbb{D} .

Proposition 6.31. *The subgroup Λ_0 is invariant under the \mathfrak{S}_4 action.* \square

Proposition 6.32. *The projection of Λ_0 of the second summand $(\mathbb{Z}/2)^4$ consists of even vectors (i.e. the sum of their coordinates is even).*

Proof. A \mathfrak{S}_4 -invariant subspace of $(\mathbb{Z}/2)^4$ contains all vectors of a given weight (number of nonzero coefficients). Since the projection of Λ_0 may only contain at most 8 elements, there cannot be a weight one vector (basis vector), and there cannot be a weight three vector either (the sum of three different weight 3 vectors is a weight 1 vector). The subgroup of even vectors contains exactly eight elements. \square

In particular, Λ_0 only contains elements (a, b, c, d, e, f) such that $c + d + e + f$ is even, then by the characterisation of isotropic vectors given above, a and b are both even. But since the pairing of $(2a, 2b, 1, 1, 0, 0)$ and $(2a', 2b', 0, 1, 1, 0)$ is $1/2$ (thus not an integer), Λ_0 cannot actually contain even vectors except for the *characteristic element* $(1, 1, 1, 1)$: it is the only non zero element of Λ which is orthogonal to the 2-torsion subgroup of Λ .

Proposition 6.33. *The group Λ_0 is $\langle 2a, 2b, c + d + e + f \rangle$ (where the letters stand for the standard generators of Λ).*

Proof. The discussion has shown that Λ_0 was a subgroup of $\langle 2a, 2b, c + d + e + f \rangle$, which has order 8. \square

This implies that L_0 is absolute in the sense that it is invariant under the action of $O(L)$, in other words any element of $O(L)$ naturally induces an element of $O(L_0)$. This is because Λ_0 is generated by the 2-divisible elements of Λ , and by the characteristic vector $c + d + e + f$. This leads to the following description:

Theorem 6.34. *The cohomology lattice of a linear system \mathbb{Z}_x on a Campedelli surface splits as an invariant part of signature $(2, 4)$ and an anti-invariant part which is negative definite.*

The invariant part is isomorphic to $\mathbb{Z}^2 \oplus D_4(-1)$, in which $L(2) \simeq \mathbb{Z}^2(4) \oplus \mathbb{Z}^4(-2)$ is embedded in the most natural way (as computed above).

Corollary 6.35. *The automorphism group $\text{Aut}(L)$ is naturally embedded in the orthogonal group of the Campedelli lattice, i.e. any automorphism of L extends to an isometry of the Campedelli lattice. Two marked Campedelli surfaces with the same associated Enriques surface have the same invariant Hodge structure $H^2(\mathbb{Z}_x)$.*

In particular marked Campedelli surfaces with the same periods form a disconnected family.

6.4 DETAILS ON THE BOUNDARY PERIOD MAP

The list of boundary components in both the GIT moduli space and the Baily-Borel compactification of the period space are listed in figure 6.2. The description of the strata is given by the lines which coincide, the lines of each pair being denoted by L_A and L'_A for example. The entries in the table result from the discussion below: this section is dedicated to the classification of primitive isotropic sublattices of L up to isometries.

BOUNDARY COMPONENTS AND LOCAL STRUCTURE

We give here an example of how the one-dimensional boundary components can be explicitly identified.

Proposition 6.36. *The boundary period map $\mathcal{M}_X(\mathbb{Z}/2 \wr \mathfrak{S}_3) \rightarrow X(2A_1)$ is birational.*

GIT component	Dimension	Isotropic ℓ	ℓ^\perp/ℓ
$L_A = L_A'$ (type χ)	1	Odd plane	$\mathbb{Z}^2(-2)$
$L_A = L_B$	1	Even plane	$\mathbb{Z}^2(-1)$
$L_A = L_A', L_B = L_B'$	0	Odd of type 2	$H \oplus \mathbb{Z}^2(-2)$
$L_A = L_A', L_B = L_C$	0	Odd of type 1	$\mathbb{Z}^{1,1} \oplus \mathbb{Z}^2(-2) = \mathbb{Z}^{1,1}(2) \oplus \mathbb{Z}^{0,2}$
$L_A = L'_B, L_B = L'_C \dots$	0	Even	$\mathbb{Z}^{1,3}$

Figure 6.2: List of boundary components in GIT and Baily-Borel compactifications

We know from the study of type χ degenerations that \mathcal{M}_χ is mapped to $\mathcal{X}(2A_1)$. In the next section, we prove that $\mathcal{X}(2A_1)$ is the quotient of the upper half-plane under the action of an index three subgroup of $PSL_2(\mathbb{Z})$. An elementary argument can be used to reprove this using almost only lattice arithmetic.

Proof. For generic χ configurations, \mathcal{M}_χ is isomorphic to \mathbb{P}^1 , the isomorphism being given by the cross-ratio t of the ordered four lines crossing the double line. The singular locus is an elliptic curve whose ramification points can be chosen to be $(\pm 1, \pm \sqrt{t})$: its j -invariant is a degree 6 rational function of t .

The group $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathfrak{S}_2)$ acts on the cross-ratio with an order 4 kernel. Hence the j -invariants $\mathcal{M}_\chi/(\mathbb{Z}/2 \wr \mathfrak{S}_3) \rightarrow \mathbb{P}^1$ and $X(2A_1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ both have degree 3, hence the period map has degree one. \square

ISOTROPIC SUBLATTICES OF THE COHOMOLOGY OF D_6 ENRIQUES SURFACES

Denote by L the lattice $\mathbb{Z}^2(2) \oplus \mathbb{Z}^4(-1)$. Remember that L embeds as an index two sublattice of $\mathbb{Z}^{2,4}$.

Isotropic vectors

Lemma 6.37. *If ℓ is a primitive isotropic vector in L , the set of $\langle \ell, x \rangle$ for $x \in L$ is either \mathbb{Z} , either $2\mathbb{Z}$. According to this distinction, we say ℓ is odd or even.*

Proof. Let d be the gcd of all $\langle \ell, x \rangle$. If $\ell = (a_1, a_2; b_1, b_2, b_3, b_4)$ in the coordinates where $L = \mathbb{Z}^2(2) \oplus \mathbb{Z}^4(-1)$, then d is the gcd of $2a_i$ and b_i .

Since the gcd of a_i and b_i is one, the conclusion follows. \square

Lemma 6.38. *If ℓ is an even vector, there exists a decomposition $L = \mathbb{Z}^{1,1}(2) \oplus \mathbb{Z}^{1,3}$ such that ℓ belongs to the first summand. Up to automorphism of L , there is only one even primitive isotropic vector.*

Lemma 6.39. *If ℓ is an odd vector, then ℓ belongs to a unimodular sublattice of L of signature $(1, 1)$. The corresponding possible decompositions of L are:*

$$\mathbb{Z}^{1,1} \oplus (\mathbb{Z}^{1,1} \oplus \mathbb{Z}^2(-2))$$

$$H \oplus (\mathbb{Z}^{1,1} \oplus \mathbb{Z}^2(-2))$$

$$\mathbb{Z}^{1,1} \oplus D_{1,3}$$

giving two orbits (the first and the second decompositions occur for the same vectors). We will say the first case is type 1, the last case being type 2. The orbits are characterised by ℓ^\perp/ℓ , which is either $\mathbb{Z}^{1,1} \oplus \mathbb{Z}^2(-2)$ or $H \oplus \mathbb{Z}^2(-2)$.

Proof. Let (ℓ, m_1, \dots, m_4) be a basis of ℓ^\perp and v be such that $\langle \ell, v \rangle$ is minimal. In the basis, (ℓ, v, m_\bullet) the quadratic form has matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & v^2 & N \\ 0 & N & A \end{pmatrix}$$

where A is the matrix of the quadratic form on $\bigoplus \mathbb{Z}m_\bullet$ and N_\bullet is $\langle v, m_\bullet \rangle$.

Its determinant is $4 = -\varepsilon^2 \det A$. If $\varepsilon = 2$, i.e. ℓ is even, A is unimodular, hence m_\bullet span a unimodular lattice whose orthogonal complement contains ℓ and has discriminant 4: its matrix should have the form $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & n \end{pmatrix}$. Since it has the same discriminant form as L , it must be an index two sublattice of H or $\mathbb{Z}^{1,1}$. Then it is $\mathbb{Z}^{1,1}(2)$ (since $H(2)$ has two isotropic elements for its discriminant bilinear form).

If $\varepsilon = 1$, then $\mathbb{Z}\ell \oplus \mathbb{Z}v$ is unimodular, and (m_\bullet) should be a index 2 lattice in $\mathbb{Z}^{1,3}$, hence the decompositions mentioned in the statement. \square

Proposition 6.40. *The lattice L contains three orbits of primitive isotropic vectors. The corresponding vectors are even, odd of type 1, odd of type 2. They are distinguished by the fact that ℓ^\perp/ℓ is isomorphic to $\mathbb{Z}^{1,3}$ (resp. $\mathbb{Z}^{1,1} \oplus \mathbb{Z}^2(-2)$, $D_{1,3} = H \oplus \mathbb{Z}^2(-2)$).*

Isotropic planes

Proposition 6.41. *The lattice L contains two orbits of maximal isotropic sublattices, distinguished by the fact that they contain (or not) even isotropic vectors.*

More precisely, if λ is an odd isotropic lattice of rank 2, then there exists a decomposition $L = \mathbb{Z}^{2,2} \oplus \mathbb{Z}^2(-2)$ such that λ is a maximal isotropic lattice of the first summand. Primitive isotropic vectors in $\mathbb{Z}^{2,2}$ are either odd of type 1, e.g. $(1, 0; 1, 0)$, or odd of type 2, e.g. $(1, 1; 1, 1)$ (whose orthogonal complement is even).

If λ is even (i.e. contains even isotropic vectors), it is maximal isotropic in a $\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2(-2)$ summand of L , and λ^\perp/λ is isomorphic to $\mathbb{Z}^2(-1)$. It contains primitive even vectors and odd vectors of type 1.

Proof. Let λ be a rank 2 isotropic sublattice of L . As before, choose a basis

$$(\lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, \mu_1, \mu_2)$$

such that v_\bullet span λ^\perp/λ . Then the matrix of the quadratic form of L can be written with (2×2) -sized blocks:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & B & C \\ A^T & C^T & D \end{pmatrix}$$

and the discriminant is $4 = \det B(\det A)^2$. Then either $\det B = 1$ or $\det A = 1$.

If $\det A = 1$, then λ is embedded in the unimodular lattice spanned by λ and μ , which is indefinite hence isomorphic to H^2 or $\mathbb{Z}^{2,2}$. But the case H^2 is impossible, since it would imply that L is even. In this case L contains no primitive even isotropic vectors (it would imply that $\det A$ is even).

If $\det B = 1$, then $\lambda \oplus v$ has signature $(2, 2)$ and the same discriminant form as L , and B is definite of rank 2, and unimodular, hence isomorphic to \mathbb{Z}^2 . Since $\lambda \oplus v$ cannot be isomorphic to $D_{2,2}$, which has the wrong bilinear form, it must be isomorphic to $\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2(-2)$. \square

The study of isotropic sublattices of L allows to determine the structure of the boundary components of the Baily-Borel-Satake compactification of the period space.

Proposition 6.42. *The boundary of \mathcal{D}_L consists of 3 distinguished points $p_{\text{even}}, q_1, q_2$ and two rational curves C_{even} going through p_{even} and q_1 , C_{odd} going through q_1 and q_2 .*

Proof. The identification of dimension 1 strata results from the study of type χ degenerations. The identification between strata of dimension zero results from the incidence relations with the one-dimensional strata. \square

MODULAR CURVES AT THE BOUNDARY OF THE PERIOD SPACE

In the following, γ will denote the index three subgroup of $GL_2(\mathbb{Z})$ of matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ such that $a \equiv d$ and $b \equiv c \pmod{2}$.

Boundary curve for odd isotropic lattices

Proposition 6.43. *Let I be a primitive isotropic plane in $L \simeq \mathbb{Z}^{2,2} \oplus \mathbb{Z}^2(-2)$, such that $I^\perp/I \simeq \mathbb{Z}^2(-2)$. Then up to isometry, we can assume that $I \subset \mathbb{Z}^{2,2}$.*

The image of the stabiliser of I in $\text{Aut}(L)$ is an index three subgroup $\gamma(I)$ of $GL_2(I)$, which is identified with γ for a suitable choice of basis.

Before explaining the proof, we choose a basis of L which gives bases for I , I^\perp/I , and $L/I^\perp \simeq I^\vee$ (and assume that the intersection matrix of I and I^\vee is given by the identity matrix). Then an isometry of L preserving I has a matrix of the following form

$$\begin{pmatrix} H & A & B \\ 0 & G & C \\ 0 & 0 & H^\dagger \end{pmatrix}$$

where H^\dagger is the inverse transpose of H , and $G \in O_2(\mathbb{Z})$. In order to define an isometry, the matrix has to satisfy additionally

- $A^T H^\dagger - 2G^T C = 0$;
- $(H^\dagger)^T H^\dagger + B^T H^\dagger + H^{-1} B - 2C^T C = I$.

where I is the identity matrix.

Proof. Choose a basis $(e_1, e_2; f_1, f_2)$ of $\mathbb{Z}^{2,2}$ such that I is generated by $(e_1 + f_1, e_2 + f_2)$. Then choosing any orthogonal basis (g_1, g_2) for $\mathbb{Z}^2(-2)$ and (e_1, e_2) for a basis of I^\vee gives a basis

$$(e_1 + f_1, e_2 + f_2, g_1, g_2, e_1, e_2)$$

of L satisfying the axioms above.

With the previous notations,

$$(H^\dagger)^T H^\dagger = I + (H^{-1} B) + (H^{-1} B)^T \pmod{2}$$

thus is either the identity matrix or $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$. Hence H must map to an element of the orthogonal group $O_2(\mathbb{F}_2)$ which has index three in $GL_2(\mathbb{F}_2)$ (H is an element of γ).

Conversely, if $H \pmod{2}$ is in $O_2(\mathbb{F}_2)$, then write $(H^\dagger)^T H^\dagger = I - 2N$ where N is an integral symmetric matrix. Then $A = 0$, $B = HN$ and $C = 0$, $G = I$ defines an isometry of L , whose restriction to I is given by H . \square

Let Γ_I be the stabiliser of I in $\text{Aut } L$ (notations are borrowed from [L]) and let

$$1 \rightarrow N_I \rightarrow \Gamma_I \rightarrow \gamma_I \times O_2(\mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

be its Levi decomposition. Note also that N_I is a central extension

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow N_I \rightarrow \text{Hom}(I^\vee, I^\perp/I) \rightarrow 0$$

where \mathbb{Z} is the subgroup of matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & B \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where B is integral and skew-symmetric (which is central in N_I).

Let \mathcal{D}_L be the period domain associated to the lattice L , and $\mathcal{D}_L^{\text{BB}}$ the topological space defined by Satake, such that the Baily-Borel compactification $\mathcal{X}_L^{\text{BB}}$ is $\mathbb{D}_L^{\text{BB}}/\text{Aut}(L)$. Then the boundary curve $\mathcal{X}_L(2A_1)$ corresponding to odd isotropic planes is isomorphic to \mathfrak{H}/γ , where γ is the index three subgroup of $SL_2(\mathbb{Z})$ as above.

Proposition 6.44. *Let Γ^I be the kernel of $\Gamma_I \rightarrow \gamma_I$. Then in a neighbourhood of a generic point of $\mathcal{X}_L(2A_1)$, $\mathcal{X}_L^{\text{BB}}$ is locally isomorphic to $\mathcal{D}_L^{\text{BB}}/\Gamma^I$.*

Following Looijenga [L], let π_W be the projection $L \rightarrow L/W$, and consider the morphisms

$$\mathcal{D}_L \rightarrow \pi_I \mathcal{D}_L \rightarrow \pi_{I^\perp} \mathcal{D}_L$$

and the filtration

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow N_I \rightarrow \Gamma^I \rightarrow \Gamma_I$$

with quotients \mathbb{Z} , $\text{Hom}(I^\perp/I, I)$, $O_2(\mathbb{Z})$, γ_I .

Note that $\mathcal{D}_L \rightarrow \pi_I \mathcal{D}_L$ is a bundle of upper half-planes, acted on by the subgroup acting as the identity on L/I , which is $\mathbb{Z} \subset N_I$, acting by translations.

Proposition 6.45. *$\mathcal{D}_L/\mathbb{Z} \rightarrow \pi_I \mathcal{D}_L$ is a bundle of punctured disks.*

Now consider $\pi_I \mathcal{D}_L \rightarrow \pi_{I^\perp} \mathcal{D}_L$. Note that $\pi_I \mathcal{D}_L$ is the set of images of positive planes inside $\text{Gr}(2, L/I \otimes \mathbb{R})$ or $\text{Gr}(2, I_\mathbb{R}^\perp)$, which is a principal bundle over $\pi_{I^\perp} \mathcal{D}_L$ under action of $\text{Hom}_\mathbb{R}(I, I^\perp/I)$ (which is the stabiliser of I in $GL(I^\perp)$, which acts by isometries).

Proposition 6.46. *$\pi_I \mathcal{D}_L/N_I \rightarrow \pi_{I^\perp} \mathcal{D}_L$ is a bundle of abelian surfaces.*

Here $\pi_{I^\perp} \mathcal{D}_L$ is the upper half plane associated to $L/I^\perp \simeq I^\vee$ which is acted on by γ_I , it maps to the boundary curve $\mathcal{X}_L(2A_1)$.

Proposition 6.47. *There are natural projections*

$$\mathcal{D}_L/N_I \rightarrow \pi_I \mathcal{D}_L/N_I \rightarrow \pi_{I^\perp} \mathcal{D}_L$$

such that the second morphism is a bundle of abelian surfaces, and the first morphism is a bundle of punctured disks, and $O_2(\mathbb{Z})$ acts properly on the first two spaces.

The local structure of the Baily-Borel compactification is obtained by extending \mathcal{D}_L/Γ_I^o into a disk bundle, and contracting central fibres, then taking the quotient under $O_2(\mathbb{Z})$.

Boundary curve for even isotropic lattices

Proposition 6.48. *Let I be a primitive isotropic plane in $L \simeq \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2(-2) \oplus \mathbb{Z}^2(-1)$, such that $I^\perp/I \simeq \mathbb{Z}^2(-1)$. Then up to isometry, we can assume that $I \subset \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2(-2)$.*

The image of the stabiliser of I in $\text{Aut}(L)$ has index three in $SL_2(I)$.

Note that a primitive isotropic plane in $\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^2(-2)$ (in a canonical basis $(e_1, e_2; f_1, f_2)$) is given by $I = \langle e_1 + e_2 + f_1, e_1 - e_2 + f_2 \rangle$. Let g_1, g_2 be a orthonormal basis of the remaining summand $\mathbb{Z}^2(-1)$, and consider the basis of L given by

$$e_1 + e_2 + f_1, e_1 - e_2 + f_2, g_1, g_2, e_1, e_2$$

The matrix of the quadratic form is then

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & M \\ 0 & -1 & 0 \\ M & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. A matrix

$$g = \begin{pmatrix} H & A & B \\ 0 & K & C \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix}$$

then defines an isometry if and only if

- $K \in O_2(\mathbb{Z})$;
- $H^T M L = M$;
- $A^T M L - K^T C = 0$;
- $B^T M L + L^T M B + L^T L - 2C^T C = I$.

Lemma 6.49. *An explicit computation shows that if $X = MYM/2$, and X, Y are elements of $GL_2(\mathbb{Z})$, then X and Y belong to γ .*

Proof. Write $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Then

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+b+c+d & a-b+c-d \\ a+b-c-d & a-b-c+d \end{pmatrix}$$

which implies that $a+b+c+d$ is even, that is $Y \in \gamma$. It is then easy to check that $X \in \gamma$. \square

Proof of the proposition. From the above equations we get $H^T = ML^{-1}M/2$, hence H is an element of γ .

Conversely, given any matrix H mapping to $O_2(\mathbb{F}_2)$, i.e. $H \in \gamma$, there exists an isometry

$$g = \begin{pmatrix} MH^\dagger M/2 & 0 & B \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix}$$

where $B^T M H + H^T M B + H^T H = I$. Since $I - H^T H = 2N$ for some integral symmetric matrix N . Note that diagonal coefficients of N are even, hence either N or $N' = N + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ is even.

Setting $B = MH^\dagger N/2$ or $MH^\dagger N'/2$ gives g . \square

Conventions de notation

Voici une liste de conventions typographiques utilisées dans cette partie.

SURFACES DE CAMPEDELLI

X	Une surface de Campedelli
G	Le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$
κ	Un caractère de G
\mathbb{Z}_κ	Système local associé à κ
X_κ	Revêtement double associé à κ
\mathcal{L}_κ	Fibré en droites $\mathbb{Z}_\kappa \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X$ associé à κ
x_κ	Section de $K_X + \mathcal{L}_\kappa$
s_κ	Involution de X issue de la réflexion par rapport à $\{x_\kappa = 0\}$

SURFACES D'ENRIQUES

S	Une surface d'Enriques
T	Revêtement universel de S
S_κ	Quotient X/s_κ
T_κ	Quotient X_κ/s_κ

RÉSEAUX ET FORMES QUADRATIQUES

$\mathbb{Z}^{p,q}$	Réseau \mathbb{Z}^{p+q} muni de la forme quadratique $x_1^2 + \dots + x_p^2 - y_1^2 - \dots - y_q^2$
D_n	Sous-réseau pair de \mathbb{Z}^n
$D_{p,q}$	Sous-réseau pair de $\mathbb{Z}^{p,q}$
E_8	Réseau dans l'espace euclidien \mathbb{R}^8 engendré par D_8 et $(1/2, \dots, 1/2)$

Bibliographie

- [AP] V. Alexeev and R. Pardini, *Explicit compactifications of moduli spaces of Campedelli and Burniat surfaces* (2009), available at <http://arxiv.org/abs/0901.4431>.
- [A1] Daniel Allcock, *The period lattice for Enriques surfaces*, *Math. Ann.* **317** (2000), no. 3, 483–488, available at <http://arxiv.org/abs/math/9905166>. MR1776113 (2002a:14040)
- [A2] M. F. Atiyah, *On analytic surfaces with double points*, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A* **247** (1958), 237–244. MR0095974 (20 #2472)
- [AS] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators. III*, *Ann. of Math. (2)* **87** (1968), 546–604. MR0236952 (38 #5245)
- [BB] W. L. Jr. Baily and Armand Borel, *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, *Ann. of Math. (2)* **84** (1966), 442–528.
- [BP] W. Barth and C. Peters, *Automorphisms of Enriques surfaces*, *Invent. Math.* **73** (1983), no. 3, 383–411, DOI 10.1007/BF01388435. MR718937 (85g:14052)
- [BHPvdV] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius van de Ven, *Compact complex surfaces*, 2nd ed., *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*, vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR2030225 (2004m:14070)
- [B] Armand Borel, *Some metric properties of arithmetic quotients of symmetric spaces and an extension theorem*, *J. Differential Geometry* **6** (1972), 543–560. Collection of articles dedicated to S. S. Chern and D. C. Spencer on their sixtieth birthdays. MR0338456 (49 #3220)
- [C] Luigi Campedelli, *Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine*, *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., VI. Ser.* **15** (1932), 536–542 (Italian).
- [CMLP] A. Calabri, M. Mendes Lopes, and R. Pardini, *Involutions on numerical Campedelli surfaces*, *Tohoku Math. J. (2)* **60** (2008), no. 1, 1–22, available at <http://arxiv.org/abs/math/0511391>. MR2419034 (2009d:14045)
- [C1] François R. Cossec, *Projective models of Enriques surfaces*, *Math. Ann.* **265** (1983), no. 3, 283–334, DOI 10.1007/BF01456021. MR721398 (86d:14035)
- [C2] ———, *On the Picard group of Enriques surfaces*, *Math. Ann.* **271** (1985), no. 4, 577–600, DOI 10.1007/BF01456135. MR790116 (86k:14027)
- [CD] François R. Cossec and Igor V. Dolgachev, *Enriques surfaces. I*, *Progress in Mathematics*, vol. 76, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1989. MR986969 (90h:14052)
- [D1] I. Dolgachev, *On automorphisms of Enriques surfaces*, *Invent. Math.* **76** (1984), no. 1, 163–177, DOI 10.1007/BF01388499. MR739632 (85j:14076)
- [D2] Igor V. Dolgachev, *Reflection groups in algebraic geometry*, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **45** (2008), no. 1, 1–60, DOI 10.1090/S0273-0979-07-01190-1. MR2358376 (2009h:14001)
- [DvGK] I. Dolgachev, B. van Geemen, and S. Kondō, *A complex ball uniformization of the moduli space of cubic surfaces via periods of K3 surfaces*, *J. Reine Angew. Math.* **588** (2005), 99–148, DOI 10.1515/crll.2005.2005.588.99. MR2196731 (2006h:14051)
- [F] Robert Friedman, *A new proof of the global Torelli theorem for K3 surfaces*, *Ann. of Math. (2)* **120** (1984), no. 2, 237–269, DOI 10.2307/2006942. MR763907 (86k:14028)
- [G1] Larry J. Gerstein, *Integral decomposition of hermitian forms*, *Amer. J. Math.* **92** (1970), 398–418. MR0269592 (42 #4487)
- [G2] Mark L. Green, *The period map for hypersurface sections of high degree of an arbitrary variety*, *Compositio Math.* **55** (1985), no. 2, 135–156. MR795711 (87b:32038)

- [G3] L. Godeaux, *Sur une surface algébrique de genre zéro et de bigenre deux*, Atti Acad. Naz. Lincei **14** (1931), 479–481.
- [G4] Phillip A. Griffiths, *On the periods of certain rational integrals. I, II*, Ann. of Math. (2) **90** (1969), 460–495; *ibid.* (2) **90** (1969), 496–541. MR0260733 (41 #5357)
- [H1] Eiji Horikawa, *On the periods of Enriques surfaces. I*, Math. Ann. **234** (1978), no. 1, 73–88. MR0491725 (58 #10927a)
- [H2] ———, *On the periods of Enriques surfaces. II*, Math. Ann. **235** (1978), no. 3, 217–246. MR0491726 (58 #10927b)
- [J] Jürgen Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, 4th ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2005. MR2165400 (2006c:53002)
- [K] Kazuhiro Konno, *On the variational Torelli problem for complete intersections*, Compositio Math. **78** (1991), no. 3, 271–296. MR1106298 (92f:14009)
- [L] Eduard Looijenga, *Compactifications defined by arrangements. II. Locally symmetric varieties of type IV*, Duke Math. J. **119** (2003), no. 3, 527–588, DOI 10.1215/S0012-7094-03-11933-X. MR2003125 (2004i:14042b)
- [LS] Eduard Looijenga and Rogier Swierstra, *On period maps that are open embeddings*, J. Reine Angew. Math. **617** (2008), 169–192, DOI 10.1515/CRELLE.2008.029. MR2400994 (2010a:32030)
- [L1] Eduard Looijenga, *The period map for cubic fourfolds*, Invent. Math. **177** (2009), no. 1, 213–233, DOI 10.1007/s00222-009-0178-6. MR2507640
- [L2] Gheorghe Lusztig, *Novikov's higher signature and families of elliptic operators*, J. Differential Geometry **7** (1972), 229–256. MR0322889 (48 #1250)
- [MSY] Keiji Matsumoto, Takeshi Sasaki, and Masaaki Yoshida, *The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the hypergeometric function of type (3, 6)*, Internat. J. Math. **3** (1992), no. 1, 164, DOI 10.1142/S0129167X92000023. MR1136204 (93a:33029)
- [MLP] Margarida Mendes Lopes and Rita Pardini, *A new family of surfaces with $p_g = 0$ and $K^2 = 3$* , Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 4, 507–531, DOI 10.1016/j.ansens.2004.04.001 (English, with English and French summaries). MR2097891 (2005h :14095)
- [MM] Rick Miranda and David R. Morrison, *The number of embeddings of integral quadratic forms. I*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **61** (1985), no. 10, 317–320. MR834537 (87j:11031a)
- [M1] Yoichi Miyaoka, *Tricanonical maps of numerical Godeaux surfaces*, Invent. Math. **34** (1976), no. 2, 99–111. MR0409481 (53 #13236)
- [M2] Y. Miyaoka, *On numerical Campedelli surfaces*, Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 113–118. MR0447258 (56 #5573)
- [M3] David R. Morrison, *On the moduli of Todorov surfaces*, Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I, Kinokuniya, Tokyo, 1988, pp. 313–355. MR977767 (90a:14051)
- [N1] Daniel Naie, *Surfaces d'Enriques et une construction de surfaces de type général avec $p_g = 0$* , Math. Z. **215** (1994), no. 2, 269–280 (French). MR1259462 (94m :14055)
- [N2] Yukihiro Namikawa, *Periods of Enriques surfaces*, Math. Ann. **270** (1985), no. 2, 201–222. MR771979 (86j:14035)
- [N3] V. V. Nikulin, *Integer symmetric bilinear forms and some of their geometric applications*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 1, 111–177, 238 (Russian). MR525944 (80j :10031)
- [P] Rita Pardini, *Abelian covers of algebraic varieties*, J. Reine Angew. Math. **417** (1991), 191–213, DOI 10.1515/crll.1991.417.191. MR1103912 (92g:14012)
- [PS] Chris A. M. Peters and Joseph H. M. Steenbrink, *Mixed Hodge structures*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 2008. MR2393625 (2009c:14018)
- [R] Miles Reid, *Surfaces with $p_g = 0$, $K^2 = 2$* , available at <http://www.warwick.ac.uk/~masda/surf/>.
- [S1] Jean-Pierre Serre, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1977 (French). Deuxième édition revue et corrigée; Le Mathématicien, No. 2. MR0498338 (58 #16473)
- [S2] E. Spanier, *Singular homology and cohomology with local coefficients and duality for manifolds*, Pacific J. Math. **160** (1993), no. 1, 165–200. MR1227511 (94h:55009)
- [S3] N. E. Steenrod, *Homology with local coefficients*, Ann. of Math. (2) **44** (1943), 610–627. MR0009114 (5,104f)

- [T] Andrei N. Todorov, *A construction of surfaces with $p_g = 1$, $q = 0$ and $2 \leq (K^2) \leq 8$. Counterexamples of the global Torelli theorem*, *Invent. Math.* **63** (1981), no. 2, 287–304, DOI 10.1007/BF01393879. MR610540 (82k:14034)
- [V1] Claire Voisin, *Théorème de Torelli pour les cubiques de \mathbf{P}^5* , *Invent. Math.* **86** (1986), no. 3, 577–601, DOI 10.1007/BF01389270 (French). MR860684 (88g :14006)
- [V2] ———, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, *Cours Spécialisés*, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002 (French). MR1988456 (2005c :32024a)
- [W] C. T. C. Wall, *On the orthogonal groups of unimodular quadratic forms*, *Math. Ann.* **147** (1962), 328–338. MR0138565 (25 #2009)

Index

A

algèbre

de Frobenius, 14

de Kac-Moody, 13

de Lie affine, 13

anneau jacobien, 67

B

bloc conforme, 13

C

cellule de Schubert, 25

champ algébrique, 9

D

diviseur Thêta, 27

domaine de périodes, 88

dualité de Howe, 23

F

fibré déterminant, 11

fibré vectoriel, 7

quasi-parabolique, 26

famille de —, 7

I

involution

association de Coble, 81

transformation de Cremona, 80

M

module de Verma, 13

O

opérateur modulaire, 15

P

plat, 8

poids dominant, 21

polynôme de Schur, 17

R

représentation intégrable, 14

revêtement bidouble, 79

S

Schéma Quot, 8

sous-groupe

parabolique, 22

stabilité

configurations de droites, 81

fibrés vectoriels, 9

GIT, 10

structure de Hodge, 57

structure parabolique, 22

suite exacte de Clemens-Schmid, 97

suite spectrale

de cohomologie équivariante, 75

surface

de Campedelli, 61

de Keum-Naie, 74

de Todorov, 71

V

variété

de Schubert, 25

variété drapeau, 22

Table des matières

Table des matières	iii
Avant-propos	v
I Dualité rang-niveau des blocs conformes de GL_n	1
Introduction	3
1 Espaces de modules de fibrés, blocs conformes	7
1.1 Familles de fibrés vectoriels, champs de modules	7
Définitions	7
Algébricité des modules de fibrés vectoriels	8
Théorie géométrique des invariants et variétés de modules	9
1.2 Fibrés déterminants et espaces de blocs conformes	11
Construction du fibré déterminant	11
Grassmannienne affine et blocs conformes	13
1.3 Formule de Verlinde et algèbres de fusion	14
Algèbres de fusion	14
Algèbre de fusion associée à une algèbre de Lie simple	15
Polynômes antisymétriques, polynômes de Schur	17
Formes explicites de la formule de Verlinde, dualité rang-niveau	18
2 Cellules de Schubert et structures paraboliques	21
2.1 Grassmanniennes, variétés drapeaux et dualité de Howe	21
L'algèbre de Lie \mathfrak{sl}_n et ses représentations irréductibles	21
Structures quasi-paraboliques et dualité de Howe	22
2.2 Structures paraboliques induites et cellules de Schubert	24
2.3 Espaces de modules de fibrés paraboliques et blocs conformes	26
Champ de modules et diviseurs Thêta	26
Stabilité, espaces de modules grossiers	28
3 Nombres d'intersections «quantiques» et preuve de la dualité	29
3.1 Le tenseur de dualité rang-niveau	29
Définitions	29
Fibré déterminant tordu	31
3.2 Extension des définitions aux fibrés de degré quelconque	33
Isomorphismes de décalages	34
Dualité rang-niveau en degré quelconque	36
3.3 Démonstration énumérative de la dualité rang-niveau	37

Reformulation du problème	37
Nombres d'intersections sur les schémas Quot	37
Construction d'une solution	39
Conventions de notation	41
Références	43
II Périodes des surfaces d'Enriques polarisées par un réseau D_6	47
Introduction	49
4 Applications de périodes et anneaux jacobiens	53
4.1 Un peu de théorie de Hodge des variétés kählériennes	53
Variétés différentiables	53
Variétés complexes	54
Métriques et opérateur $*$ de Hodge	54
Différentielle extérieure, divergence et laplaciens	55
Cohomologie de de Rham et décomposition de Hodge	56
4.2 Périodes des surfaces algébriques	57
Structures de Hodge	57
Domaines de périodes	58
Utilisation des anneaux jacobiens	58
5 Géométrie des surfaces de Campedelli et d'Enriques	61
5.1 Campedelli surfaces	61
Description and general properties	61
Involutions of a Campedelli surface	63
Quotients of Campedelli surfaces under involutions	64
Infinitesimal variation of periods	66
The Jacobian ring	67
The period map around Campedelli surfaces with double points	69
5.2 Todorov surfaces and double covers of Enriques surfaces	71
Classical Todorov surfaces	71
Todorov-Enriques surfaces	72
Embeddings of cohomology lattices for double covers	75
5.3 Enriques surfaces with a $D_{1,6}$ polarisation	77
Linear systems and geometry	77
An involution of the moduli space	79
GIT stability for configurations of six lines	81
The cohomology of a generic $D_{1,6}$ -Enriques surfaces	82
6 Bijectivité de l'application de périodes	87
6.1 The period map	87
The period mapping and its extension to the stable locus	87
Local structure around the one-dimensional χ stratum	90
The most special configuration and its isotropy group	93
6.2 Mixed Hodge structures and boundary configurations	95
Geometric setup	96
The Clemens-Schmid exact sequence for cohomology with local coefficients	97

6.3	The monodromy of marked Campedelli surfaces	98
	The cohomology lattice of Campedelli surfaces	98
6.4	Details on the boundary period map	100
	Boundary components and local structure	100
	Isotropic sublattices of the cohomology of D_6 Enriques surfaces	101
	Modular curves at the boundary of the period space	103
	Conventions de notation	107
	Références	109
	Index	113
	Table des matières	114

Dualité rang-niveau des blocs conformes du groupe GL_n Périodes des surfaces d'Enriques polarisées par un réseau D_6

Résumé. Cette thèse est constituée de deux parties portant sur deux domaines différents de géométrie algébrique.

Dans la première partie, nous étudions la *dualité rang-niveau*, qui a lieu entre les *blocs conformes*, des espaces vectoriels définis par une «théorie des champs conforme» sur une surface de Riemann X . Ceux-ci apparaissent en géométrie algébrique comme espaces de sections de fibrés en droites naturels sur les espaces de modules de fibrés vectoriels sur X . Nous étudions ici son extension aux espaces de modules de fibrés paraboliques : en suivant le modèle des travaux d'A. Marian et D. Oprea, on montre comment les liens, déjà connus, entre variétés de Schubert et fibrés paraboliques peuvent être utilisés pour prouver cette forme plus générale.

Dans la seconde partie, on s'intéresse à l'application des périodes des surfaces de Campedelli. L'étude de leurs périodes se ramène à celle d'une famille de surfaces d'Enriques, revêtements du plan projectif, ramifiés le long d'une configuration de droites. Ces surfaces s'identifient en fait aux surfaces d'Enriques polarisées par un réseau D_6 . Une étude un peu plus fine permet d'exhiber deux espaces de modules pour ces surfaces d'Enriques, naturellement isomorphes à travers l'application des périodes. Le premier est construit par la théorie des invariants, tandis que le second est la compactification de Baily-Borel du domaine de périodes naturel des surfaces d'Enriques D_6 -polarisées.

Mots-clés. Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques, dualité rang-niveau, variétés de Schubert, surfaces algébriques, théorie de Hodge, applications de périodes, réseaux quadratiques entiers.

Rank-level duality for conformal blocks of GL_n Periods of Enriques surfaces polarised by a D_6 lattice

Abstract. This thesis consists of two distinct parts concerning different topics in algebraic geometry.

In the first part, we study the *rank-level duality*, which exists between *conformal blocks*, which are vector spaces defined by a “conformal field theory” on a Riemann surface X . They appear in algebraic geometry as spaces of sections of natural line bundles on the moduli spaces of vector bundles on X . We are interested in the extension of this duality to the case of moduli of parabolic bundles: following the work of A. Marian and D. Oprea, we show how the (formerly known) relationship between Schubert varieties and parabolic bundles can be used to understand and prove this more general result.

The second part is a study of a period mapping for Campedelli surfaces. It actually reduces to studying the periods of a particular family of Enriques surfaces, which are covers of the projective plane ramified along a configuration of lines. These surfaces can be identified with the Enriques surfaces polarised by a D_6 lattice. More precise considerations lead to defining two moduli spaces for them, which are naturally isomorphic through the period mapping. The first one is constructed by invariant theory, whereas the second one is the Baily-Borel compactification of the natural period domain for D_6 -polarised Enriques surfaces.

Keywords. Vector bundles on algebraic curves, rank-level duality, Schubert varieties, algebraic surfaces, Hodge theory, period mappings, integral quadratic lattices.