



UNIVERSITÉ PARIS NANTERRE

École doctorale «Connaissance, langage modélisation» (ED 139)

Laboratoire Modal'X (EA 3454)

Mémoire présenté pour l'obtention du

**Diplôme d'habilitation à diriger les recherches**

Discipline : Mathématiques

*par*

**Laurent Ménard**

# **Cartes et graphes aléatoires**

Rapporteurs :

**Louigi Addario-Berry**

**Christian Léonard**

**Grégory Miermont**

Soutenu en visioconférence le mercredi 4 novembre 2020 devant le jury composé de :

**Louigi Addario-Berry** (Rapporteur)

**Vincent Beffara** (Examineur)

**Charles Bordenave** (Examineur)

**Mireille Bousquet-Mélou** (Examinatrice)

**Christina Goldschmidt** (Examinatrice)

**Jean-François Le Gall** (Examineur)

**Christian Léonard** (Rapporteur)

**Grégory Miermont** (Rapporteur)



# Table des matières

<b>Preface</b>	<b>7</b>
<b>Avant Propos</b>	<b>9</b>
<b>Liste des travaux</b>	<b>11</b>
<b>1 Cartes planaires</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Un peu de combinatoire des cartes . . . . .	16
1.2.1 Combinatoire analytique . . . . .	16
1.2.2 Combinatoire bijective . . . . .	18
1.3 Limites locales de cartes . . . . .	21
1.4 UIPQ et bijection de Schaeffer . . . . .	24
1.4.1 Extension de la bijection de Schaeffer au cas infini . . . . .	24
1.4.2 Profil métrique de L'UIPQ . . . . .	25
1.4.3 L'UIPQ vue de l'infini . . . . .	26
1.5 UIPT et décomposition en tranches de Krikun . . . . .	28
1.5.1 Volumes dans L'UIPT . . . . .	30
1.5.2 L'UIPT vue de l'infini . . . . .	31
1.6 Épluchage et percolation . . . . .	35
1.7 Modèle d'Ising . . . . .	37
1.7.1 Sortir de l'universalité brownienne avec les cartes décorées . . . . .	37
1.7.2 Triangulations couplées à un modèle d'Ising . . . . .	38
1.7.3 Combinatoire des triangulations décorées par un modèle d'Ising . . . . .	41
1.8 Perspectives . . . . .	42
<b>2 Graphes aléatoires</b>	<b>43</b>
2.1 Introduction . . . . .	43
2.2 Modèle de configuration . . . . .	44
2.2.1 Spectre . . . . .	45
2.2.2 Exploration en profondeur . . . . .	48
2.2.3 Perspectives . . . . .	53
2.3 Processus de contact et percolation par groupements cumulatifs . . . . .	53
2.3.1 Motivation : le processus de contact . . . . .	53
2.3.2 Partition par groupements cumulatifs . . . . .	55
2.3.3 Transition de phase pour la percolation sur la CMP . . . . .	57
2.3.4 Retour au processus de contact . . . . .	60
2.3.5 Remarques et perspectives . . . . .	60
<b>Références</b>	<b>61</b>



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement tous les membres du jury d'avoir accepté de partager un peu (voir beaucoup) de leur temps en ce contexte si compliqué de pandémie. C'est à la fois un honneur et un plaisir que vous me faites. Merci donc à Christian, Grégory et Louigi d'avoir accepté la pénible tâche de rapporter ce mémoire. Merci aussi à Charles, Christina, Mireille et Vincent de rendre cette soutenance possible. Enfin, bien sûr, merci à Jean-François qui après avoir encadré mes débuts avant même la thèse répond toujours présent.

Ce mémoire serait bien vide sans mes co-auteurs : Arvind, Gabriel, Gilles, Grégory, Jean-François, Nathan, Nathanaël, Nicolas, Marie et Pierre. Je les remercie avec plaisir et souhaite sincèrement que nos collaborations continuent. Je dois en particulier beaucoup à Nathanaël ; son enthousiasme mathématique et sa générosité m'ont énormément aidé dans des moments parfois difficiles. J'ai eu aussi beaucoup de chance que Nathan décide de faire sa thèse avec Nathanaël et moi. J'ai beaucoup appris de lui et travailler ensemble a toujours été un réel plaisir.

Je remercie aussi tous les collègues et anciens collègues de Modal'X, qui en font un lieu de travail à l'ambiance si agréable. La magnifique couleur framboise qui égaie ce volume leur est dédiée.

Enfin, quelques mots pour mes proches. Merci à ma famille et à mes amis, pour tous les moments vécus ensemble. Merci à Julie, pour notre complicité sans faille malgré les coups durs, et pour la douceur de notre vie ensemble. Merci à Noémie et Sophia, pour toute l'énergie et tout le bonheur qu'elles m'apportent.



# Preface

This document summarizes the research that I have carried out since my PhD thesis (see the publication list page 11). The aim is to be as non-technical as possible and to provide some heuristics rather than proofs. My main research interests lie in the probabilistic study of large random combinatorial structures. In particular, I study random planar maps and random graphs and this manuscript is divided into two largely independent parts to treat them separately. However, we will find some common aspects, in particular the local topology that serves as the basis of most of my work.

## Part 1 : Random maps

*Collaborations with Marie Albenque, Nicolas Curien, Jean-François Le Gall, Grégory Miermont, Pierre Nolin and Gilles Schaeffer.*

In my PhD thesis, I studied the uniform infinite planar quadrangulation (UIPQ), which is the limit in law of large uniformly random planar quadrangulations for the local topology. I still find planar maps fascinating and continue to study them. As most of my work on random maps is in this local topology setting, we will take some time to properly define it.

We will emphasize on the different techniques and tools that are used to study random maps. The questions we will try to answer will focus on the geometric properties of large random planar maps. After a very short survey on the current state of the art, we will address the following topics :

**Schaeffer's bijection and the UIPQ [P1, P2, P3] :** Schaeffer's bijection and its generalizations are undoubtedly among probabilists' favorite tools to study metric properties of maps. We will see how it allows to define and study the UIPQ. We will also study a variation of this bijection to study geodesic rays in the UIPQ.

**Krikun's layers decomposition and the UIPT [P10, P9] :** Krikun introduced a decomposition of planar maps into layers. This decomposition is particularly well suited to study the hulls of metric balls in random maps. This is especially true for uniform triangulations and their limit in law for the local topology, the Uniform Infinite Planar Triangulation. We will see that this decomposition allows to derive similar results for the UIPT than those obtained for the UIPQ, and even strengthen them.

**Peeling and percolation [P4] :** Local limits of random planar maps typically have a spatial Markov property. This property states that, knowing a finite part of the map, the rest of the map only depends on the known part through its boundary. This is very useful to study percolation since it allows to follow a percolation interface in a Markovian way. We will see that it leads to explicit values of percolation thresholds.

**Ising model [P11]** : Uniform models of random maps (like those converging to the UIPQ or the UIPT) belong to the universality class of the Brownian map. As a consequence, they all share the same large scale metric properties. Physicists interpret this universality class as «pure quantum gravity». There are several possibilities to escape this universality class, one of which being referred to as «coupling quantum gravity with matter» by physicists. We will couple random triangulations with an Ising model in this spirit. This new type of model has much more complex combinatorics than uniform models and a lot of questions await answers !

## Part 2 : Random graphs

*Collaborations with Nathanaël Enriquez, Gabriel Faraud, Nathan Noiry and Arvind Singh.*

The second part of this manuscript deals with random graphs. In the so-called sparse regime, where the average degree of a vertex is bounded when the size of the graph goes to infinity, a lot of questions have a geometric flavor. As for random maps, the local topology provides a nice setting to tackle a wide variety of problems. This is at the root of my interest in random graphs.

My work on these objects can be grouped into three topics :

**Spectrum of random graphs [P6, P5]** : The spectrum of operators defined on random graphs, like the adjacency matrix of finite graphs, is the source of a lot of interesting problems. In particular, for random graphs that converge in law for the local topology, the empirical spectrum of such operators converges weakly towards limiting measures that remain mysterious. My contributions to this topic are modest, and I hope to dig deeper in this direction in the future.

**Depth First exploration and long simple paths [P12, P13]** : The links between the spectrum of a random graph and its geometric properties are complex. However, it has led me to consider the following problem : What is the maximal length of a simple path in a random graph ? We will see that a partial answer can be given by a depth first exploration of the graph with techniques borrowing from random walks and fluid limits.

**Contact process and percolation by cumulative mergings [P7]** : The contact process is an interacting particle system modeling the propagation of an infection in a network. One of its remarkable features is a double phase transition for the survival of the process, with a notion of strong and weak survival. Some hints indicate that these phase transitions are captured by the local topology. However, the contact process on graphs with unbounded degrees is delicate to study. The initial motivation of this work was to provide a criterion for the survival of the process on such graphs. This will lead us to introduce a new percolation process with very interesting properties.

The rest of this manuscript is written in french. I apologize to foreign readers, but I did not want to pass on a very rare opportunity to write in my native language.

# Avant Propos

Ce document présente mes travaux de recherche effectués depuis ma thèse et listés dans la prochaine page. Le ton est supposé être peu technique et aucune démonstration n'est donnée, à l'exception de quelques heuristiques. La ligne directrice commune à tous mes travaux est l'étude des propriétés asymptotiques de grandes structures discrètes aléatoires. Deux types d'objets m'intéressent particulièrement : les cartes et les graphes que nous traitons dans deux parties essentiellement indépendantes. Nous retrouverons cependant en filigrane quelques aspects communs, en particulier la topologie locale qui sert de socle à mes travaux.

## Partie 1 : Cartes aléatoires

*Collaborations avec Marie Albenque, Nicolas Curien, Jean-François Le Gall, Grégory Miermont, Pierre Nolin et Gilles Schaeffer.*

Ma thèse portait sur la quadrangulation infinie uniforme du plan qui est la limite en loi de quadrangulations aléatoires de grande taille pour la topologie locale. Je trouve toujours les cartes planaires fascinantes et je continue de les étudier. Comme la plus grande partie de mes travaux sur les cartes s'effectue dans le cadre de la topologie locale, nous insisterons surtout sur ce point de vue.

L'accent sera mis sur les différentes techniques et outils utilisés. Les questions abordées porteront en général sur les propriétés géométriques des grandes cartes planaires aléatoires. Après un rapide état de l'art sur le domaine nous évoquerons ainsi les thèmes suivants :

**Bijection de Schaeffer et UIPQ [P1, P2, P3] :** La bijection de Schaeffer et ses généralisations est un des outils de prédilection des probabilistes pour l'étude métrique des cartes aléatoires. Nous en verrons quelques instances pour les quadrangulations et verrons comment elle permet de définir directement la quadrangulation infinie uniforme du plan (UIPQ). Nous l'utiliserons ensuite pour étudier les boules métriques et les rayons géodésiques de l'UIPQ.

**Décomposition en tranches de Krikun et UIPT [P10, P9] :** Krikun a introduit une décomposition des cartes planaires qui décrit de manière très commode les tranches entre des boules métriques de même centre et de rayons successifs. Cette décomposition est particulièrement simple dans le cas des triangulations et leur limite locale, la triangulation infinie uniforme du plan (UIPT). Nous verrons que cette décomposition permet d'obtenir des résultats analogues à ceux obtenus pour l'UIPQ avec la bijection de Schaeffer, voire même de les renforcer.

**Épluchage et percolation [P4] :** Les limites locales de cartes aléatoires ont en général une propriété de Markov spatiale. Cette propriété indique entre autres que, connaissant un morceau fini de la carte, le reste de la carte ne dépend de la partie connue qu'à travers son bord. Cette propriété est très utile pour étudier la percolation sur les cartes car elle permet de suivre de manière markovienne une

interface de percolation. Nous verrons que ceci permet de calculer des seuils de percolation de manière explicite.

**Modèle d'Ising [P11] :** Les modèles uniformes de cartes aléatoires – comme ceux convergeant vers l'UIPQ et l'UIPT – appartiennent à la classe d'universalité de la carte brownienne. En conséquence, les propriétés à grande échelle de ces modèles sont similaires. Les physiciens interprètent cette classe d'universalité comme la «gravité quantique pure». Pour tenter de sortir de cette classe d'universalité, plusieurs moyens sont possibles. Nous parlerons ici d'un de ces moyens que les physiciens interprètent comme «coupler la gravité quantique avec de la matière». Plus spécifiquement, nous couplerons des triangulations avec un modèle d'Ising. Ce nouveau type d'approche a une combinatoire beaucoup plus complexe que les modèles uniformes de cartes et beaucoup de choses sont encore à faire !

## Partie 2 : Graphes aléatoires

*Collaborations avec Nathanaël Enriquez, Gabriel Faraud, Nathan Noiry et Arvind Singh.*

La seconde partie de ce mémoire concerne l'étude de graphes aléatoires. Dans le régime dilué – où le degré moyen reste borné lorsque la taille du graphe tend vers l'infini – beaucoup de questions ont une saveur combinatoire et géométrique. Comme pour les cartes, la topologie locale s'avère un cadre fructueux pour l'étude d'une grande variété de problèmes, ce qui a suscité mon intérêt.

Mes travaux sur ces objets sont un peu plus hétéroclites que mes travaux sur les cartes aléatoires. Ils sont regroupés en trois thèmes :

**Spectre de graphes [P6, P5] :** Le spectre d'opérateurs définis sur les graphes, comme par exemple la matrice d'adjacence d'un graphe fini est une mine de questions. En particulier, pour certains modèles ayant une limite locale, la mesure spectrale empirique de ces opérateurs converge faiblement vers des mesures limites qui demeurent mystérieuses. Mes contributions à leur étude sont modestes et j'espère creuser plus sérieusement cet axe à l'avenir.

**Exploration en profondeur et longs chemins [P12, P13] :** Les liens entre le spectre d'un graphe et sa géométrie sont assez complexes. Ils m'ont cependant amenés à considérer le problème suivant : quelle est la longueur maximale d'un chemin simple dans un graphe aléatoire ? Une réponse partielle peut être apportée par un procédé d'exploration en profondeur du graphe et grâce à des techniques empruntant à la fois à l'étude des marches aléatoires et des limites fluides.

**Processus de contact et percolation par groupements cumulatifs [P7] :** Le processus de contact est un système de particules en interactions qui modélise la propagation d'une infection sur un graphe. Une de ses particularités est la présence éventuelle d'une double transition de phase pour la survie de l'épidémie, avec une notion faible et forte de survie. Certains indices indiquent que ces transitions de phase sont bien captées par la topologie locale. Cependant, le processus de contact s'avère délicat à étudier sur des graphes à degrés non bornés. La motivation initiale de ce travail est de trouver un critère de survie du processus pour de tels graphes. Ceci nous amènera à définir un nouveau processus de percolation aux propriétés intéressantes.

# Liste des travaux

Tous mes travaux sont disponibles sur ma page web <https://www.normalesup.org/~menard>

## Publications issues de la thèse

- [P1] Laurent MÉNARD. « The two uniform infinite quadrangulations of the plane have the same law ». In : *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 46.1 (2010), p. 190-208. ISSN : 0246-0203. DOI : [10.1214/09-AIHP313](https://doi.org/10.1214/09-AIHP313). URL : <http://dx.doi.org/10.1214/09-AIHP313>.
- [P2] Jean-François LE GALL et Laurent MÉNARD. « Scaling limits for the uniform infinite quadrangulation ». In : *Illinois J. Math.* 54.3 (2012), p. 1163-1203. ISSN : 0019-2082. URL : <http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1336049989>.

## Publications postérieures à la thèse

- [P3] Nicolas CURIEN, Laurent MÉNARD et Grégory MIERMONT. « A view from infinity of the uniform infinite planar quadrangulation ». In : *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 10.1 (2013), p. 45-88. ISSN : 1980-0436.
- [P4] Laurent MÉNARD et Pierre NOLIN. « Percolation on uniform infinite planar maps ». In : *Electron. J. Probab.* 19.79 (2014), p. 1-27. DOI : [10.1214/EJP.v19-2675](https://doi.org/10.1214/EJP.v19-2675). URL : <http://dx.doi.org/10.1214/EJP.v19-2675>.
- [P5] Nathanaël ENRIQUEZ et Laurent MÉNARD. « Asymptotic expansion of the expected spectral measure of Wigner matrices ». In : *Electron. Commun. Probab.* 21.58 (2016), 11pp.
- [P6] Nathanaël ENRIQUEZ et Laurent MÉNARD. « Spectra of large diluted but bushy random graphs ». In : *Random Structures and Algorithms*. 49 (2016), p. 160-184.
- [P7] Laurent MÉNARD et Arvind SINGH. « Percolation by cumulative merging and phase transition for the contact process on random graphs ». In : *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* 49.5 (2016), p. 1189-1238.
- [P8] Emmanuel JACOB, Éric LUÇON, Laurent MÉNARD, Cristina TONINELLI et Xiaolin ZENG. « Interacting particle systems ». In : *Journées MAS 2016 de la SMAI—Phénomènes complexes et hétérogènes*. T. 60. ESAIM Proc. Surveys. EDP Sci., Les Ulis, 2017, p. 246-265.
- [P9] Nicolas CURIEN et Laurent MÉNARD. « The skeleton of the UIPT, seen from infinity ». In : *Ann. H. Lebesgue* 1 (2018), p. 87-125. DOI : [10.5802/ahl.3](https://doi.org/10.5802/ahl.3). URL : <https://doi.org/10.5802/ahl.3>.

- [P10] Laurent MÉNARD. « Volumes in the uniform infinite planar triangulation : from skeletons to generating functions ». In : *Combin. Probab. Comput.* 27.6 (2018), p. 946-973. ISSN : 0963-5483. DOI : [10.1017/S0963548318000093](https://doi.org/10.1017/S0963548318000093). URL : <https://doi.org/10.1017/S0963548318000093>.
- [P11] Marie ALBENQUE, Laurent MÉNARD et Gilles SCHAEFFER. « Local convergence of large random triangulations coupled with an Ising model ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* (2020). DOI : <https://doi.org/10.1090/tran/8150>.
- [P12] Nathanaël ENRIQUEZ, Gabriel FARAUD et Laurent MÉNARD. « Limiting shape of the depth first search tree in an Erdős-Rényi graph ». In : *Random Structures and Algorithms* 56.2 (2020), p. 501-516.

## Prépublication

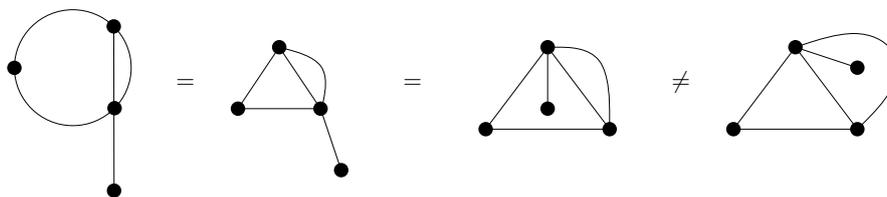
- [P13] Nathanaël ENRIQUEZ, Gabriel FARAUD, Laurent MÉNARD et Nathan NOIRY. « The depth first search algorithm on a supercritical configuration model ». In : *Preprint* (2019).

# Partie 1

## Cartes planaires

### 1.1 Introduction

Un graphe planaire est un graphe fini, connexe, et admettant un plongement propre dans la sphère de dimension deux. Le terme graphe est ici à prendre au sens large de multi-graphe, où les arêtes multiples et les boucles sont autorisées. Le qualificatif propre impose quant à lui que les images de deux arêtes du graphe par le plongement considéré ne peuvent se croiser qu'en l'image des sommets. Étant donné un graphe planaire, celui-ci peut admettre des plongements qui ne sont pas homéomorphes (voir un exemple en Figure 1.1). Une carte planaire est alors une classe d'équivalence de graphes planaires finis et connexes plongés proprement dans la sphère de dimension deux, où on identifie deux plongements de graphes s'il existe un homéomorphisme direct de la sphère mettant en correspondance les deux plongements (voir encore la Figure 1.1 pour un premier exemple).



**Figure 1.1** – Exemples de cartes planaires. Il faut les voir plongées dans la sphère, la face extérieure n'a donc pas de rôle particulier. Les trois premières sont identiques et la quatrième est différente, même si le graphe sous-jacent est le même.

Avec cette définition, les cartes sont des objets combinatoires et forment en particulier une famille dénombrable. D'autres définitions équivalentes – à partir de recollements de polygones ou encore de permutations – rendent cet aspect plus évident mais nous avons préféré donner dans ce texte uniquement la définition la plus géométrique. Une carte possède des sommets, des arêtes et aussi des faces, qui sont les composantes connexes du complémentaire du plongement de la carte et sont toutes homéomorphes à un disque. Un secteur angulaire défini par deux arêtes consécutives autour d'une face est appelé coin<sup>1</sup>.

Si  $M$  est une carte, on notera respectivement  $V(M)$ ,  $E(M)$  et  $F(M)$  les ensembles de ses sommets, de ses arêtes et de ses faces. Les cardinaux de ces trois ensembles sont alors reliés par la

1. Les coins d'une carte sont canoniquement mis en correspondance avec ses arêtes orientées, le coin correspondant à une arête orientée étant celui situé à sa gauche

relation d'Euler que nous utiliserons plus tard :

$$|V(M)| + |F(M)| - |E(M)| = 2.$$

De plus, à toute face  $f \in F(M)$ , on associera son degré  $\deg(f)$  qui est le nombre d'arêtes qu'il faut traverser pour faire le tour de la face  $f$  (une arête complètement incluse dans une face compte donc double pour son degré). Parmi les exemples classiques de cartes, on trouve les triangulations dont toutes les faces sont de degré 3, comme dans les figures 1.2 et 1.8, ou les quadrangulations dont toutes les faces sont de degré 4, comme dans la figure 1.6, mais aussi les arbres plans qui sont des cartes à une face. Dans tout ce mémoire, les cartes que nous considérerons sont enracinées, c'est à dire munies d'une arête orientée que nous appellerons la racine de la carte et notée  $\rho$ . Le sommet origine de  $\rho$  est noté  $\rho_-$  et son sommet cible noté  $\rho_+$ . Enraciner les cartes a pour effet de rendre triviales leurs symétries, ce qui facilite considérablement leur énumération. Le sommet à l'origine de la racine est appelé sommet racine et la face directement à droite de la racine est appelée face racine.

L'étude des cartes planaires remonte aux travaux de Tutte dans les années 1960 en vue d'une preuve du théorème des quatre couleurs. Même si Tutte a échoué sur ce point, ses travaux sur les cartes planaires ont eu de nombreuses retombées, en particulier en théorie de la gravité quantique en deux dimensions, née dans les années 1980.

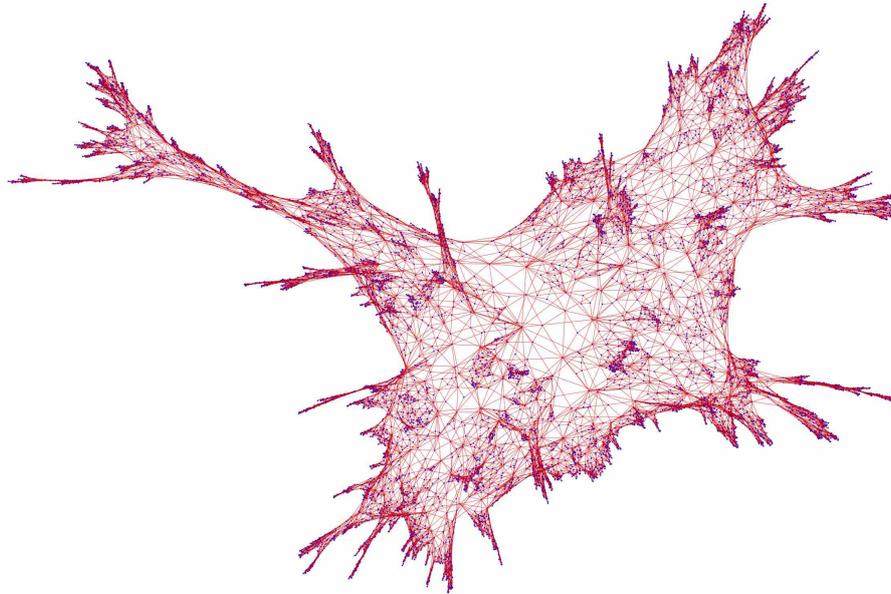
En effet, l'idée derrière cette théorie est de construire un espace métrique aléatoire «typique» afin d'unifier gravité et mécanique quantique. À l'instar du mouvement brownien et du théorème de Donsker, une approche possible pour construire un tel espace métrique aléatoire est de considérer des espaces métriques aléatoires finis et de prouver leur convergence vers un objet limite universel dans la limite d'échelle. Les candidats naturels pour ces discrétisations dans le cas de la dimension 2 sont les cartes planaires car on peut les assimiler à des espaces métriques finis, la métrique étant donnée par la distance de graphe. La bonne compréhension mathématique que l'on a de ces objets fait que les physiciens considèrent théorie de la gravité quantique en dimension 2 comme mûre.

Le manque d'une bonne compréhension de leurs analogues en dimension supérieure (qu'on ne sait même pas compter!) rend la théorie purement spéculative dans ce cas, y compris pour les physiciens. Bien entendu, dans le cas de la dimension 2, de nombreux énoncés physiques restent encore heuristiques ou conjecturels, faisant de la gravité quantique une mine de problèmes mathématiques fascinants.

C'est au début des années 2000 que les probabilistes se sont intéressés à ces questions. L'approche est en général la suivante : on définit une mesure de probabilité sur un ensemble de cartes de taille  $n$  – par exemple la mesure uniforme sur l'ensemble de toutes les cartes planaires à  $n$  arêtes, ou l'ensemble de toutes les triangulations à  $n$  faces, qui sont tous les deux des ensembles finis dont on sait calculer le cardinal et que l'on sait bien décrire – et l'on s'interroge sur les propriétés de cette mesure lorsque  $n$  tend vers l'infini. Un exemple de grande triangulation tirée selon la mesure uniforme est illustré en Figure 1.2.

Dans un premier temps, comme nous étudions des suites d'espaces métriques aléatoires, il faut préciser la topologie considérée. Une fois la topologie fixée, il faut ensuite identifier une éventuelle limite pour nos suites – qui sera donc un espace métrique aléatoire – et prouver la convergence. Les propriétés géométriques de ces espaces limites s'avèrent en général très riches et leur étude est devenue un domaine de recherche particulièrement actif. Suivant que l'on veuille étudier les cartes planaires en renormalisant les distances ou non, deux approches correspondant à deux topologies différentes se distinguent :

1. **Topologie de Gromov-Hausdorff** : Si on renormalise les distances par le diamètre typique de la carte, on cherche alors un objet limite qui serait un espace métrique aléatoire, compact,



**Figure 1.2** – Une triangulation simple (*i.e.* sans arêtes multiples) à 10 000 faces tirée suivant la mesure uniforme. Dans un premier temps la carte est générée en tant qu'objet combinatoire grâce à une bijection. Son graphe sous-jacent est ensuite plongé dans l'espace avec un algorithme dit «à ressorts».

continu et ayant la topologie de la sphère. La topologie classique pour ce type de convergence est la topologie dite de Gromov-Hausdorff [68]. Comme conjecturé par les physiciens, la limite que l'on obtient est universelle : elle est commune à beaucoup de modèles de cartes aléatoires. C'est la fameuse carte brownienne et les premiers résultats complets de convergence ont été établis indépendamment par Le Gall [94] et Miermont [105] dans des articles maintenant célèbres (leurs résultats couvrent en particulier les triangulations et les quadrangulations uniformes). Ces articles succèdent aux travaux de Marckert et Mokkadem [101] et s'appuient sur les articles de Le Gall [90, 93].

2. **Topologie de Benjamini-Schramm** : Si on ne renormalise pas les distances dans les cartes, on s'attend alors à une convergence vers des espaces métriques aléatoires discrets et non compacts qui sont des versions aléatoires des réseaux euclidiens classiques. La bonne topologie est la topologie locale de Benjamini et Schramm [16] (voir aussi le très bel article de survol d'Aldous et Steele [7]), et le premier résultat de convergence est dû à Angel et Schramm [13] pour les triangulations uniformes. Les objets limites ne sont bien sûr pas universels dans ce cas, mais beaucoup de leur propriétés métriques le sont : par exemple le volume des boules de rayon  $r$  (le nombre de sommets à distance de graphe inférieure à  $r$  autour d'un sommet distingué) est de l'ordre de  $r^4$  pour les modèles de cartes uniformes.

Il y a bien sûr des liens entre les deux types d'objets limites à travers la notion d'espace métrique tangent. Une version non compacte de la carte brownienne – le plan brownien – a ainsi été étudiée par Curien et Le Gall [53]. Cet espace métrique aléatoire continu non compact est le plan tangent à la carte brownienne en sa racine et aussi la limite d'échelle de bon nombre de limites locales de cartes aléatoires. Les lectrices ou les lecteurs cherchant des articles de survol sur les cartes aléatoires pourront consulter celui de Le Gall pour l'ICM [91], les notes de Saint Flour de Miermont [103] ou de

Curien [49] pour la partie probabiliste. Pour l'aspect combinatoire, le chapitre sur le sujet écrit par Schaeffer dans le livre [120] est une des références les plus récentes.

L'essentiel de mes travaux sur les cartes aléatoires porte sur la deuxième approche. Avant de présenter plus en détail cette topologie locale et mes contributions, commençons par présenter la combinatoire des cartes planaires, avec une attention particulière portée sur les triangulations et les quadrangulations que nous étudierons ensuite.

## 1.2 Un peu de combinatoire des cartes

### 1.2.1 Combinatoire analytique

Le père de la combinatoire énumérative des cartes est sans aucun doute Tutte, qui est le premier à avoir obtenu des formules explicites pour l'énumération de plusieurs familles de cartes planaires dans ses articles [122, 123]. Ses méthodes reposent principalement sur l'utilisation de séries génératrices et de la méthode symbolique. Comme nous allons avoir besoin de formules sur les triangulations, nous allons présenter ces techniques à travers leur énumération. Ceci nous sera aussi très utile pour l'étude des triangulations couplées avec un modèle d'Ising de la section 1.7.

Nous avons déjà défini les triangulations enracinées et mentionné la relation d'Euler un peu plus tôt dans ce mémoire. Si  $T$  est une triangulation, chaque face est bordée par 3 arêtes et chaque arête apparaît dans 2 faces (éventuellement deux fois la même). Ceci impose donc la relation suivante entre le nombre d'arêtes et le nombre de faces de  $T$  :

$$3|F(T)| = 2|E(T)|.$$

La relation d'Euler donne alors

$$|V(T)| = 2 + |E(T)| - |F(T)| = 2 + \frac{|E(T)|}{3}.$$

La connaissance du nombre d'arêtes de  $T$  équivaut donc à la connaissance du nombre de ses faces ou du nombre de ses sommets. Pour compter les triangulations d'une taille fixée, nous avons donc le choix sur ce que nous entendons par taille (nombre de sommets, d'arêtes ou de faces) car tous ces choix seront équivalents. De plus, certaines congruences sont imposées sur la taille d'une triangulation (par exemple le nombre d'arêtes est toujours multiple de 3).

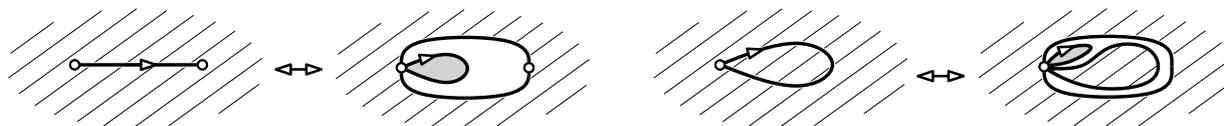
Choisissons donc de compter les triangulations en fonction de leur nombre d'arêtes et notons  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des triangulations enracinées ayant  $n$  arêtes. Nous pouvons encoder les cardinaux que nous cherchons à calculer par la série génératrice

$$\mathcal{Z}(t) = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{T}_n| t^n \in \mathbb{Q}[[t]].$$

L'idée de base de la méthode symbolique est alors de trouver une décomposition des triangulations de  $\mathcal{T}_n$  en triangulations de taille inférieure, et de traduire cette décomposition par une équation vérifiée par  $\mathcal{Z}$ . En fonction de l'équation obtenue, on peut tenter d'avoir des formules exactes pour les nombres  $|\mathcal{T}_n|$  en la résolvant ou à l'aide de l'inversion de Lagrange. Si on ne sait pas résoudre l'équation, on peut au moins espérer avoir le comportement asymptotique des cardinaux  $|\mathcal{T}_n|$  grâce à un peu d'analyse complexe. Ces techniques font partie de l'arsenal à la fois puissant et pratique de la combinatoire analytique, qui est merveilleusement exposée dans le livre de Flajolet et Sedgewick [64].

Pour décomposer nos triangulations, le plus naturel est de leur enlever une arête. On obtient une carte ayant certes moins d'arêtes mais qui n'est plus une triangulation. Il nous faut donc étendre la

famille de cartes que nous voulons étudier pour espérer avoir un système clos. Nous pouvons par exemple prendre les triangulation dites du  $p$ -gone, qui sont les cartes ayant toutes leurs faces de degré 3, sauf la face racine (celle à droite de la racine) qui est un polygone simple à  $p$  arêtes. Notons  $\mathcal{T}_{n,p}$  l'ensemble des triangulations du  $p$ -gone à  $n$  arêtes où, par convention, la carte constituée d'une arête orientée simple est considérée comme une triangulation du 2-gone.



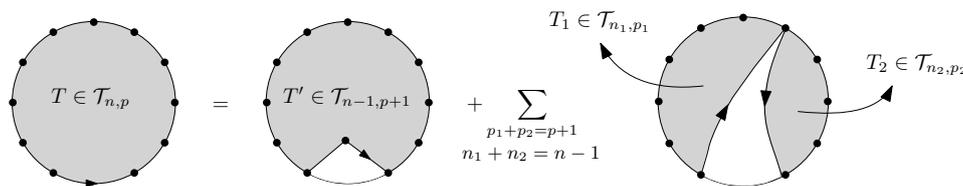
**Figure 1.3** – Transformation de la racine d'une triangulation de la sphère (la racine étant une boucle dans le cas de droite).

Notre problème initial étant de compter les triangulations de la sphère, il faut faire le lien entre celles-ci et les triangulations d'un polygone. Le plus simple est d'effectuer l'opération suivante illustrée en Figure 1.3 : partant d'une triangulation de la sphère, ouvrir l'arête racine en une arête double et insérer une boucle au coin correspondant à l'origine de la racine. En orientant la boucle ajoutée de sorte à ce que son intérieur soit à sa droite, on obtient une triangulation du 1-gone. Cette opération réalise une bijection de  $\mathcal{T}_n$  vers  $\mathcal{T}_{n+2,1}$  et compter les triangulations du 1-gone est bien équivalent à compter les triangulations de la sphère.

La Figure 1.4 illustre les différentes possibilités lorsque l'on retire l'arête racine d'une triangulation  $T \in \mathcal{T}_{n,p}$  avec des conventions de ré-enracinement. Deux cas sont possibles suivant où se trouve le troisième sommet de la face à gauche de l'arête racine : soit ce sommet n'appartient pas à la face racine et on obtient une triangulation  $T' \in \mathcal{T}_{n-1,p+1}$ , soit ce sommet est sur la face racine et on obtient deux triangulations  $T_1 \in \mathcal{T}_{n_1,p_1}$  et  $T_2 \in \mathcal{T}_{n_2,p_2}$  avec  $n_1 + n_2 = n - 1$  et  $p_1 + p_2 = p + 1$ . Ceci se traduit par la relation de récurrence suivante valable pour tout  $n$  et tout  $p \neq 2$  :

$$|\mathcal{T}_{n,p}| = |\mathcal{T}_{n-1,p+1}| + \sum_{\substack{p_1+p_2=p+1 \\ n_1+n_2=n-1}} |\mathcal{T}_{n_1,p_1}| \cdot |\mathcal{T}_{n_2,p_2}| \quad (1.1)$$

Pour  $p = 2$ , cette relation est encore valable à condition de rajouter 1 pour prendre en compte la triangulation réduite à une unique arête qui n'est pas décomposable. Les lectrices et les lecteurs attentifs auront par ailleurs remarqué que cette triangulation spéciale est nécessaire pour initialiser cette récurrence.



**Figure 1.4** – Décomposition à la Tutte de triangulations.

Définissons maintenant les séries génératrices

$$Z_p(t) = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{T}_{n,p}| t^n \quad \text{and} \quad Z(t, y) = \sum_{p \geq 1} Z_p(t) y^p.$$

La variable  $y$  est dite «catalytique» car son introduction est nécessaire pour calculer  $Z_1(t)$ . L'équation de récurrence (1.1) se traduit par l'équation suivante dans  $\mathbb{Q}[y][[t]] \subset \mathbb{Q}[[t, y]]$  :

$$Z(t, y) = ty^2 + \frac{t}{y} (Z(t, y) - yZ_1(t)) + \frac{t}{y} Z^2(t, y)$$

qui est une équation à une variable catalytique. La résolution de cette équation peut se faire par la méthode quadratique de Tutte [122], ou encore par la méthode plus robuste de Bousquet-Mélou et Jehanne [34]. Nous ne détaillerons pas cette résolution par soucis de concision et donnons uniquement la solution obtenue par inversion de Lagrange sur une paramétrisation ad hoc :

$$|\mathcal{T}_{3(k+p-1)-p,p}| = 4^{k-1} \frac{p(2p)! (2p+3k-5)!!}{(p!)^2 k!(2p+k-1)!!}.$$

Cette formule est valable pour tous  $k \geq 0$  et  $p \geq 1$  (avec  $n!! = n(n-2)(n-3)\dots$ ). La forme particulière  $3n-p$  du nombre d'arêtes est imposée par la relation d'Euler et le fait qu'on considère des triangulations avec un bord de longueur  $p$ . En jouant peu avec la formule de Stirling, on trouve le comportement asymptotique suivant pour tout  $p > 0$  fixé :

$$|\mathcal{T}_{3n-p,p}| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C(p) \cdot t_c^{-(3n-p)} n^{-5/2}, \quad (1.2)$$

où  $C(p)$  peut se calculer de manière explicite et où

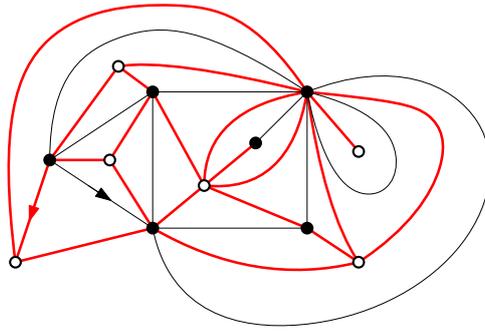
$$t_c = \left( \frac{1}{12\sqrt{3}} \right)^{1/3} \quad (1.3)$$

ne dépend pas de  $p$ . Une conséquence de ce comportement asymptotique est que toutes les séries  $Z_p(t)$  ont le même rayon de convergence  $t_c$ . Ce fait est assez général pour les séries génératrices de cartes à bord et s'avère crucial pour l'étude des grandes cartes aléatoires. L'autre caractéristique remarquable de l'asymptotique (1.2) est le facteur polynomial  $n^{-5/2}$  qui apparaît systématiquement dans l'énumération de familles de cartes planaires. Il est relié de manière heuristique aux propriétés fractales des cartes aléatoires, et les modèles ayant le même exposant  $5/2$  que les triangulations uniformes sont conjecturés comme appartenant à la classe d'universalité de la carte brownienne.

## 1.2.2 Combinatoire bijective

La combinatoire bijective propose d'expliquer – ou de découvrir – des formules énumératives en explicitant des bijections entre différentes familles d'objets. Avant de parler des fameuses bijections «à la Schaeffer» entre certaines familles de cartes et d'arbres, parlons d'un exemple beaucoup plus élémentaire qui nous servira un peu plus tard. Il s'agit de la bijection de Tutte, entre l'ensemble  $\mathcal{M}_n$  des cartes à  $n$  arêtes et l'ensemble  $\mathcal{Q}_n$  des quadrangulations à  $n$  faces présentée dans la figure 1.5. Connaissant cette bijection, on peut annoncer que le nombre de quadrangulations à  $n$  faces est égal au nombre de cartes à  $n$  arêtes. Bien sûr, cette bijection propose plus que cette simple information et permet d'étudier certaines propriétés des cartes via les quadrangulations ou inversement, comme nous le verrons dans la section 1.6.

Venons en maintenant à la bijection Cori-Vauquelin-Schaeffer (CVS) [48, 119] et ses généralisations, qui constituent à ce jour les outils principaux pour l'étude des propriétés métriques des grandes cartes aléatoires. Dans la version que nous utiliserons dans ce mémoire (présentée dans l'article fondateur de Chassaing et Schaeffer [44]), cette bijection établit une correspondance entre les quadrangulations enracinées à  $n$  faces munies d'un sommet distingué (on dit de telles quadrangulations qu'elles sont



**Figure 1.5** – Bijection de Tutte. Partant d'une carte quelconque (ici les sommets et les arêtes en noir), ajouter un sommet (ici en blanc) à l'intérieur de chaque face de la carte et relier ces sommets à chaque coin de la face (ici en rouge). Les nouvelles arêtes et les sommets de la carte d'origine ainsi que ceux ajoutés forment une quadrangulation. De plus chaque arête de la carte de départ correspond à une face de la quadrangulation. La racine de la quadrangulation est l'arête directement à droite de la racine de la carte de départ.

pointées) d'une part, et les couples formés par un arbre planaire étiqueté à  $n$  arêtes et d'un signe  $\eta \in \{+, -\}$  d'autre part (un arbre est dit étiqueté lorsque tous ses sommets sont étiquetés d'un entier relatif, la racine étant d'étiquette nulle, et deux sommets voisins ayant des étiquettes différant au plus de 1).

Une première conséquence de cette bijection est un calcul très simple du nombre de quadrangulations à  $n$  faces. En effet, il y a  $\text{Cat}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  arbres planaires à  $n$  arêtes et  $3^n$  façons d'étiqueter chaque tel arbre. En prenant en compte le fait qu'une quadrangulation à  $n$  faces possède  $n + 2$  sommets d'après la relation d'Euler et le signe  $\eta$  de la bijection, on obtient la jolie formule :

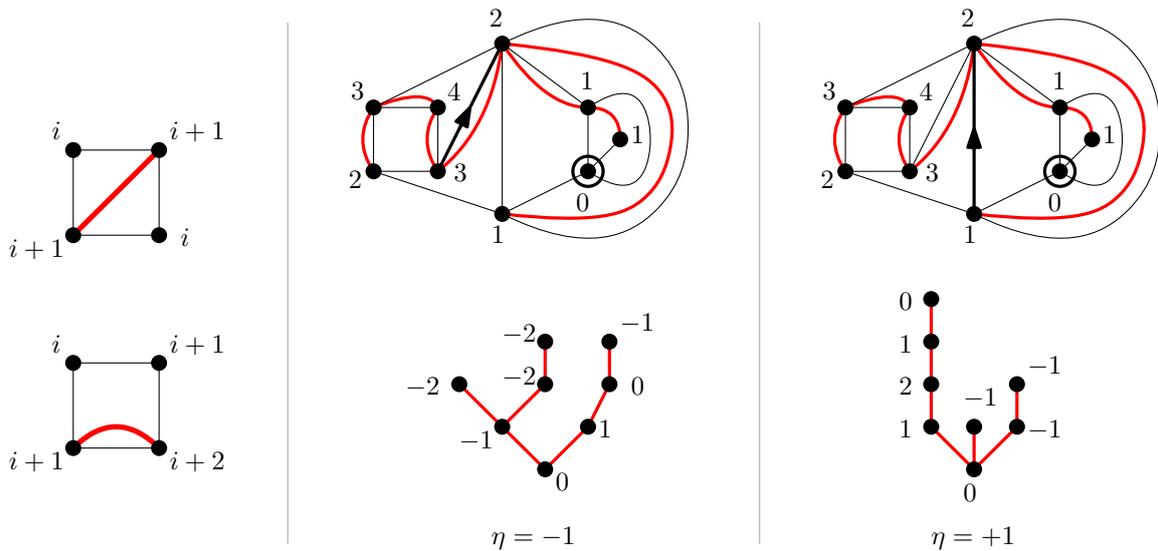
$$|\mathcal{Q}_n| = |\mathcal{M}_n| = \frac{2 \cdot 3^n}{n+2} \text{Cat}(n).$$

Bien entendu, l'intérêt de cette bijection est plus profond que la simple mise en correspondance entre deux ensembles de même cardinal. En particulier elle encode une partie de l'information métrique des quadrangulations dans les arbres correspondants. Pour s'en rendre compte, il suffit de voir comment construire l'arbre étiqueté correspondant à une quadrangulation pointée. La procédure, illustrée en Figure 1.6, est la suivante. Soit  $(Q, \delta)$  une quadrangulation pointée. On définit dans un premier temps un étiquetage  $\tilde{\ell}$  des sommets de  $Q$  par leur distance au sommet pointé :  $\tilde{\ell}(v) := d(v, \delta)$ . Une quadrangulation étant bipartie, deux sommets voisins dans  $Q$  auront une étiquette différant exactement de 1. Ceci impose que les étiquettes autour d'une face de  $Q$  dans le sens horaire ne peuvent être que du type  $(i, i+1, i+2, i+1)$  ou  $(i, i+1, i, i+1)$  pour un certain entier  $i$ . La seconde étape de la bijection après l'étiquetage  $\tilde{\ell}$  des sommets de  $Q$  est de dessiner une arête supplémentaire pour chaque face de  $Q$  d'après les règles de la Figure 1.6. Le graphe  $\tau$  formé par ces arêtes supplémentaires est un arbre, dont l'ensemble des sommets est exactement  $V(Q) \setminus \{\delta\}$ . Cet arbre est déjà plongé dans le plan et il suffit de l'enraciner pour en faire un arbre planaire, ce que l'on fait au coin de l'arête racine de  $Q$  ayant la plus grande étiquette (voir Figure 1.6) et on note  $\eta = -1$  si ce coin correspond à l'origine  $\rho_-$  de la racine de  $Q$ ,  $\eta = +1$  sinon. Pour terminer, on translate toutes les étiquettes des sommets par l'étiquette de la racine  $\emptyset$  de  $\tau$  :  $\ell(v) := \tilde{\ell}(v) - \tilde{\ell}(\emptyset)$ .

On note alors

$$\Phi(Q, \delta) = ((\tau, \ell), \eta)$$

qui est la bijection CVS des quadrangulations vers les arbres. On notera que si  $\delta = \rho_-$  et qu'on ne retranche pas  $\ell(\emptyset)$  aux étiquettes de l'arbre construit, il n'y a plus besoin du signe  $\eta$  et la bijection



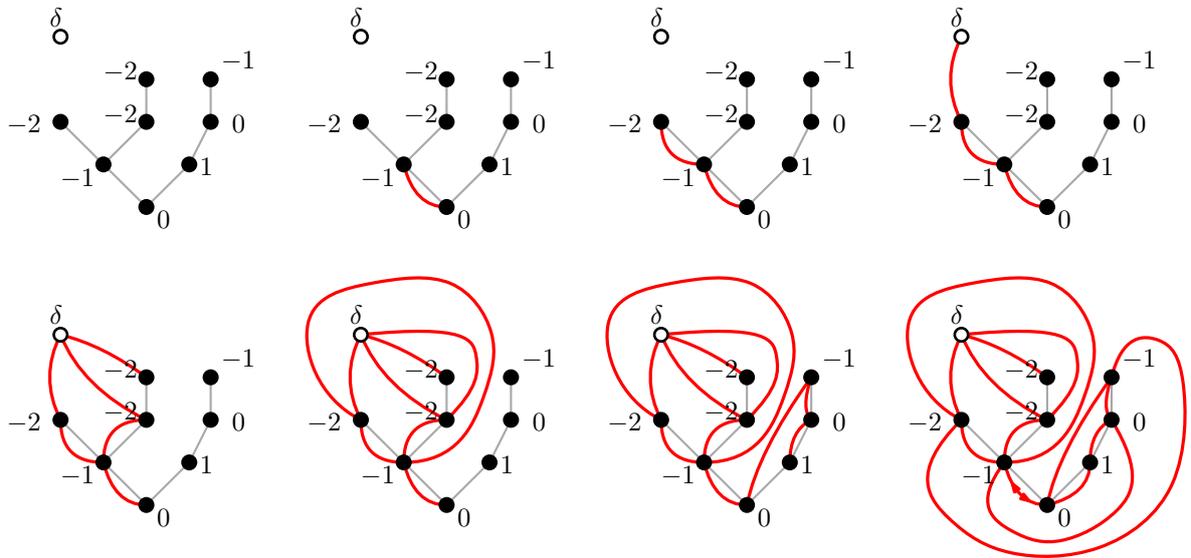
**Figure 1.6** – Bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer. Les étiquettes des sommets de la quadrangulation sont les distances au sommet marqué. À gauche les règles pour construire une arête de l'arbre par face de la quadrangulation, en fonction des deux possibilités pour les étiquettes des sommets autour de cette face. On notera que la face externe est traitée comme toutes les autres et que les arêtes rouges forment un arbre dont les sommets sont tous les sommets de la carte à part le sommet marqué.

met en correspondance les quadrangulations et les arbres dits bien étiquetés, pour lesquels toutes les étiquettes sont strictement positives et la racine a pour étiquette 1. On notera la bijection dans ce cas particulier  $\Phi^+$ .

La construction inverse, illustrée en Figure 1.7 est aussi remarquablement simple. Partant d'un arbre planaire étiqueté  $((\tau, \ell))$  à  $n$  arêtes plongé dans la sphère, on parcourt ses  $2n$  coins dans le sens horaire. On relie alors chacun des coins de  $\tau$  adjacent à un sommet d'étiquette  $i$  au premier coin adjacent à un sommet d'étiquette  $i - 1$  qui le suit. Les coins adjacents à un sommet d'étiquette minimale ne sont reliés à aucun autre par cette procédure et on les relie tous à un sommet supplémentaire  $\delta$  placé en dehors du plongement de  $\tau$ . Cette construction peut se faire de manière à ce que toutes les arêtes soient dessinées sans se croiser, et elle est unique à homéomorphisme direct près sous ces contraintes. En effaçant les arêtes de  $\tau$ , on obtient une quadrangulation  $Q$  à  $n$  faces. Son arête racine est l'arête émergeant du coin racine de  $\tau$  et son orientation est donnée par un signe  $\eta$ . De plus le sommet  $\delta$  ajouté correspond à un sommet marqué de  $Q$ . Cette construction donne donc

$$(Q, \delta) = \Phi^{-1}((\tau, \ell), \eta).$$

Finissons cette courte présentation de la combinatoire bijective des cartes par mentionner certaines des nombreuses généralisations de la bijection CVS. En particulier la bijection de Bouttier-Di Francesco-Guitter [37] met en bijection les cartes planaires sans restrictions sur le degrés de leurs faces avec des arbres étiquetés ayant quatre types de sommets différents. La bijection de Chapuy-Marcus-Schaeffer [42] permet de traiter des cartes de genre supérieur et la bijection de Miermont [104] porte sur des cartes multi-pointées. D'autres approches à base d'arbres bourgeonnants et d'orientations des cartes [4, 20] ainsi que des bijections avec des marches dans le quart de plan [21] se sont avérées fructueuses.



**Figure 1.7** – Bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer, d'un arbre étiqueté vers une quadrangulation. L'orientation de la racine de la quadrangulation obtenue dépend du signe  $\eta$  non précisé ici.

### 1.3 Limites locales de cartes

Maintenant que nous avons présenté les cartes planaires et les outils dont nous aurons besoin pour les étudier, nous allons présenter la topologie locale et des résultats de convergence en loi dans cette topologie pour certains modèles de cartes aléatoires. Les objets limites obtenus sont au centre de mes travaux sur les cartes aléatoires.

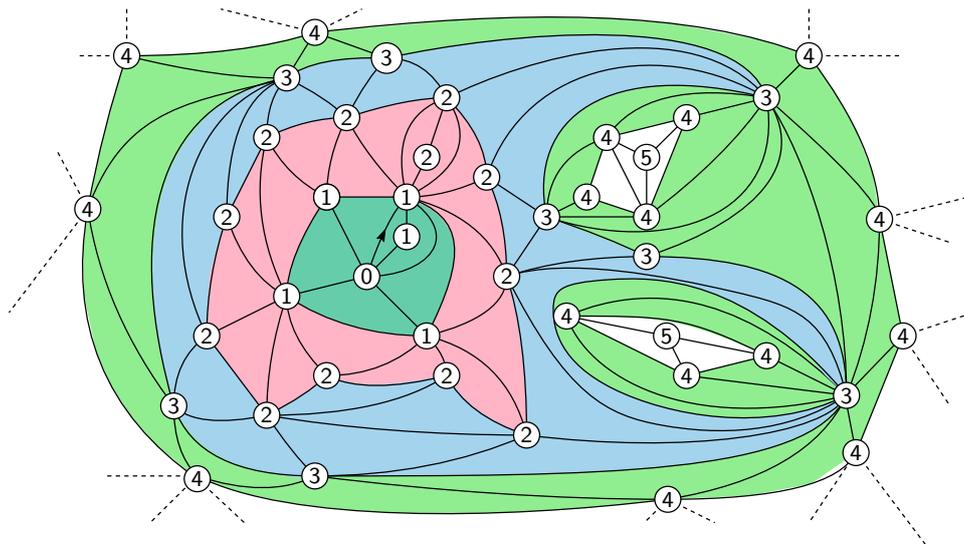
Notons  $\mathcal{M}_f$  l'ensemble des cartes planaires enracinées finies. Si  $M \in \mathcal{M}_f$ , on définit  $B_r(M)$  la boule de rayon  $r$  dans  $M$  comme la sous-carte de  $M$  constituée de tous ses sommets à distance inférieure à  $r$  de sa racine et des arêtes joignant ces sommets (si  $r = 0$ , on prend uniquement l'arête racine). La figure 1.8 illustre cette définition sur une triangulation.

La topologie locale (parfois aussi appelée topologie de Benjamini-Schramm [16]) est basée sur l'idée très simple suivante : on dira que deux cartes sont proches si leurs boules respectives de rayon  $r$  sont identiques pour une grande valeur de  $r$ . L'article de survol d'Aldous et Steele [7] est une très bonne entrée en la matière sur le sujet. Cette topologie est métrisable avec la distance suivante entre deux éléments de  $\mathcal{M}_f$  :

$$d_{\text{loc}}(M, M') = 2^{-\sup\{r \geq 0 : B_r(M) = B_r(M')\}}.$$

Le complété  $(\mathcal{M}, d_{\text{loc}})$  de l'espace métrique  $(\mathcal{M}_f, d_{\text{loc}})$  est alors un espace polonais et les éléments de  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_f$  sont appelés cartes infinies. En particulier, les graphes connexes enracinés, infinis mais localement finis  $G$ , munis d'un ordre cyclique autour de chaque sommet, tels que l'on peut plonger tous les sous graphes  $(B_r(G))_{r \geq 0}$  de façon cohérente dans le plan, et tels que l'ensemble des sommets de l'union de tous ces plongements n'a pas de point d'accumulation sont des éléments de  $\mathcal{M}$  que nous appellerons cartes infinies du plan. Ces cartes infinies particulières ont une propriété topologique importante que nous retrouverons dans les limites locales de grandes cartes aléatoires : elle n'ont qu'un seul *bout*. Ceci signifie que parmi les composantes connexes du complémentaire d'une partie finie, une seule sera infinie (c'est par exemple le cas de  $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 2$  mais pas de  $\mathbb{Z}$ ).

Pour montrer qu'une suite de cartes aléatoires fines  $(\mathbf{C}_n)_n$  de lois  $(\mathbb{P}_n)_n$  converge en loi vers une carte aléatoire infinie  $\mathbf{C}_\infty$  de loi  $\mathbb{P}$ , il suffit alors de montrer que pour tout  $r \geq 0$  et toute carte finie



**Figure 1.8** – Différentes boules dans une triangulation. Les distances à la racine sont indiquées sur les sommets.

déterministe  $\Delta$  on a la convergence :

$$\mathbb{P}_n(B_r(\mathbf{C}_n) = \Delta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(B_r(\mathbf{C}_\infty) = \Delta). \quad (1.4)$$

Lorsque  $\mathbb{P}_n$  est la loi uniforme sur une famille assez simple de cartes de taille  $n$  (par exemple les triangulations ou les quadrangulations), une bonne compréhension de la combinatoire de cette famille permet d'établir la convergence (1.4). En effet, au vu de la Figure 1.8, une fois fixé l'intérieur de la boule  $B_r(\mathbf{C}_n)$ , il faut compter le nombre de manières possibles de boucher les «trous» de cette boule. Ceci est rendu possible grâce à des formules énumératives exactes pour les cartes dites «à bord» similaires à la formule (1.2), et une analyse asymptotique donne la limite des probabilités  $\mathbb{P}_n(B_r(\mathbf{C}_n) = \Delta)$ .

Preons un exemple concret avec les triangulations de la sphère que nous avons énumérées en section 1.2.1 (rappelons qu'une triangulation de la sphère à  $3n$  arêtes est assimilable à une triangulation du 1-gone avec  $3n + 2$  arêtes). Notons donc  $\mathbf{T}_n$  une triangulation de la sphère choisie uniformément parmi les triangulations ayant  $3n$  arêtes et  $\mathbb{P}_n$  la loi de  $\mathbf{T}_n$ . La figure 1.8 donne un exemple de boule de rayon 1 ayant 11 arêtes au total et dont la frontière est constituée d'un seul cycle simple de longueur 4. Notons  $\Delta_1$  cet exemple de boule. Pour fabriquer une triangulation à  $3n$  arêtes ayant  $\Delta_1$  comme boule de rayon 1, il suffit de lui accoler<sup>2</sup> une triangulation à bord simple de longueur 4 et ayant  $3n - 7$  arêtes en comptant celles du bord. On obtient donc, en utilisant la formule 1.2,

$$\mathbb{P}_n(B_1(\mathbf{T}_n) = \Delta_1) = \frac{|\mathcal{T}_{3n-7,4}|}{|\mathcal{T}_{3n+2,1}|} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{C(4) t_c^{-(3n-7)} n^{-5/2}}{C(1) t_c^{-(3n+2)} n^{-5/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{C(4)}{C(1)} t_c^5.$$

2. Ceci nécessite d'avoir fixé au préalable une règle déterministe pour enraciner les bords d'une boule. Nous omettons ce détail pour faciliter la lecture.

Les autres boules apparaissant dans la figure 1.8 se traitent de manière similaire, mais il faut prendre en compte le fait que les boules de rayon 3 et 4 ont une frontière comportant plusieurs cycles, ce qui complexifie un peu le calcul.

Une fois ces calculs traités, il reste une dernière difficulté technique à surmonter. On montre en effet que les probabilités  $\mathbb{P}_n(B_r(\mathbf{C}_n) = \Delta)$  convergent vers des nombres  $p_{r,\Delta} \in [0, 1]$ . Il faut alors démontrer que ces nombres définissent bien une mesure de probabilité sur les cartes infinies. Deux approches permettent d'établir ce fait : on peut soit démontrer que la suite de variables aléatoires  $(\mathbf{C}_n)$  est tendue comme le font Angel et Schramm [13] et d'autres après eux ; soit directement démontrer que les nombres  $p_{r,\Delta}$  définissent bien une mesure de probabilité sur l'ensemble des cartes infinies, comme l'a fait Krikun pour les triangulations [86] et les quadrangulations [87].

Mes travaux sur les cartes aléatoires portent essentiellement sur les modèles définis dans le théorème suivant :

**Théorème 1.3.1 ([13] : triangulations, [87] : quadrangulations, [P4] : cartes générales)**

Pour tout  $n \geq 2$ , soit  $\mathbf{T}_n$  une triangulation enracinée choisie uniformément parmi les triangulations enracinées à  $3n$  arêtes. De manière similaire,  $\mathbf{Q}_n$  est une quadrangulation uniforme à  $n$  faces et  $\mathbf{M}_n$  est une carte uniforme à  $n$  arêtes. On a les convergences en loi suivantes au sens de  $d_{\text{loc}}$  :

$$\mathbf{T}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{T}_\infty, \quad \mathbf{Q}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{Q}_\infty \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{M}_\infty,$$

où  $\mathbf{T}_\infty$  est une triangulation infinie du plan aléatoire appelée UIPT (pour Uniform Infinite Planar Triangulation),  $\mathbf{Q}_\infty$  est une quadrangulation infinie du plan aléatoire appelée UIPQ et  $\mathbf{M}_\infty$  est une carte infinie du plan aléatoire appelée UIPM.

Dans les prochains paragraphes de ce document, nous allons présenter mes travaux sur les cartes infinies aléatoires définies dans le théorème précédent en mettant l'accent sur les outils utilisés.

Ainsi, en Section 1.4, nous étudierons l'UIPQ grâce à deux variantes de la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer qui nous permettront d'en étudier les propriétés métriques. Nous avons déjà en effet aperçu que ce type de bijection encode les distances des sommets d'une quadrangulation à la racine. Nous verrons aussi que ces bijections permettent d'étudier les propriétés de certaines géodésiques. En effet, l'arbre construit par ces bijections pour des cartes finies peut être vu comme une version discrète du «cut locus» des variétés riemanniennes. Ce «cut locus» se retrouve en général dans la limite des cartes aléatoires, que ce soit en limite d'échelle ou en limite locale. Le travail de Jean-François Le Gall sur la carte brownienne [90] exploite de manière magistrale cette idée. Nous en verrons une instance beaucoup plus modeste en étudiant les rayons géodésiques de l'UIPQ.

Dans les sections 1.5 et 1.6, nous tirerons profit de la propriété de Markov spatiale des cartes aléatoires pour étudier les propriétés métriques de l'UIPT ainsi que la percolation sur l'UIPQ et l'UIPM. Cette propriété – similaire à la propriété de Markov spatiale des SLE ou du champ libre gaussien – est classique pour les limites locales de modèles uniformes de cartes aléatoires et est en général facile à obtenir directement à partir de formules énumératives asymptotiques comme celle que nous avons présenté pour les triangulations à bord dans l'équation (1.2). De manière informelle, cette propriété annonce que conditionnellement à la connaissance d'une partie finie ayant un bord constitué d'un unique cycle, la loi de la partie de la carte infinie uniforme remplissant ce cycle ne dépend que du périmètre du cycle. Cette propriété se généralise très bien à une partie ayant un bord constitué de plusieurs cycles disjoints : dans ce cas nous savons qu'un seul des morceaux de la carte infinie remplissant ces trous est infini (la carte possède un unique bout). Conditionnellement à la connaissance du morceau infini, les lois des morceaux sont indépendantes, explicites, et ne dépendent

que des périmètres respectifs du bord. Cette propriété a d'abord été utilisée de manière heuristique par Watabiki pour définir l'épluchage (ou *peeling*) des cartes [127], puis de manière rigoureuse par Angel [11]. Elle est aussi à l'origine d'une décomposition très pratique des cartes due à Krikun [86, 87] qui est de plus en plus populaire.

Enfin, dans la section 1.7, nous repartirons de zéro pour définir la limite locale de triangulations aléatoires couplées à un modèle d'Ising. Une grosse partie du travail sera de nature combinatoire et consistera à obtenir des formules asymptotiques similaires à la formule (1.2). Nous suivrons ensuite la démarche exposée dans cette section pour définir un objet limite, avec un lemme de tension simplissime comparé à la complexité du modèle.

## 1.4 UIPQ et bijection de Schaeffer

### 1.4.1 Extension de la bijection de Schaeffer au cas infini

Parallèlement à Krikun [87] qui a défini la quadrangulation infinie uniforme du plan avec une approche similaire à celle exposée à la section précédente, Chassaing et Durhuus [43] ont introduit une autre UIPQ à travers une extension de la bijection de Schaeffer. Tout d'abord, ils étudient la loi de l'arbre aléatoire bien étiqueté  $\theta_n = \Phi^+(\mathbf{Q}_n)$ , où nous rappelons que  $\mathbf{Q}_n$  est une quadrangulation à  $n$  faces de loi uniforme et que  $\Phi^+$  est la bijection de Schaeffer positive introduite en Section 1.2.2. Ils démontrent que  $\Phi^+(\mathbf{Q}_n)$  converge en loi pour la topologie locale vers un arbre bien étiqueté infini aléatoire  $\theta_\infty$  et donnent la description de  $\theta_\infty$  suivante qui n'est pas sans rappeler celle de l'arbre de Kesten [82], que nous croiserons un peu plus tard :

- Presque sûrement,  $\theta_\infty$  possède une unique lignée infinie, appelée tronc.
- Le processus des étiquettes le long de ce tronc est un processus de Markov inhomogène ayant des probabilités de transition explicites.
- Conditionnellement aux étiquettes du tronc, les sous arbres de  $\theta_\infty$  à gauche et à droite de chaque sommet du tronc sont indépendants et presque sûrement finis (plus précisément, ce sont des arbres de Galton Watson critiques, étiquetés de manière uniforme et conditionnés à avoir des étiquettes strictement positives).

Une fois ceci établi, il est facile d'étendre la bijection de Schaeffer à  $\theta_\infty$  en reliant chaque coin de  $\theta_\infty$  au premier coin d'étiquette strictement plus petite qui le suit en parcourant l'arbre dans le sens anti-horaire (pour les coins d'étiquette 1, il faut ajouter un sommet d'étiquette 0). Voir la Figure 1.9 pour une illustration. Cette construction, notée  $\Phi_\infty^+$ , est une application de l'ensemble des arbres bien étiquetés ayant une unique lignée infinie dans l'ensemble des quadrangulations infinies du plan, et son domaine de définition est étendu aux arbres finis en la faisant coïncider avec la bijection de Schaeffer  $\Phi^+$  sur cet ensemble. L'image  $\mathbf{Q}_\infty^+$  de  $\theta_\infty$  par  $\Phi_\infty^+$  est une quadrangulation infinie du plan aléatoire que Chassaing et Durhuus étudient à travers les propriétés des étiquettes de l'arbre  $\theta_\infty$  qui sont les distances à la racine des sommets de la quadrangulation.

Ma thèse portait sur cette construction et répond aux deux questions suivantes :

1. La quadrangulation infinie aléatoire  $\mathbf{Q}_\infty^+$  de Chassaing et Durhuus est-elle le même objet que l'UIPQ  $\mathbf{Q}_\infty$  construite par Krikun ?
2. Peut-on obtenir une limite d'échelle pour le profil métrique de l'UIPQ grâce à la construction de Chassaing et Durhuus ?

Le premier point est traité dans mon article [P1] et la réponse est positive :

#### **Théorème 1.4.1 ([P1])**

| La quadrangulation infinie aléatoire  $\mathbf{Q}_\infty^+$  de Chassaing et Durhuus a la même loi que l'UIPQ  $\mathbf{Q}_\infty$

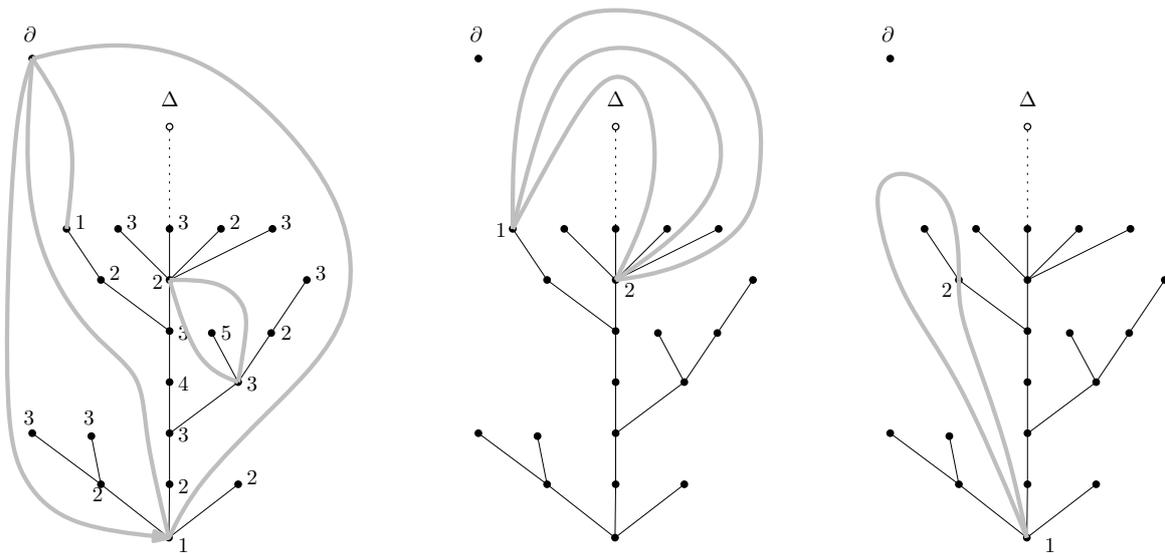


Figure 1.9 – Extension  $\Phi_\infty^+$  de la bijection de Schaeffer.

construite par Krikun. Autrement dit, la loi de l'UIPQ est la mesure image de la loi de l'arbre infini uniforme  $\theta_\infty$  par l'extension  $\Phi_\infty^+$  de la bijection CVS.

La principale difficulté pour démontrer ce résultat vient du fait que l'application  $\Phi_\infty^+$  n'est pas continue pour la topologie locale. En effet, deux arbres étiquetés très proches pour la topologie locale auront deux images très différentes si l'un d'entre eux possède des petites étiquettes dans une génération très élevée. Ceci n'arrive cependant qu'avec une probabilité très faible pour un arbre bien étiqueté à  $n$  arêtes uniforme  $\theta_n$ , de manière uniforme en  $n$ , permettant d'établir le résultat. Ce résultat donne aussi une preuve alternative à celle de Krikun [87] pour la convergence en loi de la suite  $(Q_n)$  vers l'UIPQ.

### 1.4.2 Profil métrique de L'UIPQ

L'article [P2] écrit avec Jean-François Le Gall constitue la deuxième partie de ma thèse. Nous y utilisons l'extension de la bijection CVS décrite au paragraphe précédent pour étudier certaines propriétés métriques de l'UIPQ. En effet nous avons vu que les étiquettes de l'arbre infini aléatoire  $\theta_\infty$  qui code l'UIPQ sont les distances des sommets de la quadrangulation à son sommet racine. Dès lors, bien comprendre la loi de  $\theta_\infty$  et de ses étiquettes permet directement d'avoir des renseignements sur les distances dans l'UIPQ.

Nous avons donc étudié cette loi grâce à la description qu'en donnent Chassaing et Durhuus [43] mentionnée dans la paragraphe précédent. En particulier, il est assez simple de voir que le processus de Markov inhomogène qui donne les étiquettes le long du tronc de  $\theta_\infty$  convenablement renormalisé converge vers un processus de Bessel de dimension 9.

La description complète de la limite d'échelle de  $\theta_\infty$  est beaucoup plus ardue et assez technique à cause du conditionnement sur les étiquettes à rester positives. Nous montrons qu'une limite d'échelle pour  $\theta_\infty$  existe bien et qu'elle est décrite par une paire de serpents browniens éternels conditionnés à rester positifs et adossés au processus de Bessel qui décrit les étiquettes du tronc. Ces processus, introduits par Jean-François Le Gall et Mathilde Weill dans [97], peuvent se construire à partir du serpent brownien standard de Jean-François [92]. De manière très informelle, le serpent Brownien est

un processus de Markov à valeurs dans un espace de trajectoires continues, et décrit un mouvement brownien indexé par un arbre brownien. Il est possible de conditionner le serpent à rester positif (ce conditionnement est bien entendu dégénéré, voir [97]). La loi d'un serpent brownien éternel conditionné à rester positif est alors donnée par la loi de ce serpent conditionné à rester positif, lorsque la hauteur de l'excursion brownienne codant la généalogie de l'arbre brownien tend vers l'infini.

Le serpent brownien standard donne une représentation assez pratique de la mesure aléatoire ISE (pour *Integrated Super Brownian Excursion*, voir encore [92]) en tant que mesure d'occupation. Cette mesure est apparue pour la première fois dans le contexte des cartes planaires dans le travail de Chassaing et Schaeffer [44], et décrit la limite d'échelle du diamètre d'une quadrangulation uniforme. L'analogue de cette mesure d'occupation pour le serpent éternel conditionné à rester positif, que nous noterons  $\mathcal{I}^\infty$  comme dans [P2] et qui est une mesure aléatoire sur  $\mathbb{R}_+$ , est donc naturellement reliée au profil métrique de l'UIPQ. En particulier, nous montrons dans notre article que le profil des distances dans l'UIPQ converge en loi dans la limite d'échelle vers  $\mathcal{I}^\infty$ . Une version simplifiée de cette convergence du profil de l'UIPQ est le résultat suivant sur le volume des boules :

**Théorème 1.4.2 ([P2] et son erratum)**

Pour tout  $r > 0$ , la suite de variables aléatoires  $(\frac{1}{N^4} |B_{Nr}(\mathbf{Q}_\infty)|)_{N \geq 0}$  converge en loi vers la variable aléatoire  $\frac{9}{4} \mathcal{I}^\infty([0, r])$  d'espérance  $\frac{3}{28} r^4$ .

Les liens entre le serpent brownien et certaines équations aux dérivées partielles (expliqués aux chapitres V et VI du livre de Jean-François [92]) permettent d'obtenir pas mal de renseignements sur la mesure  $\mathcal{I}^\infty$ , comme l'espérance annoncée dans le théorème :

**Proposition 1.4.3 ([P2] et son erratum)**

Pour toute fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  et mesurable positive :

$$E[\langle \mathcal{I}^\infty, g \rangle] = \frac{4}{21} \int_0^\infty r^3 g(r) dr.$$

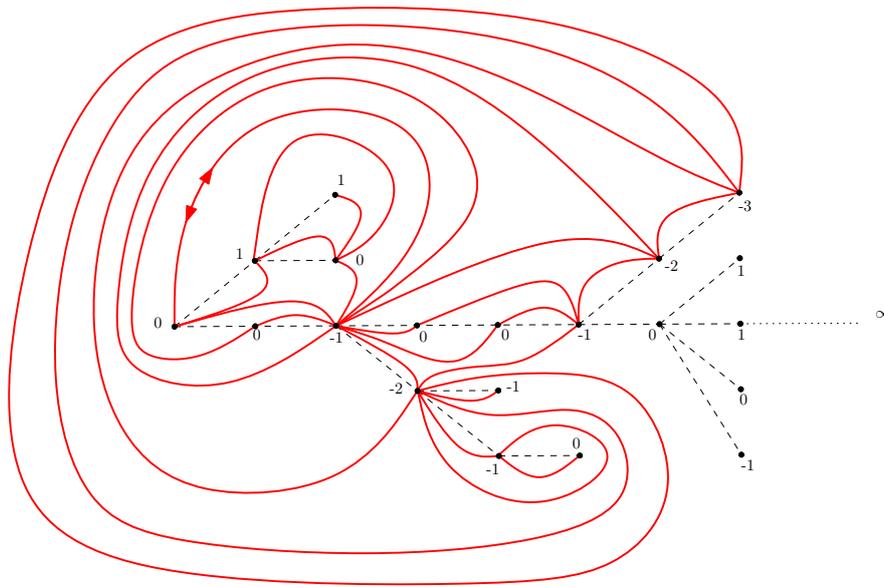
En particulier, pour tout  $r > 0$  :

$$E[\mathcal{I}^\infty([0, r])] = \frac{1}{21} r^4.$$

**1.4.3 L'UIPQ vue de l'infini**

Ce travail en collaboration avec Nicolas Curien et Grégory Miermont s'inscrit dans la continuité de ma thèse et étudie certaines propriétés géométriques de l'UIPQ grâce à une extension de la bijection CVS pointée  $\Phi$ . Le fait qu'il n'y ait pas de conditionnement à rester positif pour les étiquettes simplifie grandement l'étude de l'arbre aléatoire associé à une quadrangulation uniforme  $\mathbf{Q}_n$ , la contrepartie étant que les étiquettes de l'objet limite sont plus difficiles à interpréter.

Si  $\mathbf{Q}_n^\bullet$  est une quadrangulation à  $n$  faces de loi uniforme et pointée en un sommet uniforme, l'arbre étiqueté  $\theta_n = (\tau_n, \ell_n)$  codant  $\mathbf{Q}_n^\bullet$  par la bijection  $\Phi$  est de loi uniforme sur l'ensemble des arbres planaires à  $n$  arêtes et, conditionnellement à la généalogie  $\tau_n$  de l'arbre, les variations des étiquettes le long des arêtes de l'arbre sont indépendantes et uniformes sur  $\{-1, 0, 1\}$ . Dès lors, il est classique de voir que  $\tau_n$  est un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction critique géométrique de paramètre  $1/2$  conditionné à avoir  $n$  arêtes et sa limite locale est l'arbre de Kesten  $\tau_\infty$  [82]. Les étiquettes  $\ell_\infty$  de la limite locale  $\theta_\infty$  des arbres étiquetés  $\theta_n$  sont quand à elles obtenues grâce à des incréments i.i.d. de loi uniforme sur  $\{-1, 0, 1\}$ , la racine de l'arbre ayant pour étiquette 0.



**Figure 1.10** – Extension  $\Phi_\infty$  de la bijection de Schaeffer.

Étendre la bijection CVS à  $\theta_\infty$  est alors assez naturel et similaire à ce que nous avons fait pour la bijection positive : chaque coin de  $\theta_\infty$  est relié au premier coin d'étiquette strictement plus petite qui le suit en parcourant les coins de l'arbre dans le sens des aiguilles d'une montre (voire Figure 1.10). Notons qu'il n'y a pas besoin d'introduire de sommet supplémentaire pour cette construction qui est définie presque sûrement et produit une quadrangulation infinie du plan aléatoire. Il ne reste plus qu'à enraciner la quadrangulation obtenue sur l'arête émanant du coin racine de  $\theta_\infty$ , avec une orientation choisie suivant une variable de Bernoulli indépendante de  $\theta_\infty$ . Ce procédé définit une application  $\Phi_\infty$  qui étend la bijection de Schaeffer aux arbres étiquetés infinis ayant un unique tronc. Notons  $\tilde{Q}_\infty$  la quadrangulation infinie aléatoire ainsi construite :

**Théorème 1.4.4 ([P3])**

La quadrangulation  $\tilde{Q}_\infty$  a la même loi que l'UIPQ. De plus, l'étiquetage  $\ell_\infty$  de l'arbre la codant par l'application  $\Phi_\infty$  vérifie pour tous sommets  $u$  et  $v$  de  $\tilde{Q}_\infty$  :

$$\ell_\infty(u) - \ell_\infty(v) = \lim_{z \rightarrow \infty} (d(z, u) - d(z, v)),$$

la distance étant la distance de graphe dans  $\tilde{Q}_\infty$  et  $z \rightarrow \infty$  signifiant que la limite est prise selon n'importe quelle suite de sommets de  $\tilde{Q}_\infty$  ayant une distance à la racine tendant vers  $+\infty$ .

Ce théorème fournit donc une troisième construction de l'UIPQ et un nouveau levier pour l'étudier avec l'arbre  $\theta_\infty$ . Le fait que  $\tilde{Q}_\infty$  ait la même loi que l'UIPQ est cette fois-ci très simple puisque la construction  $\Phi_\infty$  est continue pour la topologie locale sur le domaine où nous l'avons défini. La partie difficile est le lien entre les distances dans  $\tilde{Q}_\infty$  et la fonction d'étiquetage  $\ell_\infty$  qui est d'après ce théorème l'unique fonction de Busemann de  $\tilde{Q}_\infty$  (autrement dit, la frontière de Gromov de l'UIPQ est presque sûrement réduite à un point). Krikun [88] avait déjà démontré que presque sûrement la limite  $\lim_{z \rightarrow \infty} (d(z, u) - d(z, v))$  existait bien et ne dépendait pas de la manière dont  $z$  s'éloigne de la racine de  $\tilde{Q}_\infty$ . Nous donnons une preuve alternative de ce fait qui repose sur un phénomène de coalescence géodésique, réminiscent du phénomène de coalescence géodésique pour la carte brownienne identifié

par Le Gall [90]. Plus précisément, nous montrons que tous les rayons géodésiques issus d'un sommet de l'UIPQ ont en commun une infinité de points pivots :

### **Théorème 1.4.5 ([P3])**

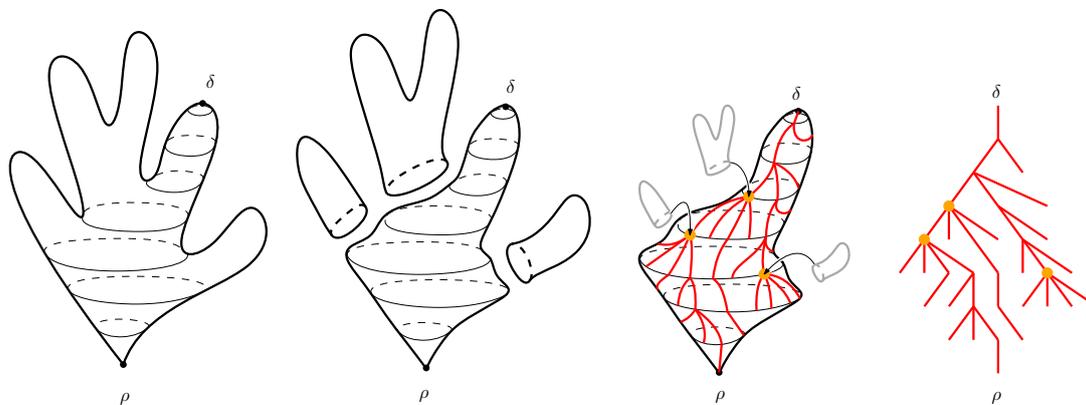
*Presque sûrement, pour tout sommet  $v$  de l'UIPQ, il existe une suite infinie de sommets  $P_1^v, P_2^v, \dots$  communs à toutes les géodésiques partant de  $v$  et allant à l'infini.*

Ce lien entre les étiquettes de l'arbre  $\theta_\infty$  et la fonction de Busemann de l'UIPQ nous permet ensuite d'étudier la géométrie à l'infini de l'UIPQ et de calculer des limites d'échelle pour le volume et le périmètre de ses horo-boules de manière analogue au Théorème 1.4.2.

## **1.5 UIPT et décomposition en tranches de Krikun**

Plus récemment, j'ai commencé à étudier les propriétés géométriques des cartes aléatoires avec des approches alternatives dans le sens où elles n'utilisent pas la bijection CVS et ses variantes. Outre le fait d'obtenir de nouvelles propriétés, ces résultats permettent de trouver de nouvelles démonstrations à des résultats déjà connus.

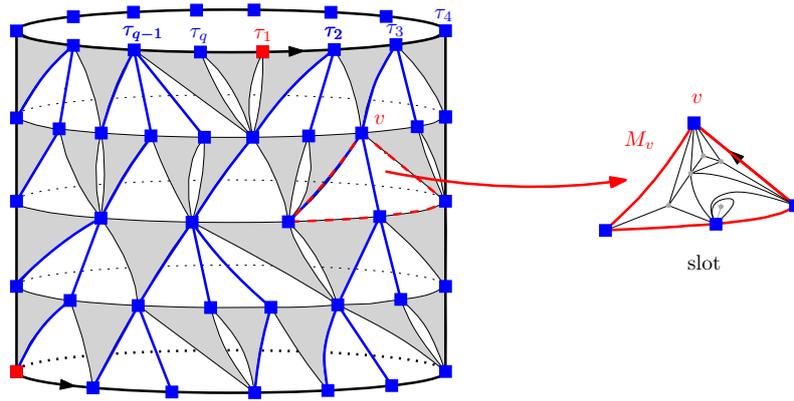
Parmi les outils alternatifs aux bijections de type CVS, une décomposition des cartes due à Krikun [86] est de plus en plus populaire. Le principe, illustré en Figure 1.11, est le suivant : dans une triangulation finie enracinée  $T$  munie d'un point distingué  $\delta$ , l'ensemble des sommets à distance  $r$  de la racine séparant celle-ci de  $\delta$  forme un cycle simple dans la triangulation  $\gamma_r$ . Lorsque  $r$  croît de 1 à la distance entre la racine de  $T$  et  $\delta$ , ces cycles sont imbriqués les uns dans les autres. La structure de ces cycles peut-être décrite par un arbre planaire  $\tau$  issu de  $\delta$  et, connaissant cet arbre, les parties de  $T$  entre deux cycles successifs ont une description relativement simple. Notons qu'avec la transformation de la racine décrite dans la Figure 1.3, ceci est valable pour  $r = 0$  en prenant comme premier cycle  $\gamma_0$  la racine qui est devenue une boucle.



**Figure 1.11** – Aperçu de la décomposition de Krikun. La triangulation est représentée sous forme de cactus, où la hauteur d'un point est sa distance au sommet racine  $\rho$ . Les cycles de sommets équidistants de  $\rho$  séparant  $\rho$  et  $\delta$  sont horizontaux. Sur la droite, ces cycles sont codés par un arbre  $\tau$  dessiné en rouge et les morceaux restants sont associés aux sommets de  $\tau$ .

La structure d'une couche entre deux cycles successifs  $\gamma_r$  et  $\gamma_{r+1}$  est décrite en Figure 1.12 pour le cas des triangulations : de chaque arête de  $\gamma_{r+1}$  part une face dont le troisième sommet est un sommet de  $\gamma_r$  et entre deux telles faces se trouvent des triangulations à bord simple que nous appellerons interstices et qui ont pour seule contrainte la longueur du bord. La structure des cycles  $(\gamma_i)_{0 \leq i \leq r}$

ainsi que les faces délimitant les triangulations à bord de chaque couche est décrite par une forêt planaire appelée squelette, et chaque interstice peut être associé à un des sommets de cette forêt.



**Figure 1.12** – Structure généalogique entre plusieurs cycles  $\gamma_r$  d'une triangulation. Les zones grisées sont des faces de la triangulation d'origine et les interstices entre ces faces sont représentés par les zones blanches.

Cette décomposition des triangulations finies marche aussi très bien pour l'UIPT qui n'a qu'un seul bout topologique, le sommet  $\delta$  étant alors remplacé par un point à l'infini (voir la figure 1.13). Plus précisément, les cycles  $\gamma_r$  sont constitués des sommets de l'UIPT à distance  $r$  de sa racine et la séparant de l'infini. Krikun [86] avait introduit cette décomposition pour étudier la limite locale des triangulations sans boucles uniformes. Le cas des triangulations avec boucles que nous avons énumérées en Section 1.2.1 et à partir desquelles nous avons défini l'UIPT s'avère plus simple et a été traité par Curien et Le Gall [51]. Le squelette de l'UIPT est relié à un processus de Galton Watson de loi de reproduction ayant la fonction génératrice suivante :

$$\varphi(z) := 1 - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)^{-2}. \quad (1.5)$$

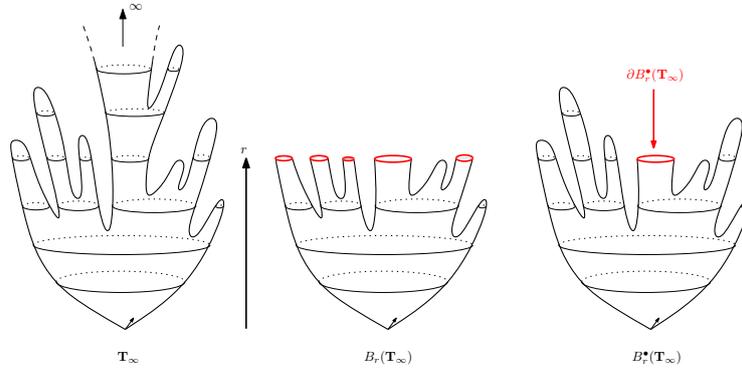
Cette loi de reproduction est critique et dans le domaine d'attraction de la loi 3/2-stable totalement asymétrique. Quant aux triangulations aléatoires remplissant les interstices de l'UIPT, conditionnellement au squelette, elles sont indépendantes et de loi de *Boltzmann critique*. Cette famille de lois apparaît naturellement lorsqu'on applique la propriété de Markov spatiale de l'UIPT et est très simple à décrire : pour  $p > 0$ , une triangulation aléatoire du  $p$ -gone a une loi de Boltzmann critique si la probabilité de voir une triangulation de  $\mathcal{T}_{n,p}$  donnée est proportionnelle à  $t_c^n$ , où nous rappelons que  $\mathcal{T}_{n,p}$  est l'ensemble des triangulations du  $p$ -gone à  $n$  arêtes et  $t_c$  est le rayon de convergence commun à toutes les séries génératrices  $Z_p$  de triangulations du  $p$ -gone donnée en (1.3).

Pour être légèrement plus précis, le squelette de  $\mathbf{T}_\infty$  est décrit par un arbre de Galton Watson de loi de reproduction donnée par  $\varphi$ , renversé en temps et enraciné en l'infini, conditionné à mourir à la hauteur 0 avec une seule particule.

Cette décomposition que nous avons présenté uniquement dans le cadre des triangulations se généralise à d'autres modèles de cartes au prix d'une complexité accrue. Voir par exemple Krikun [87] ou Le Gall et Lehéry [95] et Lehéry [98] pour des applications aux quadrangulations, ou encore Carrance [41] pour une application aux triangulations eulériennes.

### 1.5.1 Volumes dans L'UIPT

Les cycles  $\gamma_r(\mathbf{T}_\infty)$  à distance  $r$  du sommet racine de l'UIPT et séparant ce sommet de l'infini sont une partie de la frontière des boules métriques  $B_r(\mathbf{T}_\infty)$ . En effet, le complémentaire  $\mathbf{T}_\infty \setminus B_r(\mathbf{T}_\infty)$  d'une telle boule a plusieurs composantes connexes, dont une seule infinie. On définit alors l'enveloppe  $B_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)$  de la boule  $B_r(\mathbf{T}_\infty)$  comme l'union de  $B_r(\mathbf{T}_\infty)$  et de toutes les composantes connexes finies de  $\mathbf{T}_\infty \setminus B_r(\mathbf{T}_\infty)$ . Voir Figure 1.13 pour une illustration. Ces enveloppes sont en général plus simples à étudier que les boules elles mêmes, et avec notre définition  $\gamma_r(\mathbf{T}_\infty) = \partial B_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)$ .



**Figure 1.13** – Boule  $B_r(\mathbf{T}_\infty)$  et boule complétée  $B_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)$  dans l'UIPT. Comme dans la figure 1.11, la triangulation est représentée sous forme de cactus, où la hauteur d'un point est sa distance au sommet racine.

Krikun a étudié les périmètres  $|\partial B_r^\bullet|$  dans l'UIPT sans boucles [86] et dans l'UIPQ [87] grâce à leurs squelettes. Curien et Le Gall ont étudié la cas des triangulations avec boucles dans [51] avec la même méthode. Pour notre définition de l'UIPT  $\mathbf{T}_\infty$  ils établissent en particulier pour  $q \geq 0$  et  $s \in [0, 1]$  :

$$\mathbb{E} \left[ s^{|\partial B_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)|} \right] = s \left( 1 - s \varphi^{\{r\}}(0) \right)^{-3/2} (\varphi^{\{r\}})'(0), \quad (1.6)$$

où  $\varphi^{\{r\}}$  est la fonction  $\varphi$  itérée  $r$  fois. Krikun [86] a par ailleurs observé que des calculs exacts sont possibles puisque la fonction  $\varphi$  a la propriété remarquable de pouvoir s'itérer explicitement :

$$\varphi^{\{r\}}(z) = 1 - \left( r + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \right)^{-2}. \quad (1.7)$$

Dans la publication [P10], j'ai étudié plus en détail la décomposition de Krikun de l'UIPT. Cette étude m'a permis d'obtenir des formules exactes sur la loi du volume des enveloppes  $B_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)$  alors que jusque là uniquement des formules asymptotiques en  $r$  étaient connues, établies par Curien et Le Gall [52] grâce au procédé d'épluchage de l'UIPT.

L'idée développée dans cette publication est d'étudier non pas la population du squelette de l'UIPT, comme l'avait fait Krikun pour obtenir la loi du périmètre des enveloppes  $|\partial B_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)|$ , mais d'étudier cette population pondérée par le volume des triangulations aléatoires qui remplissent les interstices associés à chaque sommet du squelette. Le fait que ces triangulations aient des lois explicites et soient indépendantes conditionnellement au squelette de l'UIPT permet ensuite de faire des calculs. En particulier, la loi du volume de  $B_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)$  est liée à un processus de Galton Watson de loi de reproduction de fonction génératrice donnée pour  $z \in [0, 1]$  par

$$\varphi_t(z) = 1 - \left( \frac{1}{\sqrt{1-z}} \sqrt{\frac{3-2t}{t}} + \sqrt{1 + \frac{3}{1-z} \left( \frac{1-t}{t} \right)} \right)^{-2}, \quad (1.8)$$

où  $t \in [0, 1]$  est un paramètre. Plus précisément, pour tout  $s \in [0, 1]$  et lorsque  $t$  est la solution dans  $[0, 1]$  de l'équation  $s^2 = t^2(3 - 2t)$ , on a l'identité suivante :

$$\mathbb{E} \left[ s^{|V(B_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty))|} \right] = s \left( 1 - t \varphi_t^{\{r\}}(0) \right)^{-3/2} (\varphi_t^{\{r\}})'(0),$$

où  $\varphi_t^{\{r\}}$  est la fonction  $\varphi_t$  itérée  $r$  fois. Là encore, il est remarquable que les fonctions  $\varphi_t$  puissent s'itérer explicitement et on obtient le résultat suivant :

**Théorème 1.5.1 ([P10])**

Pour tout  $s \in [0, 1]$  et tout entier  $r > 0$ , en notant  $t$  l'unique solution dans  $[0, 1]$  de l'équation  $s^2 = t^2(3 - 2t)$ , on a

$$\mathbb{E} \left[ s^{|V(B_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty))|} \right] = 3^{3/2} \frac{\cosh \left( \sinh^{-1} \left( \sqrt{3 \frac{1-t}{t}} \right) + r \cosh^{-1} \left( \sqrt{\frac{3-2t}{t}} \right) \right)}{\left( \cosh^2 \left( \sinh^{-1} \left( \sqrt{3 \frac{1-t}{t}} \right) + r \cosh^{-1} \left( \sqrt{\frac{3-2t}{t}} \right) \right) + 2 \right)^{3/2}}.$$

Une étude plus détaillée de cette loi et des processus de branchement associés aux fonction  $\varphi_t$  permet aussi de retrouver les résultats que Curien et Le Gall ont obtenus sur la limite d'échelle des périmètres et volumes des enveloppes de l'UIPT grâce à l'épluchage dans [52]. Pour décrire cette limite d'échelle, nous avons besoin d'un peu de notations.

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Feller à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  de semi-groupe donné par

$$\mathbb{E} \left[ e^{-\lambda X_t} \mid X_0 = x \right] = \exp \left( -x \left( \lambda^{-1/2} + t/2 \right)^{-2} \right)$$

pour tous  $x, t \geq 0$  et  $\lambda > 0$ . Le processus  $X$  est un processus de branchement à temps continu dont le mécanisme de branchement est donné par la fonction  $u \mapsto u^{3/2}$ . Comme expliqué dans [53, 54], il est possible de construire un processus stochastique  $(\mathcal{L}_t)_{t \geq 0}$  à trajectoires càdlàg, tel que le processus à temps retourné  $(\mathcal{L}_{(-t)-})_{t \leq 0}$  a la loi de  $X$  "commencé de  $+\infty$  au temps  $-\infty$ " et conditionné à valoir 0 au temps 0. Soit aussi  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de densité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x^5}} e^{-\frac{1}{2x}} \mathbf{1}_{\{x > 0\}}$$

et indépendante de  $\mathcal{L}$ . Enfin, soit

$$\mathcal{M}_x = \sum_{s_i \leq x} \xi_i (\Delta \mathcal{L}_{s_i})^2,$$

où  $(s_i)_{i \geq 1}$  est une énumération mesurable des sauts de  $\mathcal{L}$ . On a le résultat de convergence suivant :

**Théorème 1.5.2 ([51], redémontré dans [P10])**

La convergence suivante a lieu au sens de Skorokhod :

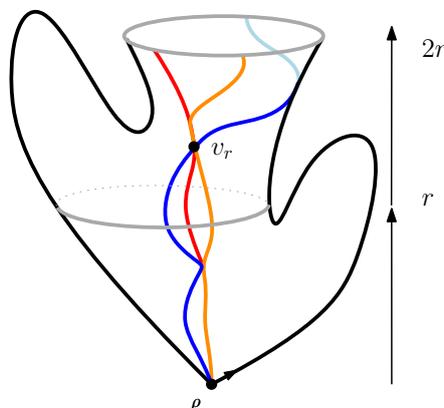
$$\left( R^{-2} |\partial B_{[xR]}^\bullet(\mathbf{T}_\infty)|, R^{-4} |V(B_{[xR]}^\bullet(\mathbf{T}_\infty))| \right)_{x \geq 0} \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{(d)} \left( 3^2 \cdot \mathcal{L}_x, 4 \cdot 3^3 \cdot \mathcal{M}_x \right)_{x \geq 0}.$$

**1.5.2 L'UIPT vue de l'infini**

Dans cet article écrit en collaboration avec Nicolas Curien, nous revisitons le phénomène de coalescence des rayons géodésiques de l'UIPQ de [P3] grâce à la décomposition de Krikun et établissons

ce phénomène pour l'UIPT. Nous y démontrons un résultat de coalescence des géodésiques à toute échelle plus fort que le théorème 1.4.5 obtenu pour l'UIPQ.

Pour  $r > 0$ , on dit qu'il y a coalescence géodésique à l'échelle  $r$  s'il existe un sommet  $v_r \in B_{2r}^\bullet(\mathbf{T}_\infty) \setminus B_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)$  telle que toute géodésique partant de  $\partial B_{2r}^\bullet(\mathbf{T}_\infty)$  et allant vers la racine doit passer par  $v_r$  (voir Figure 1.14 pour une illustration). Nous démontrons :



**Figure 1.14** – Coalescence géodésique à l'échelle  $r$ . Les trois géodésiques partant de  $2r$  et allant vers la racine se rencontrent en  $v_r \in B_{2r}^\bullet(\mathbf{T}_\infty) \setminus B_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)$ .

### **Théorème 1.5.3 ([P9])**

*Presque sûrement, il existe une suite infinie  $1 < R_1 < R_2 < \dots$  telle qu'il y a coalescence géodésique dans l'UIPT à l'échelle  $R_i$  pour tout  $i \geq 1$ .*

La preuve de ce théorème est de nature géométrique et est illustrée en Figure 1.15. Nous montrons en effet que si  $r$  est grand, un des interstices du squelette de l'UIPT de hauteur  $h$  comprise entre  $r$  et  $2r$  a un périmètre macroscopique par rapport à la longueur totale du cycle  $\gamma_h$  (en vert dans la Figure 1.15). Ceci est dû au fait que la forêt codant le squelette de l'UIPT a une loi de reproduction dans le bassin d'attraction d'une loi stable, et a donc des grands nœuds. Les géodésiques entre  $\gamma_{2r}$  et la racine de la carte évitent cet interstice avec une probabilité uniformément minorée. On montre ensuite que toutes les géodésiques vers la racine évitant cet interstice macroscopique coalescent en un sommet commun avant la hauteur  $r$  (elles restent dans la zone bleue de la Figure 1.15). Là encore, on utilise la relation entre ces géodésiques et un processus de branchement avec immigration, qui s'éteint lorsque les géodésiques coalescent.

Une conséquence directe de ce phénomène de coalescence est l'existence d'une horodistance  $\ell_\infty$  analogue à celle du théorème 1.4.4 :

### **Théorème 1.5.4 ([P9])**

*Presque sûrement, pour tout sommet  $u$  de  $\mathbf{T}_\infty$  la limite suivante existe :*

$$\ell_\infty(u) = \lim_{z \rightarrow \infty} (d(z, u) - d(z, \rho)),$$

*la distance étant la distance de graphe dans  $\mathbf{T}_\infty$  et  $z \rightarrow \infty$  signifiant que la limite est prise selon n'importe quelle suite de sommets de  $\mathbf{T}_\infty$  ayant une distance à la racine tendant vers  $+\infty$ .*

Il est alors possible d'utiliser cette horodistance  $\ell_\infty$  pour construire un autre squelette de l'UIPT que celui de Krikun ayant une loi beaucoup plus simple. En effet, au lieu de regarder la structure de  $\mathbf{T}_\infty$  entre deux enveloppes  $B_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)$ , nous pouvons regarder la structure entre les horo-enveloppes  $H_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)$ ,

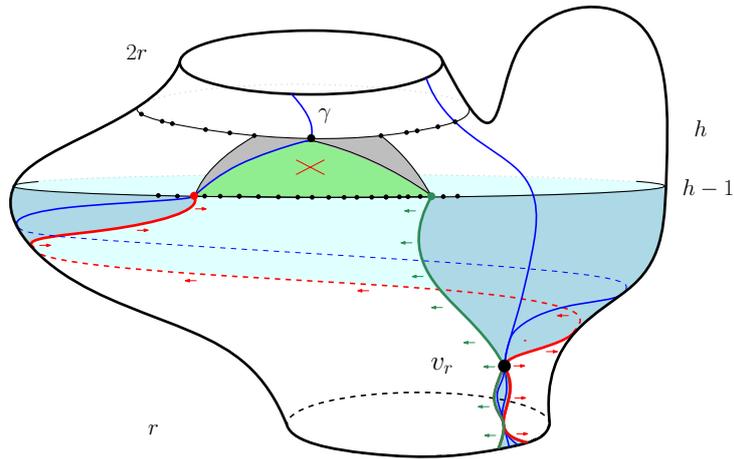


Figure 1.15 – Preuve du théorème 1.5.3

qui sont l'ensemble des faces de  $\mathbf{T}_\infty$  que l'on peut atteindre à partir de la racine par un chemin ne comportant que des sommets  $u$  tels que  $\ell_\infty(u) \geq -r$  (voir Figure 1.16). Les horo-enveloppes sont imbriquées les unes dans les autres et leurs frontières  $\partial H_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)$  sont des cycles simples de  $\mathbf{T}_\infty$ . Les tranches entre deux horo-enveloppes admettent alors une décomposition similaire à la décomposition de Krikun illustrée en Figure 1.16 que nous appelons «squelette vu de l'infini». La différence majeure est que ce squelette est maintenant constitué d'un unique arbre poussant de la racine, au lieu d'une forêt poussant de l'infini. Cet arbre est lié à un arbre de Galton Watson de loi de reproduction de fonction génératrice critique :

$$\psi(z) = 1 - 2 \frac{1-z}{(1+2\sqrt{1-z})(1+\sqrt{1-z})}.$$

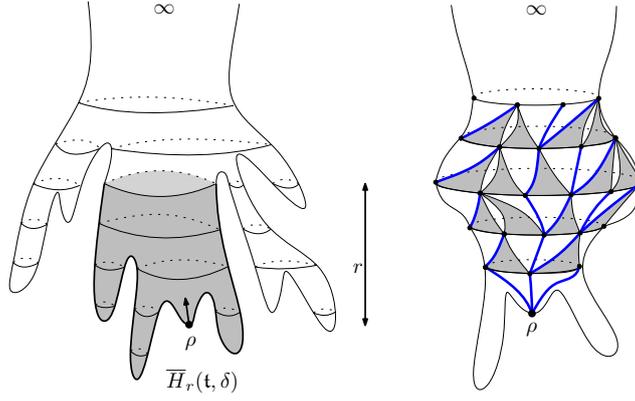
### **Théorème 1.5.5 ([P9])**

*Le squelette vu de l'infini de l'UIPT est un arbre de Galton Watson de loi de reproduction donnée par  $\psi$  pour la racine et sa version biaisée par la taille  $z\psi'(z)/\psi'(1)$  pour les autres sommets, conditionné à survivre. De plus, conditionnellement à son squelette, les triangulations associées à chaque interstice sont de loi Boltzmann critique et indépendantes entre elles.*

Ce résultat donne donc une construction extrêmement simple de l'UIPT, à partir d'un simple arbre de Galton-Watson critique conditionné à survivre et de triangulations de Boltzmann critiques indépendantes. Pour l'établir, nous travaillons dans un premier temps sur des triangulations finies. Comme nous l'avons expliqué précédemment (voir la figure 1.11 pour un rappel), la décomposition de Krikun d'une triangulation finie se fait en mesurant les distances des sommets à la racine  $\rho$ , et en encodant la généalogie des cycles  $\gamma_r$  de sommets de même hauteur séparant  $\rho$  d'un point cible  $\delta$ . En échangeant les rôles de  $\rho$  et  $\delta$ , on obtient un autre squelette, dont la généalogie est décrite par un arbre poussant de  $\rho$  au lieu de  $\delta$ . Cette décomposition s'avère assez simple à étudier et permet d'obtenir plusieurs résultats, anciens et nouveaux.

Par exemple, cette nouvelle décomposition nous permet de calculer la loi jointe du nombre de sommets et de la distance entre la racine et un sommet pointé uniformément  $\delta$  dans une triangulation de Boltzmann critique. Si  $\mathbf{T}_h^\bullet$  désigne une telle triangulation aléatoire conditionnellement à l'événement où le sommet pointé est à distance  $h$  de la racine, nous obtenons en particulier

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda h^{-4} |V(\mathbf{T}_h^\bullet)|} \right] = (6\lambda)^{3/4} \frac{\cosh((6\lambda)^{1/4})}{\sinh^3((6\lambda)^{1/4})}.$$



**Figure 1.16** – Horohull et nouveau squelette

La fonction  $G(\Lambda) = \Lambda^{3/4} \frac{\cosh(\Lambda^{1/4})}{\sinh^3(\Lambda^{1/4})}$  est appelée par les physiciens *fonction à deux points* de la gravité quantique. Elle décrit la relation en distances et volumes dans la limite continue. En termes probabilistes, c'est la transformée de Laplace du volume de la carte brownienne avec deux points marqués distants de 1 l'un de l'autre, lorsque celle-ci est échantillonnée selon la mesure d'excursion (voir [54, Proposition 4.6]). Cette expression a été calculée en premier par Ambjørn et Watabiki grâce à des heuristiques sur une forme primitive d'épluchage dans [10] (voir aussi [9] pour une interprétation de ces calculs). Des travaux plus récents basés sur des méthodes bijectives ont donné un calcul rigoureux de cette fonction limite pour les cartes biparties (voir [69, 70, 57]) ainsi que pour les triangulations dans [70, Section 6.1], qui précèdent le calcul que Nicolas et moi avons fait dans [P9].

Toujours dans [P9], nous calculons l'asymptotique du nombre de triangulations de la sphère avec un sommet à distance  $h$  de la racine pointé. Lorsque le nombre de sommets  $n$  de la triangulation tend vers l'infini, ce nombre est équivalent à

$$\frac{3}{4\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{6}}{2835} \frac{-1 + 16h + 80h^2 + 152h^3 + 138h^4 + 60h^5 + 10h^6}{h(h+1)(h+2)} (12\sqrt{3})^n n^{-5/2}.$$

Des asymptotiques similaires pour les triangulations ont été calculées avec des méthodes bijectives dans [69, Equation 4.19], [37, Equation 5.1] et [43, Lemma 2.5].

Enfin, grâce au squelette vu de l'infini de l'UIPT, nous pouvons calculer de manière explicite la fonction génératrice jointe du périmètre et du volume des horo-enveloppes de l'UIPT. En particulier, en prenant la limite d'échelle, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left( -\lambda_1 r^{-4} |H_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)| - \lambda_2 r^{-2} |\partial H_r^\bullet(\mathbf{T}_\infty)| \right) \right] \\ &= \frac{\left( \frac{2}{3} + \frac{\lambda_2}{(6\lambda_1)^{1/2}} \right)^{-1/2} \sinh \left( (6\lambda_1)^{1/4} \right) + \cosh \left( (6\lambda_1)^{1/4} \right)}{\left( \left( \frac{2}{3} + \frac{\lambda_2}{(6\lambda_1)^{1/2}} \right)^{1/2} \sinh \left( (6\lambda_1)^{1/4} \right) + \cosh \left( (6\lambda_1)^{1/4} \right) \right)^3}. \end{aligned}$$

Cette limite n'est pas sans rappeler la limite d'échelle du volumes des enveloppes de l'UIPT énoncée dans le théorème 1.5.1 (qui, rappelons-le, est aussi présente dans [54]). Il est en fait possible de calculer la loi complète de la limite d'échelle du processus  $(r^{-4} |H_{[rt]}^\bullet|, r^{-2} |\partial H_{[rt]}^\bullet|)_{t \geq 0}$  grâce aux techniques développées dans l'article [P9].

## 1.6 Épluchage et percolation

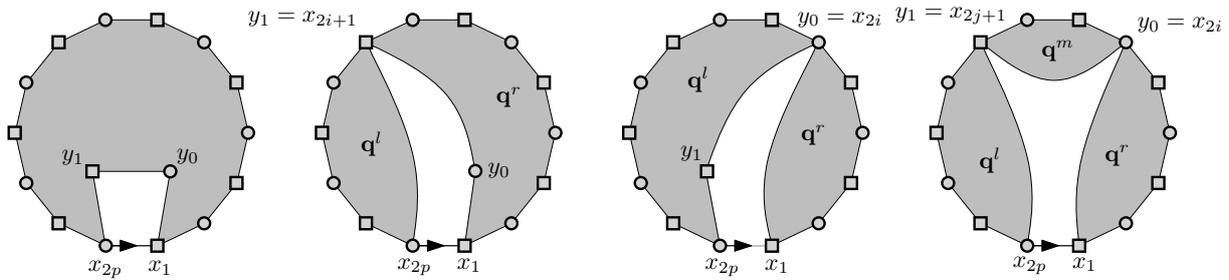
Bien comprendre le comportement de processus stochastiques comme la percolation ou la marche aléatoire sur un graphe aléatoire permet souvent de mettre en lumière certaines propriétés géométriques de ce graphe. La question pour les limites locales de cartes aléatoires s'est donc posée dès le début de leur étude par les probabilistes (par exemple, la marche aléatoire sur l'UIPT est conjecturée récurrente par Angel et Schramm dans leur premier article [13]). Cette question est d'autant plus intéressante que des prédictions ont été faites par des physiciens sur les liens entre le comportement de ces modèles sur les cartes et sur des réseaux déterministes (comme le réseau triangulaire ou le réseau carré) avec la fameuse formule KPZ (pour Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov [84] et non Kardar, Parisi et Zhang [80] que nous ne souhaitons pas plus déranger dans ce document), maintenant établie dans certains cas par Duplantier et Sheffield [59].

Bien sûr, il se peut que le processus stochastique choisit soit complexe à étudier sur les cartes aléatoires. C'est par exemple le cas de la marche aléatoire, dont la récurrence a été démontrée par Gurel-Gurevich et Nachmias [71] presque dix ans après avoir été conjecturée. Alors que le résultat est classique et relativement simple pour  $\mathbb{Z}^2$ , la preuve de Gurel-Gurevich et Nachmias s'appuie sur un magnifique article de Benjamini et Schramm [16], qui lui-même repose sur le théorème de représentation des graphes planaires par empilement de cercles de Koebe [85].

Il s'avère que grâce à la propriété de Markov spatiale des limites locales de cartes uniformes, la percolation est particulièrement simple à étudier par rapport au cas des réseaux euclidiens déterministes. Le premier article dans ce sens est dû à Angel [11], qui étudie la percolation de Bernoulli par sites sur l'UIPT : conditionnellement à la carte, chacun de ses sommets est colorié indépendamment des autres en blanc avec probabilité  $p$  et en noir avec probabilité  $1 - p$ . La question classique concerne l'existence ou non d'une composante connexe blanche infinie et le seuil  $p_c^{\text{site}}$  en dessous duquel toutes les composantes connexes blanches sont finies. En utilisant une technique d'épluchage introduite par Watabiki [127] qui repose sur la propriété de Markov spatiale de l'UIPT, Angel [11] montre que le seuil critique  $p_c^{\text{site}}$  est presque sûrement  $1/2$ , et qu'il n'y a pas percolation au point critique.

Avec Pierre Nolin, nous avons étudié dans [P4] la percolation par sites et par arêtes sur l'UIPQ et l'UIPM grâce au procédé d'épluchage auquel nous avons fait de vagues allusions jusqu'ici. Il est donc temps de décrire de manière un peu plus précise l'idée derrière ce procédé d'exploration des cartes et le lien avec la propriété de Markov spatiale. Nous avons déjà vu les équations de Tutte pour l'énumération des triangulations de la sphère en section 1.2.1. Ces équations, résumées dans la figure 1.4, encodent les différentes configurations possibles pour la face à gauche de la racine d'une triangulation à bord simple. En enlevant cette face, il reste une ou plusieurs triangulations à bord simple de taille plus petite. Cette constatation est aussi valable pour les quadrangulations à bord simple, où il peut rester une, deux ou trois quadrangulations à bord simple comme illustré en figure 1.17. Dans une carte infinie aléatoire à bord simple comme l'UIPQ ou l'UIPM, nous pouvons faire la même opération d'ouverture d'une arête du bord pour découper la carte en plusieurs morceaux. Le fait que la carte n'ait qu'un seul bout implique alors qu'un seul de ces morceaux est infini, et la propriété de Markov spatiale nous dit que conditionnellement à cette information, les morceaux sont indépendants et ont une loi explicite. De plus, les probabilités pour chaque morceau d'être infini sont explicites, et les lois ne dépendent que du périmètre du morceau considéré. En ouvrant ainsi sur une arête adjacente au morceau infini, ce procédé explore la carte infinie aléatoire de manière Markovienne, et les probabilités de transitions sont explicites en fonction du périmètre à chaque étape.

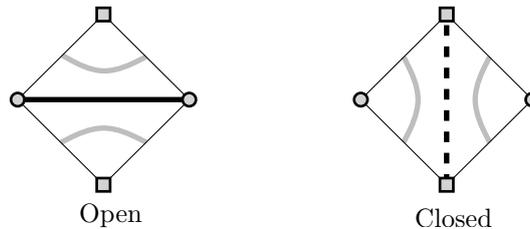
Une des caractéristiques importantes de ce procédé d'exploration est le choix dont nous disposons à chaque étape. En effet, on peut décider d'ouvrir la carte à n'importe quelle arête de son bord, du moment que le choix ne dépend que de la partie déjà explorée de la carte. Ceci permet alors d'adapter



**Figure 1.17** – Les différents cas possibles de l'épluchage d'une face dans une quadrangulation.

l'exploration à une configuration de percolation pour suivre une interface, comme Angel l'a fait dans [11], ou encore de l'adapter à une marche aléatoire comme l'ont fait Benjamini et Curien dans [15].

De plus, nous avons vu que la bijection de Tutte (voir la figure 1.5) met en relation les cartes sans contraintes de degré sur les faces et les quadrangulations en dessinant une arête par face d'une quadrangulation. Il est possible de mettre en relation l'UIPM et l'UIPQ avec cette même correspondance et d'explorer des interfaces de percolation par site ou par arêtes sur l'UIPM en faisant un épluchage de l'UIPQ. La figure 1.18 illustre les deux possibilités pour une face de l'UIPQ pour explorer une interface de percolation par arêtes dans l'UIPM.



**Figure 1.18** – Percolation par arêtes sur UIPM et lien avec les faces de l'UIPQ. L'interface de percolation est matérialisée par une courbe grise.

Avec Pierre Nolin, nous avons étudié en détail les chaînes de Markov codant l'exploration des cartes le long d'une interface de percolation pour obtenir le résultat suivant.

**Théorème 1.6.1 ([P4])**

*Pour la percolation par sites et par arêtes sur l'UIPM, on a respectivement  $p_c^{site} = 2/3$  et  $p_c^{arête} = 1/2$  presque sûrement. Pour la percolation par arêtes sur l'UIPQ on a  $p_c^{arête} = 1/3$  presque sûrement.*

À l'instar du réseau triangulaire, pour lequel Kesten [81] a démontré que le seuil critique de la percolation par sites est  $1/2$ , l'UIPT a une propriété de «self-matching» en loi qui permet de deviner que la valeur du seuil critique est  $1/2$ . De manière similaire, le fait que l'UIPM soit invariante en loi par dualité suggère que le seuil critique de percolation par arêtes est  $1/2$ , comme pour  $\mathbb{Z}^2$  qui est invariant par dualité. À ma connaissance, tous les seuils critiques de percolation connus pour des réseaux euclidiens proviennent d'un de ces deux cas (comme par exemple avec une transformation «star-triangle»). Il est remarquable que les valeurs  $1/3$  et  $2/3$  du théorème 1.6.1 proviennent d'un calcul direct et pas d'une transformation d'un cas auto-dual ou self-matching. En particulier, il n'y a à ma connaissance pas d'heuristique simple pour deviner la valeur de ces deux seuils. De plus, le seuil de percolation par arêtes sur la quadrangulation infinie du demi plan a été calculé indépendamment

par Angel et Curien [12] avec des techniques similaires et se trouve être le même que celui de l'UIPQ, soit  $1/3$ . Là encore, il n'y a à ma connaissance pas d'explication simple à cette égalité.

Pour en apprendre plus sur l'épluchage, on pourra consulter en particulier l'article de Curien et Le Gall [52], celui de Budd [38], ou encore les notes de cours de Saint Flour de Curien [49]. La littérature pour la percolation sur les cartes aléatoires est aussi abondante. Outre les articles que nous avons déjà cités, on pourra en particulier consulter les travaux de Curien et Kortchemski [50] pour une belle étude de la géométrie des amas de percolation à l'aide d'arbres de boucles, ou l'article de Gorny, Maurel-Segala et Singh pour une étude de la géométrie des amas par épluchage [67]. L'article de Bernardi, Curien et Miermont [19] propose une nouvelle approche par séries génératrices qui semble très robuste. Enfin, les travaux de Richier [116, 115] concernent des cartes du demi plan.

## 1.7 Modèle d'Ising

### 1.7.1 Sortir de l'universalité brownienne avec les cartes décorées

Pour sortir de la classe d'universalité de la carte brownienne, certains travaux tentent d'étudier des cartes aléatoires tirées non plus selon la mesure uniforme, mais selon une mesure pondérée par l'énergie d'un modèle de mécanique statistique sur la carte. La raison vient encore de la physique théorique : les cartes aléatoires représentant des discrétisations de l'espace, les coupler à un modèle de mécanique statistique revient à étudier l'influence de la matière sur la géométrie et la métrique de l'espace. Les physiciens pensent qu'en général, le modèle n'influence pas la géométrie de la carte sauf à son point critique. Les modèles non critiques convergeraient donc vers la carte brownienne dans la limite d'échelle, et les modèles critiques vers des objets appartenant à d'autres classes d'universalité.

D'un point de vue combinatoire, des indices pointant vers d'autres classes d'universalité ont été obtenus en étudiant des cartes équipées d'un arbre couvrant ([111]) ou encore d'un modèle d'Ising (voir la prochaine section). En effet, les séries génératrices de ces modèles n'ont pas le comportement asymptotique habituel (par exemple comme celui des triangulations vu dans l'équation (1.2)) car l'exposant du facteur polynomial dans l'asymptotique n'est plus  $5/2$  (du moins pas pour toute température pour le modèle d'Ising). Le cadre générique est le suivant : on considère un modèle de physique statistique sur les cartes finies (par exemple le modèle d'Ising, un arbre couvrant, une marche aléatoire, une orientation sur les arêtes, un gaz de boucles, ...), et on note  $(M, \sigma)$  une carte  $M$ , munie d'une configuration donnée  $\sigma$  du modèle physique. On dit que  $(M, \sigma)$  est une carte décorée par le modèle. Chaque modèle possède sa propre notion d'hamiltonien  $H$ , et l'énergie d'une carte décorée  $(M, \sigma)$  est donnée par  $\exp(-\beta H(M, \sigma))$ , où  $\beta$  est le paramètre du modèle (en général l'inverse de la température). Pour une classe  $\mathcal{C}_n$  de cartes de taille  $n$ , la fonction de partition du modèle est donnée par

$$Z_n(\beta) = \sum_{\substack{M \in \mathcal{C}_n, \\ \sigma \text{ conf. on } M}} \exp(-\beta H(M, \sigma))$$

et la série génératrice des cartes décorées est donnée par

$$Z(\beta, t) = \sum_{n \geq 0} Z_n(\beta) t^n.$$

On s'attend alors à avoir un comportement typique des cartes planaires pour tout  $\beta$ , excepté un éventuel point critique  $\beta_c$ . Autrement dit, on s'attend à l'asymptotique suivante :

$$Z_n(\beta) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \text{Cste}(\beta) (\rho(\beta))^{-n} n^{-\alpha(\beta)}$$

où  $\rho(\beta)$  est le rayon de convergence à  $\beta$  fixé de la série  $Z(\beta, t)$ , et où

$$\alpha(\beta) = \frac{5}{2} \text{ si } \beta \neq \beta_c, \text{ et } \alpha(\beta_c) \neq \frac{5}{2}.$$

Comme nous l'avons déjà brièvement mentionné, cet exposant  $\alpha$  est lié, au moins à un niveau heuristique, aux propriétés fractales à grande échelle de la carte sous-jacente lorsque celle-ci est tirée avec probabilité

$$\mathbb{P}_n^\beta(\{M\}) = \frac{\sum_{\sigma \text{ conf. on } M} \exp(-\beta H(M, \sigma))}{Z_n(\beta)} \mathbf{1}_{M \in \mathcal{C}_n}, \quad (1.9)$$

correspondant à la loi de la carte sous-jacente à une carte décorée de  $\mathcal{C}_n$  tirée au hasard avec une probabilité proportionnelle à son énergie. Précisons un peu ce lien en parlant de Gravité Quantique de Liouville (ou LQG pour *Liouville Quantum Gravity*) et de la formule KPZ [84].

Les LQG forment une famille de mesures aléatoires sur la sphère indexée par un paramètre [59], traditionnellement noté  $\gamma \in (0, 2]$ . La plupart des modèles de cartes décorées sont conjecturées converger vers une LQG dans la limite d'échelle, le paramètre  $\gamma$  étant donné en fonction de l'exposant  $\alpha$  par une application de la formule KPZ :

$$\alpha = 1 + \frac{4}{\gamma^2}.$$

Cette convergence a été établie dans le cas de la « gravité quantique pure » correspondant aux cartes uniformes et à  $\gamma = \sqrt{\frac{8}{3}}$  par Miller et Sheffield dans une impressionnante série de travaux [106, 107, 108]. Pour les autres valeurs du paramètre  $\gamma$ , à l'exception de 2, Gwynne et Miller ont prouvé l'existence et l'unicité de la métrique associée à une LQG dans [73]. Cependant, obtenir un résultat de convergence vers une LQG pour un modèle de cartes décorées ne tombant pas dans la classe d'universalité de la gravité pure semble pour l'instant hors de portée. Cependant, l'approche par mariages d'arbres de Sheffield [121] a permis d'établir la convergence locale de certains modèles de cartes décorées (voir par exemple [45, 74, 17]) ainsi qu'un lien avec les  $\gamma$ -LQG conjecturées comme étant les bonnes limites d'échelle. En effet, avec cette approche, Gwynne, Holden et Sun [72] ont réussi à montrer que pour certains modèles de cartes décorées (comprenant les cartes munies d'un arbre couvrant, d'une orientation bipolaire ou d'une forêt de Schnyder), la croissance du volume des boules métriques dans leur limite locale est bien déterminée par la « dimension fractale »  $d_\gamma$  de la  $\gamma$ -LQG associée.

La valeur de cette dimension fractale est cependant seulement connue pour la gravité pure, pour laquelle  $d_{\sqrt{8/3}} = 4$ . Pour les autres valeurs de  $\gamma$ , seuls des encadrements sont connus. À l'heure actuelle, les meilleures bornes sont dues à Ding et Gwynne [58] et prouvent que  $d_\gamma \neq 4$  si  $\gamma \neq \sqrt{8/3}$ . Côté physique, Watabiki [126] a proposé une valeur pour  $d_\gamma$ . Malgré des simulations numériques par Ambjørn et Budd [8] allant dans le sens de cette prédiction, celle-ci est maintenant mise en doute. En effet, bien que les bornes de Ding et Gwynne soient compatibles avec cette prédiction, ils montrent dans le même article que la conjecture de Watabiki est fautive lorsque  $\gamma$  tend vers 0 (qui correspond à la limite «classique»). Nous nous sommes intéressés avec Marie Albenque et Gilles Schaeffer aux triangulations décorées d'un modèle d'Ising, pour lesquelles il n'y a pour l'instant pas d'approche par mariage d'arbres établie.

### 1.7.2 Triangulations couplées à un modèle d'Ising

Pour le modèle d'Ising sur des cartes planaires, une des premières études est due à Boulatov et Kazakov [33]. Avec des techniques d'intégrales de matrices et de polynômes orthogonaux, ils détectent

une transition de phase et obtiennent le point critique et les exposants critiques correspondants. En particulier, l'analogie de l'exposant de comptage  $\alpha$  vaut  $7/3$  au point critique et  $5/2$  en dehors. Plus tard, leurs résultats sont retrouvés avec des techniques bijectives par Bousquet-Mélou et Schaeffer [35] ainsi que Bouttier, Di Francesco et Guitter [36].

Plus récemment, en se basant sur une série d'articles fondateurs de Tutte synthétisée dans [124], Bernardi et Bousquet-Mélou [18] ont réalisé la prouesse de calculer les séries génératrices des cartes planaires – ou des triangulations – décorées par un modèle de Potts. Une grosse partie de leur travail consiste en la résolution d'équations «à deux variables catalytiques» grâce à la méthode des invariants de Tutte. Leur impressionnant travail, ainsi que de nombreuses séances de questions avec eux, nous a permis avec Marie et Gilles de nous attaquer aux triangulations décorées par un modèle d'Ising dans [P11].

Le modèle que nous étudions est le suivant : si  $T$  est une triangulation enracinée finie, une configuration de spins sur  $T$  est une fonction  $\sigma$  sur les sommets de  $T$  à valeurs dans  $\{-1, +1\}$ . On dit alors qu'une arête de  $(T, \sigma)$  est monochromatique si les spins sont les mêmes des deux côtés de l'arête, et on note  $m(T, \sigma)$  le nombre total d'arêtes monochromatiques de la triangulation munie de spins. L'énergie du modèle d'Ising de la triangulation  $(T, \sigma)$  est alors donnée par

$$\exp\left(-\beta \sum_{\{v, v'\} \in E(T)} \sigma(v)\sigma(v')\right) = \nu^{m(T, \sigma)} e^{\beta|E(T)|} \text{ avec } \nu = e^{-2\beta}.$$

Ainsi, à nombre d'arêtes fixé, tirer une triangulation munie d'un modèle d'Ising  $(T, \sigma)$  proportionnellement à son énergie comme évoqué au paragraphe précédent dans (1.9) est équivalent à la tirer proportionnellement à  $\nu^{m(T, \sigma)}$ . Cette paramétrisation par  $\nu$  est un peu plus pratique au niveau combinatoire et le modèle d'Ising est ferromagnétique pour  $\nu > 1$ , antiferromagnétique pour  $0 < \nu < 1$ . Le cas  $\nu = 1$  correspond aux triangulations uniformes décorées par une percolation par sites de paramètre  $1/2$ . Nous pouvons définir la série génératrice bivariée des triangulations de la sphère décorées par un modèle d'Ising :

$$\mathcal{Z}(\nu, t) = \sum_{T \in \mathcal{T}_f} \sum_{\sigma: V(T) \rightarrow \{-1, 1\}} \nu^{m(T, \sigma)} t^{|E(T)|}.$$

Pour tout  $\nu > 0$  fixé, la loi de probabilité sur les triangulations décorées ayant  $3n$  arêtes analogue à celle donnée par l'équation (1.9) est donc définie par :

$$\mathbb{P}_n^\nu(\{(T, \sigma)\}) = \frac{\nu^{m(T, \sigma)}}{[t^{3n}] \mathcal{Z}(\nu, t)} \mathbf{1}_{\{|E(T)|=3n\}}.$$

Les travaux de Bousquet-Mélou et Bernardi [18] nous donnent entre autres les asymptotiques des fonctions de partition et identifient un point critique

$$\nu_c = 1 + \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

En effet, une conséquence de leur article est que, pour tout  $\nu > 0$ , il existe des constantes  $\kappa(\nu)$  et  $t_\nu > 0$  telles que

$$[t^{3n}] \mathcal{Z}(\nu, t) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} \kappa(\nu) \cdot t_\nu^{-3n} n^{-5/2} & \text{si } \nu \neq \nu_c, \\ \kappa(\nu_c) \cdot t_{\nu_c}^{-3n} n^{-7/3} & \text{si } \nu = \nu_c. \end{cases} \quad (1.10)$$

Les triangulations décorées par un modèle d'Ising sont donc de bonnes candidates pour sortir de la classe d'universalité de la carte brownienne. Au point critique  $\nu_c$ , leur limite d'échelle devrait être

la  $\sqrt{3}$ -LQG et les travaux de Ding et Gwynne [58] indiquent que la dimension fractale associée est strictement supérieure celle de la carte brownienne, soit 4.

À l’instar des triangulations uniformes et de l’UIPT, la motivation probabiliste du travail [P11] est donc de définir une loi limite pour les triangulations décorées aléatoires de loi  $\mathbb{P}_n^\nu$ . Une limite d’échelle au sens de Gromov-Hausdorff paraît encore hors de portée et nous nous plaçons dans le cadre de la convergence locale. Prendre en compte les spins des triangulations dans la distance locale  $d_{\text{loc}}$  définie en section 1.3 ne pose pas de difficulté : il suffit de dire que deux cartes décorées sont égales si les cartes sous-jacentes le sont et si leurs spins correspondent. Dans ce cadre, notre résultat de convergence en loi est le suivant :

**Théorème 1.7.1 ([P11])**

*Pour tout  $\nu > 0$ ,  $\gamma$  compris  $\nu_c$ , la suite de lois  $(\mathbb{P}_n^\nu)_n$  converge faiblement pour la topologie associée à  $d_{\text{loc}}$  vers une mesure de probabilité  $\mathbb{P}_\infty^\nu$  supportée par les triangulations infinies ayant un seul bout.*

Notre approche pour établir cette convergence est similaire à l’approche historique d’Angel et Schramm pour les triangulations uniformes [13], que nous avons exposé en section 1.3. En particulier, elle requiert des informations précises sur le comportement asymptotique des fonctions de partition des triangulations à bord décorées d’un modèle d’Ising pour n’importe quelle condition au bord. Ces asymptotiques ne découlent pas des résultats d’Olivier Bernardi et Mireille Bousquet-Mélou [18] et nous ont donné du fil à retordre. Nous en parlerons dans la prochaine section.

Dans un second temps, comme pour les triangulations uniformes, un argument de tension est nécessaire pour obtenir la convergence en loi. De manière assez classique, il suffit de montrer que les lois du degré du sommet racine sous  $\mathbb{P}_n^\nu$  forment une suite tendue. Pour les modèles uniformes, ceci est en général établi par des calculs explicites sur les queues de distribution de ces variables aléatoires, qui s’avèrent uniformément sous exponentielles. De tels calculs ne sont pas possibles sous  $\mathbb{P}_n^\nu$  et nous prouvons juste que les espérances sous  $\mathbb{P}_n^\nu$  du degré de la racine de la carte forment une suite bornée en  $n$  lorsque  $\nu$  est fixé. Ce fait est bien sûr plus faible qu’établir la décroissance exponentielle uniforme des queues de distribution mais suffit pour la tension. Le gros avantage de ce nouvel argument est sa robustesse car il utilise presque uniquement le fait que les coefficients des séries génératrices des cartes à bord et sans bord ont le même comportement asymptotique à une constante multiplicative près.

Le Théorème 1.7.1, ainsi qu’une partie de l’étude de séries génératrices présentée dans la prochaine section, sont à rapprocher du travail de Chen et Turunen [47], qui étudient des triangulations aléatoires à bord décorées par des spins sur leur faces, et prises à un paramètre critique similaire à notre  $\nu_c$ . Leurs bords sont pris avec des conditions de type Dobrushin (deux arcs monochromatiques comme dans la figure 1.19), et ils prouvent une convergence en loi lorsque la longueur des arcs tendent vers l’infini l’une après l’autre.

Mentionnons aussi que le modèle d’Ising est intimement lié au modèle  $\mathcal{O}(n)$  à travers les interfaces entre les amas de signes. Ce modèle a été étudié sur des triangulations ou encore des cartes biparties dans plusieurs articles [30, 32, 31, 29, 39, 46] et a révélé un lien profond avec les cartes stables de Le Gall et Miermont [96].

Dans la prépublication [P11], nous commençons l’étude de la triangulation infinie aléatoire couplée à un modèle d’Ising de loi  $\mathbb{P}_\infty^\nu$  définie dans le théorème 1.7.1. En particulier nous montrons une propriété de Markov spatiale ainsi qu’une propriété de décroissance exponentielle de la queue de distribution du degré du sommet racine, qui implique la récurrence d’après Gurel-Gurevich et Nachmias [71] :

### **Théorème 1.7.2 ([P11])**

Pour tout  $\nu$  entre 0.3 et 2,  $y$  compris  $\nu_c$ , la marche aléatoire simple sur une triangulation de loi  $\mathbb{P}_\infty^\nu$  est presque sûrement récurrente.

Notre résultat n'est valable que pour certaines valeurs de  $\nu$  pour des raisons techniques et nous conjecturons la récurrence pour tout  $\nu > 0$ .

### **1.7.3 Combinatoire des triangulations décorées par un modèle d'Ising**

Terminons cette partie sur les triangulations décorées par un modèle d'Ising en présentant les résultats combinatoires que nous avons obtenu dans [P11]. Comme nous l'avons dit, pour établir le théorème 1.7.1, nous avons besoin d'étudier les séries génératrices de triangulations à bord simple, avec une configuration de spins quelconque sur le bord. Dans la section 1.2.1, nous avons noté  $\mathcal{T}_{n,p}$  l'ensemble des triangulations du  $p$ -gone ayant  $n$  arêtes. Pour tout mot  $\omega \in \{-1; +1\}^p$ , notons donc  $\mathcal{T}_{n,\omega}$  l'ensemble des triangulations du  $p$ -gone ayant  $n$  arêtes et dont les spins du bord sont donnés par  $\omega$ , en partant du sommet cible de la racine. Nous pouvons alors définir les séries génératrices des triangulations décorées par un modèle d'Ising avec condition au bord  $\omega$  par

$$Z_\omega(\nu, t) = \sum_{n \geq 1} \sum_{(T, \sigma) \in \mathcal{T}_{n,\omega}} t^n \nu^{m(T, \sigma)}.$$

Les contraintes de degré et de bord sur nos cartes impliquent que les séries  $t^{|\omega|} Z_\omega(\nu, t)$  sont des séries en  $t^3$ . Nous montrons le résultat suivant, généralisant l'asymptotique (1.10) obtenue par Bernardi et Bousquet-Mélou [18] :

### **Théorème 1.7.3 ([P11])**

Pour tout mot  $\omega$ , la série  $t^{|\omega|} Z_\omega(\nu, t)$  est algébrique. De plus, si  $\nu > 0$  est fixé, ces séries en tant que séries en  $t^3$  ont toutes une unique singularité dominante  $t_\nu^3$ , indépendante de  $\omega$ . Enfin, pour tous  $\omega$  et  $\nu > 0$ , il existe des constantes  $\kappa_\omega(\nu)$  telles que

$$[t^{3n}] t^{|\omega|} Z_\omega(\nu, t) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} \kappa_\omega(\nu) \cdot t_\nu^{-3} n^{-5/2} & \text{si } \nu \neq \nu_c, \\ \kappa_\omega(\nu_c) \cdot t_{\nu_c}^{-3} n^{-7/3} & \text{si } \nu = \nu_c. \end{cases}$$

Donnons deux mots sur la preuve de ce résultat. Tout d'abord, grâce à des injections et des surjections vers les triangulations de la sphère, il est possible de voir que les asymptotiques du théorème découlent de l'algébricité des séries et du fait qu'elle ont une unique singularité dominante. Ensuite, par une double récurrence sur la longueur du mot de bord  $\omega$  et sur le nombre de  $-1$  qu'il contient, on peut voir qu'il suffit de montrer ces deux propriétés pour les mots de bord monochromatiques, n'ayant que des  $+1$ .

Il n'est malheureusement pas possible d'écrire une équation fonctionnelle fermée pour ces séries comme nous l'avons fait en section 1.2.1 pour les triangulations sans spins. En effet, ouvrir l'arête racine d'une telle carte peut faire apparaître un nouveau sommet dont nous ne maîtrisons pas le spin. Cependant, si l'on s'autorise à considérer des mots de bord ayant un unique arc de  $+1$  suivi d'un unique arc de  $-1$  comme dans la figure 1.19 et que l'on ouvre systématiquement l'arête interface, on peut bien écrire une équation fonctionnelle. Celle-ci a deux variables catalytiques qui prennent en compte le mot de bord : une pour le nombre de  $+1$  et une pour le nombre de  $-1$ .

Nous pouvons ensuite appliquer la méthode des Invariants de Tutte, retranscrite en clair par Bernardi et Bousquet-Mélou [18] pour éliminer une des deux variables catalytiques. On trouve alors une équation à une seule variable catalytique que nous pouvons résoudre explicitement, en obtenant même

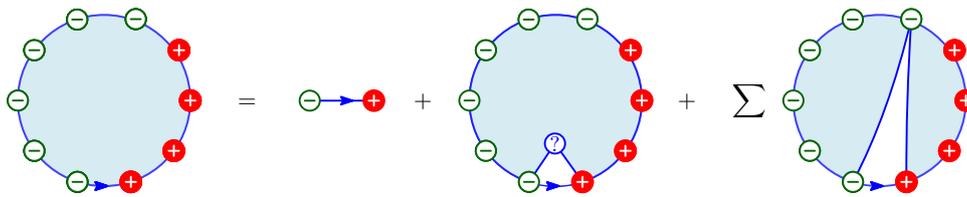


Figure 1.19 – Une équation à deux variables catalytiques.

des paramétrisations rationnelles explicites pour les séries qui nous intéressent. Ces paramétrisations ne demandent d'ailleurs qu'à être interprétées combinatoirement !

## 1.8 Perspectives

Je compte concentrer mes futurs travaux sur les cartes planaires à une étude plus approfondie des triangulations couplés à un modèle d'Ising. Dans l'article [P11] écrit avec Marie Albenque et Gilles Schaeffer, nous avons beaucoup défriché la combinatoire du modèle, ce qui nous a amené à plusieurs projets de suites naturelles :

**Étude des amas de spins dans les triangulations couplées à un modèle d'Ising.** Il est naturel de penser que le paramètre critique combinatoire  $\nu_c$  que nous avons vu plus haut est aussi critique pour les propriétés des amas de spins dans la limite locale : si  $\nu > \nu_c$  (température sous-critique), un amas infini devrait apparaître et si  $\nu < \nu_c$  (température sur-critique), tous les amas devraient être finis et se comporter comme des amas de percolation critique.

**Étude métrique des triangulations couplées à un modèle d'Ising non critique.** L'existence d'un unique amas de spins occupant une fraction macroscopique de la carte lorsque  $\nu > \nu_c$  devrait permettre d'en étudier les propriétés métriques pour ces valeurs de  $\nu$ . En effet, nous avons identifié la loi de cet amas et elle semble être dans la classe d'universalité de la carte brownienne. Il paraît alors raisonnable de penser que toute la carte converge bien vers la carte brownienne avec des techniques similaires à [2]. Le cas sous-critique (haute température) paraît plus difficile et demandera sans doute une autre approche.

**Étude métrique des triangulations couplées à un modèle d'Ising critique.** Trouver un comportement différent des modèles uniformes et de la carte brownienne est toujours notre motivation principale pour ce projet. Ici l'absence de bijections avec des modèles plus simples gardant de l'information métrique se fait cruellement sentir. Nous avons des raisons de penser qu'au point critique  $\nu_c$ , il peut y avoir une telle bijection avec un modèle de marches confinées dans le quart de plan (marches de Gessel). En effet la série génératrice de ces marches possède le même type de singularité que la série génératrice de nos cartes couplées au modèle d'Ising à température critique (notre exposant  $7/3$  dans l'asymptotique des fonctions de partitions  $Z_n(\nu)$ ), et d'autres bijections de ce type existent pour des modèles de cartes plus simples (mais qui ont les mêmes propriétés métriques que les cartes uniformes et un exposant  $5/2$ ). Trouver une bijection de ce type s'avérerait un énorme progrès dans la compréhension de ce modèle.

## Partie 2

# Graphes aléatoires

### 2.1 Introduction

L'étude des graphes aléatoires est un sujet de recherche extrêmement actif depuis les travaux fondateurs d'Erdős et Rényi dans les années 50 [62]. Le modèle qu'ils proposent est le suivant. Soit  $N > 0$  un entier naturel et  $p \in (0, 1)$ . On construit le graphe aléatoire  $\mathcal{G}(N, p)$  sur les sommets  $\{1, \dots, N\}$  en mettant une arête entre deux sommets avec probabilité  $p$ , indépendamment les uns des autres. Lorsque  $p = c/N$  où  $c > 0$  est un paramètre fixé, le degré moyen dans le graphe ne dépend pas de  $N$  et reste égal à  $c$ . Il est maintenant bien connu que ce modèle admet une transition de phase suivant la valeur du paramètre  $c$ . En effet, lorsque  $c$  est strictement entre 0 et 1, le graphe est sous-critique et toutes ses composantes connexes ont une taille en  $\mathcal{O}(\log N)$ . Si  $c > 1$ , le graphe est surcritique et possède une unique composante de taille linéaire en  $N$  – appelée la composante géante du graphe – tandis que toutes les autres composantes connexes sont d'ordre  $\mathcal{O}(\log N)$ .

Dans le régime surcritique, la taille de la composante géante se concentre autour de  $\rho_c \cdot N$ , où  $\rho_c$  est la probabilité de survie d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction Poisson de paramètre  $c$ . Une bonne heuristique pour ce fait réside dans la constatation que la suite de graphes aléatoires  $(\mathcal{G}(N, c/N))_N$  converge en loi vers un tel arbre de Galton-Watson pour la topologie locale de Benjamini et Schramm. Ce fait est une des raisons pour lesquelles je me suis mis à travailler sur les graphes aléatoires.

Depuis l'article d'Erdős et Rényi, de nombreux modèles ont été proposés, souvent dans une optique de modélisation de réseaux complexes (réseaux sociaux, internet, graphes d'interactions, ...). Parmi tous ces modèles, deux catégories se distinguent. Il y a d'une part des graphes aléatoires construits directement à partir de contraintes sur les degrés des sommets. C'est par exemple le cas du modèle de configuration introduit par Bollobás [22] que nous allons présenter plus bas, ainsi que des modèles d'attachement préférentiels introduits par Barabási et Albert [14]. Le livre de Remco van der Hofstad [77] constitue une référence très complète sur ces modèles. Un autre classique est le livre de Durrett [60]. L'autre catégorie de modèles regroupe des graphes aléatoires plongés dans  $\mathbb{R}^d$ , avec des contraintes géométriques sur le plongement et la structure de graphe. Les exemples les plus courants de tels modèles sont les graphes géométriques (graphe d'adjacence d'une percolation continue) ou les triangulations de Delaunay que nous verrons en section 2.3. Le livre de Penrose [114] est une mine d'informations sur ces modèles.

Dans le régime dilué – ou parcimonieux, voire «sparse», correspondant à un degré moyen restant constant lorsque la taille du graphe grandit – une des caractéristiques commune à ces modèles est la présence d'une transition de phase pour l'existence d'une composante connexe macroscopique similaire à celle que nous avons évoqué pour le modèle d'Erdős et Rényi. Le seuil de cette transition de phase

s'exprime en général simplement en fonction des paramètres du modèle. C'est cette composante macroscopique, appelée *géante*, qui est étudiée en tant que modèle jouet pour des réseaux complexes. Pour les applications, il est crucial de comprendre la géométrie de cette composante géante. À l'instar de ce que nous avons expliqué pour les cartes aléatoires, on peut approcher l'étude des propriétés géométriques des graphes aléatoires de manière locale ou globale. Nous allons voir dans la suite de cette partie que l'approche locale est encore très riche d'enseignements.

## 2.2 Modèle de configuration

Le modèle de configuration a été introduit par Bollobás [22] dans le but de compter les graphes réguliers ayant un nombre de sommets fixé. L'idée de base est très simple : il s'agit de construire un multi-graphe (les boucles et les arêtes multiples sont autorisées) aléatoire ayant des degrés fixés à l'avance et en gardant le plus d'aléa possible. Plus précisément, si  $\mathbf{d}^{(N)} = (d_1^{(N)}, \dots, d_N^{(N)})$  est une liste d'entiers naturels (éventuellement nuls) dont la somme est paire, le graphe aléatoire  $\text{Conf}_{\mathbf{d}^{(N)}}$  est un multi-graphe d'ensemble de sommets  $\{1, \dots, N\}$ , tel que chaque sommet  $i$  a un degré donné par  $d_i$ , et de loi uniforme parmi tous les graphes vérifiant ceci.

Ce modèle est très agréable à manier car le graphe peut se construire de façon algorithmique, avec une certaine liberté à chaque étape de construction. En effet, pour fabriquer  $\text{Conf}_{\mathbf{d}^{(N)}}$ , on peut tout d'abord équiper chaque sommet  $i \in \{1, \dots, N\}$  de  $d_i^{(N)}$  demi-arêtes afin de fabriquer une «étoile»  $e_i = \{(i, 1), \dots, (i, d_i^{(N)})\}$ . Il suffit ensuite de prendre un appariement aléatoire uniforme des demi-arêtes, c'est à dire une involution sans point fixe de l'ensemble  $e_1 \cup \dots \cup e_N$ . Chaque paire de demi-arêtes appariée par l'involution constitue alors une arête du graphe. Un des principaux intérêts de ce procédé est que l'on peut faire les appariements au fur et à mesure en choisissant une première demi arête qui nous arrange (tant que le choix ne dépend que de la partie déjà construite du graphe), et en l'appariant de manière uniforme à une demi arête encore libre.

Pour se placer dans le régime dilué qui nous intéresse, une hypothèse classique est de supposer que la distribution empirique du degré dans le graphe converge vers une loi limite  $\pi$  :

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{d_i^{(N)}=k\}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \pi(\{k\}).$$

Des hypothèses de convergence des premier et second moments du degré dans le graphe sont parfois nécessaires pour établir certains résultats, et nous supposerons que c'est le cas sans plus insister.

Bien sûr, un graphe aléatoire  $\text{Conf}_{\mathbf{d}^{(N)}}$  est en général non simple. Cependant, dans le régime dilué (il suffit même que la loi empirique du carré du degré soit borné dans  $L^2$ ), Janson [78, 79] a prouvé que les probabilités que les graphes  $\text{Conf}_{\mathbf{d}^{(N)}}$  soient simples sont uniformément minorées par un nombre strictement positif. De plus, conditionnellement au fait d'être simple, le graphe  $\text{Conf}_{\mathbf{d}^{(N)}}$  est de loi uniforme parmi les graphes simples dont les degrés sont donnés par  $\mathbf{d}^{(N)}$ . Ainsi, si une propriété est vraie avec probabilité tendant vers 1 pour  $\text{Conf}_{\mathbf{d}^{(N)}}$ , ce sera aussi le cas pour un graphe simple de loi uniforme.

Il peut être aussi intéressant de prendre les degrés  $\mathbf{d}^{(N)}$  aléatoires. Tant que l'hypothèse de convergence en loi du degré empirique (et de ses deux premiers moments) est vraie, les conclusions que nous donnerons resteront valables, y compris en conditionnant les graphes à être simples. Dans ce contexte, le modèle d'Erdős et Rényi peut être vu comme un modèle de configuration conditionné à être simple. Les degrés suivent en effet des lois binomiales de paramètres  $(N, p)$ , et dans le régime dilué  $p = c/N$  la loi limite  $\pi$  est la loi de Poisson de paramètre  $c$ .

Terminons cette présentation du modèle de configuration par une heuristique qui explique la transition de phase pour la présence d'une composante géante en faisant intervenir la topologie de la convergence locale. En effet, la topologie locale que nous avons introduit en section 1.3 pour les cartes est aussi valable pour les graphes à deux détails près : le choix de la racine et l'absence de planarité. En effet, les graphes  $\text{Conf}_{\mathbf{d}(N)}$  ne sont ni enracinés, ni plongés dans la sphère. Le fait qu'ils ne soient pas plongés n'est pas un problème en soi, qui peut le plus peut le moins. Pour l'enracinement, il faut une convention, et comme tous les sommets de nos graphes ont à priori le même rôle, nous prendrons pour racine un sommet uniforme (en l'absence de planarité, prendre une arête orientée comme racine n'est pas utile pour comparer des graphes). C'est cette convention que prennent par ailleurs Benjamini et Schramm pour définir leur topologie locale dans [16]. L'article de survol d'Aldous et Lyons [6] porte sur les graphes unimodulaires, qui regroupent en particulier toutes les limites locales de graphes aléatoires enracinés de manière uniforme comme ceux que nous étudions.

Sous nos hypothèses, le sommet racine d'un graphe  $\text{Conf}_{\mathbf{d}(N)}$  a donc un degré aléatoire qui converge en loi vers  $\pi$ . Les appariements de demi-arêtes étant uniformes, la probabilité qu'une demi-arête fixée du sommet racine soit appariée à une demi-arête appartenant à un sommet de degré  $k + 1$  est proportionnelle à  $(k + 1)$  fois le nombre de tels sommets. Lorsque la taille du graphe  $N$  tend vers l'infini, cette probabilité tend donc vers

$$\hat{\pi}_k = \frac{(k + 1) \pi_{k+1}}{\sum_j j \pi_j}.$$

Comme la probabilité de voir apparaître des cycles à distance fixée de la racine tend vers 0, il n'est pas difficile de se convaincre que la suite de graphes aléatoires  $(\text{Conf}_{\mathbf{d}(N)})_N$  converge en loi pour la topologie locale vers un arbre de Galton-Watson inhomogène, la racine ayant pour loi de reproduction  $\pi$  et tous les autres sommets ayant pour loi de reproduction sa version biaisée par la taille  $\hat{\pi}$ .

Au vu de cette convergence (qui n'est pas très difficile à établir proprement), on peut se douter que la transition de phase pour l'existence d'une composante géante dans les graphes  $\text{Conf}_{\mathbf{d}(N)}$  a lieu lorsque l'arbre aléatoire limite a une probabilité non nulle de survivre, c'est à dire lorsque

$$\sum_k k \hat{\pi}_k = \frac{\sum_k (k + 1) k \pi_{k+1}}{\sum_j j \pi_j} > 1. \quad (2.1)$$

Cette intuition est la bonne, mais un peu de travail est nécessaire pour la rendre rigoureuse. Ceci a été fait par Molloy et Reed [109]. Ils ont aussi montré un peu plus tard [110] que la proportion de sommets du graphe  $(\text{Conf}_{\mathbf{d}(N)})_N$  appartenant à la composante géante est donnée par la probabilité de survie  $\xi_\pi$  de l'arbre de Galton-Watson inhomogène limite. La probabilité de survie  $\rho_{\hat{\pi}}$  d'un arbre de Galton-Watson homogène de loi de reproduction  $\hat{\pi}$  est la plus petite solution strictement positive de l'équation

$$1 - \rho_{\hat{\pi}} = f_{\hat{\pi}}(1 - \rho_{\hat{\pi}}).$$

où  $f_{\hat{\pi}}$  est la fonction génératrice de  $\hat{\pi}$ . Dés lors, on trouve

$$1 - \xi_\pi = f_\pi(1 - \rho_{\hat{\pi}}), \quad (2.2)$$

où  $f_\pi$  est la fonction génératrice de  $\pi$ . Dans le cas particulier correspondant au modèle d'Erdős-Rényi,  $\pi = \mathcal{P}(c)$  est une loi de Poisson de paramètre  $c$  et  $\hat{\pi} = \pi$ , donnant  $\xi_\pi = \rho_{\hat{\pi}} = \rho_\pi$ .

## 2.2.1 Spectre

Le spectre d'opérateurs reliés aux graphes (opérateur d'adjacence, laplacien, ...) est un domaine en pleine expansion comme en témoigne la création du GDR Matrices et Graphes Aléatoires en

2017. Ces opérateurs sont des matrices aléatoires qui ne rentrent pas dans le champ d'action de la théorie classique dans le régime dilué car elles sont «creuses» (beaucoup de coefficients sont nuls). En particulier, leur mesure spectrale empirique ne converge a priori pas vers la loi du demi-cercle comme pour les matrices de Wigner. Cependant, dans de nombreux cas, ces mesures spectrales ont bien une limite faible lorsque la taille du graphe tend vers l'infini que la topologie de la convergence locale permet d'étudier.

Prenons l'exemple de la matrice d'adjacence  $A_N$  d'un graphe  $G_N$  dont les sommets constituent l'ensemble  $\{1, \dots, N\}$ . Chaque coefficient  $(i, j)$  de cette matrice compte le nombre d'arêtes entre les sommets  $i$  et  $j$  du graphe. Il est agréable d'encoder le spectre  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$  de la matrice par la mesure spectrale empirique

$$\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}.$$

Cette mesure de probabilité contient beaucoup d'informations sur la structure du graphe (voir par exemple les livres [55] et [125]). Par exemple, son moment d'ordre  $k$  est l'espérance du nombre de chemins de longueur  $k$  dans le graphe partant d'un sommet pris uniformément au hasard et terminant en ce même sommet :

$$\int x^k d\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\{\gamma : i \rightarrow i \text{ dans } G_N \text{ de longueur } k\}|.$$

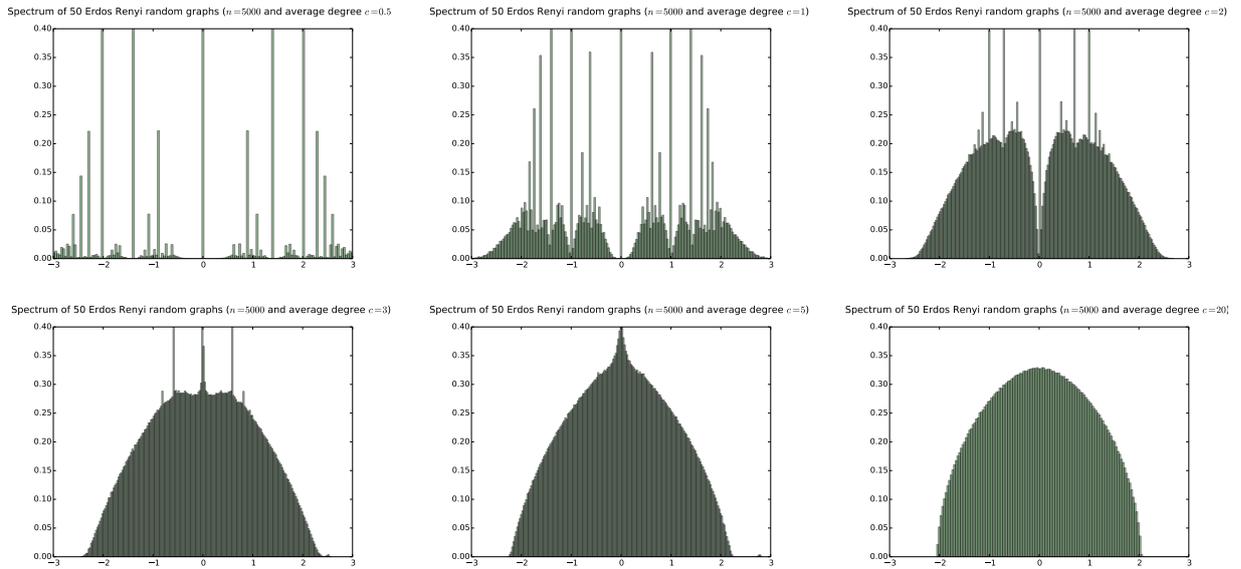
De plus, si la suite de graphes  $(G_N)$ , éventuellement aléatoires, enracinés en un sommet uniforme converge en loi pour la topologie locale vers un graphe aléatoire limite  $G_\infty$ , la suite de mesures spectrales empiriques  $(\mu_N)$  converge faiblement vers une mesure de probabilité limite  $\mu$  qui est la mesure spectrale de l'opérateur d'adjacence du graphe  $G_\infty$ . Cette convergence n'est pas difficile à établir si la suite de graphes  $(G_N)$  a des degrés uniformément bornés, mais il faut prendre des précautions si ce n'est pas le cas, y compris pour définir la mesure limite  $\mu$ . Une approche élémentaire par la méthode des moments est possible et a été réalisée par Zakharevich [129]. L'article de Bordenave et Lelarge [27] contient une approche beaucoup plus robuste par les résolvantes et fait pour la première fois un lien complet avec la convergence locale des graphes.

Le modèle de configuration et le modèle d'Erdős-Rényi dans le régime dilué ont donc des mesures spectrales empiriques (pour leur matrices d'adjacence) qui convergent faiblement. De plus, les mesures limites ne semble pas trop compliquées à étudier à première vue puisqu'il s'agit de mesures spectrales d'arbres de Galton Watson. Par exemple, pour des graphes  $d$ -réguliers uniformes, la limite est un arbre  $d$ -régulier infini dont la mesure spectrale est la loi de Kesten-McKay [83, 102] qui a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\frac{d\sqrt{4(d-1) - x^2}}{2\pi(d^2 - x^2)} \mathbf{1}_{(-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1})}(x) dx.$$

Malheureusement, la situation générale est beaucoup plus compliquée, y compris pour un arbre de Galton Watson de loi de reproduction Poisson  $\mathcal{P}(c)$  correspondant au modèle d'Erdős-Rényi. La Figure 2.1 fournit des simulations de ce cas pour quelques valeurs du paramètre  $c$ , dans les phases sous-critique et sur-critique.

Sans entrer dans les détails, on peut dire que ces mesures limites  $\mu_c$  sont encore très peu comprises. En effet, on sait que, pour tout  $c$ , le support de  $\mu_c$  est non borné, que ses atomes sont denses dans  $\mathbb{R}$  (voir le travail de Justin Salez [118] qui contient beaucoup d'informations sur les atomes) et qu'elle est purement atomique si et seulement si  $c < 1$  grâce à un travail récent de Bordenave, Sen et Virág [28]. Et c'est à peu près tout ...



**Figure 2.1** – Quelques simulations de la mesure limite  $\mu_c$  du spectre de graphes d'Erdős-Rényi.

Avec Nathanaël Enriquez, nous avons étudié ces mesures dans la publication [P5] dans le cas où le paramètre  $c$  est très grand. Comme on peut le deviner avec la simulation pour  $c = 20$  de la figure 2.1, la mesure  $\mu_c$  converge faiblement vers la loi du demi-cercle lorsque  $c$  tend vers l'infini. Nous avons obtenu un développement asymptotique pour  $\mu_c$  (illustré par la simulation de la Figure 2.2) :

**Théorème 2.2.1 ([P6])**

Pour une mesure  $\mu$ , soit  $m_k(\mu)$  le moment d'ordre  $k$  de  $\mu$  lorsqu'il existe. Pour tout  $k \geq 0$  et lorsque  $c \rightarrow \infty$ , on a :

$$m_k(\mu_c) = m_k\left(\sigma + \frac{1}{c}\sigma^{\{1\}}\right) + o\left(\frac{1}{c}\right)$$

où  $\sigma$  est la loi du demi cercle de densité  $\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\mathbf{1}_{|x|<2}$  et  $\sigma^{\{1\}}$  est une mesure signée de masse totale 0 et de densité :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{x^4 - 4x^2 + 2}{\sqrt{4-x^2}} \mathbf{1}_{|x|<2}.$$

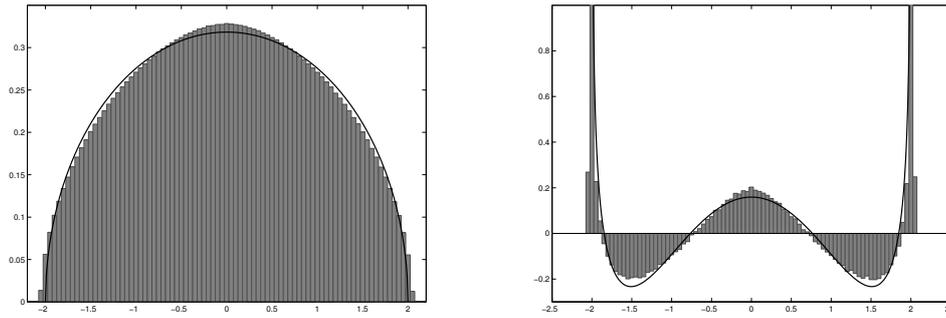
Dans notre article, ce théorème est d'abord prouvé avec la méthode des moments en partant des graphes finis sans utiliser leur convergence locale. Nous utilisons la convergence locale et un calcul direct sur les arbres limites pour établir un résultat plus général pour le modèle de configuration :

**Théorème 2.2.2 ([P6])**

Soit  $(\pi_c)_{c>0}$  une famille de probabilités sur  $\mathbb{N}$  telle qu'il existe  $\alpha > 0$  et une fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{\mathbb{E}_{\pi_c} [X(X-1)\cdots(X-k+1)]}{c^k} = 1 + \frac{f(k)}{c^\alpha} + o\left(\frac{1}{c^\alpha}\right)$$

quand  $c \rightarrow \infty$ . On note  $\mu_{\pi_c}$  la mesure spectrale d'un arbre de Galton-Watson inhomogène dont la racine a une loi de reproduction  $\pi_c$  et les autres sommets  $\hat{\pi}_c$ . Alors, pour tout  $k \geq 0$  et lorsque



**Figure 2.2** – Gauche : histogramme du spectre de 100 graphes d'Erdős-Rényi à  $N$  sommets et de paramètre  $c/N$  avec  $N = 10000$  et  $c = 20$  comparé à la densité de la loi du demi-cercle  $\sigma$ . Droite : histogramme du spectre de  $c \cdot (\mu_c - \sigma)$  pour ces mêmes matrices comparé à la densité de la mesure  $\sigma^{\{1\}}$  du théorème 2.2.1.

$c \rightarrow \infty$ , on a :

$$m_k(\mu_{\pi_c}) = m_k \left( \sigma + \frac{1}{c^\alpha} \sigma_f^{\{1\}} + \frac{1}{c} \sigma^{\{1\}} \right) + o \left( \frac{1}{c^{1 \wedge \alpha}} \right)$$

où  $\sigma$  est la loi du demi-cercle,  $\sigma^{\{1\}}$  est la mesure signée du théorème 2.2.1 et  $\sigma_f^{\{1\}}$  est une mesure signée de masse totale 0 de fonction génératrice

$$2 \frac{\sum_k f(k) (xT(x))^k}{1 - xT(x)^2},$$

$T$  étant la série génératrice des nombres de Catalan (ou encore la série génératrice des moments pairs de la loi du demi-cercle).

Toujours dans le même article, nous calculons un développement au second ordre dans le cas de degrés poissoniens, où la fonction  $f$  est nulle. l'interprétation du développement des moments  $m_k(\mu_{\mathcal{P}(c)})$  est plus délicate car les termes du second ordre ne sont pas les moments d'une mesure signée. Ceci est dû au fait que  $\mu_{\mathcal{P}(c)}$  n'est pas supportée sur  $[-2; 2]$  et que, plus précisément,  $\mu_{\mathcal{P}(c)}(\mathbb{R} \setminus [-2; 2])$  est d'ordre  $1/c^2$ . Nous montrons alors qu'il faut faire un développement au premier ordre de  $\mu_{\mathcal{P}(c)}$  à l'aide de mesures à support sur  $]2 - \beta/c; 2 + \beta/c[$  pour une valeur de  $\beta$  bien choisie pour pouvoir obtenir un développement d'ordre 2 qui s'interprète bien avec des mesures signées.

Nathan Noiry, actuellement en thèse avec Nathanaël et moi, a publié un article [112] qui généralise ces résultats à des graphes bipartis et des matrices de Wishart ayant des moments qui explosent lorsque la dimension de la matrice tend vers l'infini.

## 2.2.2 Exploration en profondeur

Un des algorithmes les plus simples pour explorer un graphe est l'algorithme de recherche en profondeur (DFS, pour Depth First Search). De manière informelle, cet algorithme procède ainsi : partant d'un sommet du graphe, disons  $v$ , on explore les sommets un par un, de voisin en voisin, tant qu'on peut découvrir des nouveaux sommets. Si à un moment on se trouve sur un sommet dont on a déjà exploré tous les voisins, on rebrousse chemin jusqu'à trouver un sommet exploré précédemment pour lequel il reste des voisins à visiter et on relance le processus de là. Ce procédé construit un arbre couvrant de la composante connexe de  $v$ , qui essaie d'aller le plus droit possible dans le graphe de

manière gloutonne. Les lignées ancestrales de cet arbre sont entre autres des chemins auto-évitant du graphe.

Cet algorithme a été utilisé avec succès par Aldous [5] pour le modèle d'Erdős-Rényi dans le régime critique  $c \sim 1$ . Dans ce régime, si le paramètre  $c$  tend vers 1 à la bonne vitesse, les composantes connexes du graphe sont de taille polynomiale. La structure du graphe au régime critique a été très étudiée et est maintenant assez bien comprise : voir par exemple le travail d'Addario-Berry, Broutin et Goldschmidt [1] et les références qu'il contient. Un comportement analogue a été observé pour les modèles de configuration avec une fenêtre critique très similaire par Hatami et Molloy [76]. Voir aussi les travaux très récents de Riordan [117], de Bollobás et Riordan [26] ou de Dhara, van der Hofstad, Leeuwaarden et Sen [56] sur le sujet.

L'algorithme DFS construit de manière naïve des longs chemins auto-évitant dans un graphe. Erdős avait conjecturé [61] que dans un graphe d'Erdős-Rényi surcritique (avec donc  $c > 1$ ), le plus long chemin auto-évitant dans le graphe a une longueur proportionnelle au nombre total de sommets du graphe. Ceci a été démontré grâce à un calcul combinatoire par Ajtai, Komlós and Szemerédi [3]. La longueur précise du plus long chemin simple dans un graphe aléatoire est un problème difficile et, pour le modèle d'Erdős-Rényi, les seuls résultats précis connus sont asymptotiques en  $c$  lorsque  $c \rightarrow \infty$  ou  $c \rightarrow 1$  (voir Frieze [65], Bollobás [24] et Bollobás, Fenner et Frieze [25]). La seule borne constructive connue est due à Fernandez de la Vega [63]. Cette borne inférieure est  $(1 - 2.78/c)N$ , où  $N$  est le nombre de sommets du graphe, et est valable pour  $c > 2.78$ . Il n'y a pas de résultats généraux pour le modèle de configuration, à part bien sûr pour les graphes  $d$ -réguliers qui sont hamiltoniens avec grande probabilité [23].

Krivelevich et Sudakov ont utilisé le DFS dans l'article [89] dans l'optique de donner une preuve simple de la transition de phase à  $c = 1$  pour l'existence d'une composante géante dans un graphe d'Erdős-Rényi. Ils démontrent que l'arbre couvrant d'une composante connexe a une probabilité positive d'avoir une hauteur supérieure à  $\varepsilon N$  si et seulement si  $c > 1$ , ce qui redémontre au passage le résultat d'Ajtai, Komlós and Szemerédi [3]. Ils ne poussent pas l'étude plus loin car leur but était d'insister sur la facilité avec laquelle on pouvait obtenir la transition de phase par cette méthode.

Avec Nathanael Enriquez et Gabriel Faraud, nous avons étudié plus en détail le DFS dans le cas du graphe d'Erdős-Rényi surcritique dans l'article [P12]. En particulier, le profil de l'arbre couvrant de la composante géante du graphe construit par l'algorithme converge vers une limite déterministe pour laquelle nous avons une description paramétrique. Ce profil est encodé par sa fonction de contour classique que nous noterons  $(X_k)_{k \geq 0}$ . Ainsi, en tout temps  $k$ , l'incrément  $X_{k+1} - X_k$  vaut  $+1$  si le DFS découvre un nouveau sommet au temps  $k + 1$ , et  $-1$  s'il rebrousse chemin. La marche  $(X_k)$  est donc définie pour  $k$  allant de 0 à deux fois le nombre de sommets de la composante géante (si on exclut le sommet départ). Nous savons de plus que cette composante géante a une proportion de sommets qui se concentre autour de  $\rho_c := \xi_{\mathcal{P}(c)}$  défini en équation (2.2). Nous montrons le résultat suivant sur la marche  $(X_k)$  :

### **Théorème 2.2.3 ([P12])**

*La convergence suivante a lieu en probabilité pour la topologie de la convergence uniforme :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{X_{[tN]}}{N} = h(t),$$

*où  $h$  est une fonction définie et continue sur  $[0, 2\rho_c]$ . Le graphe  $(t, h(t))_{t \in [0, 2\rho_c]}$  peut être découpé en deux morceaux de courbes, un premier croissant et un second décroissant paramétrisés*

respectivement par :

$$(t, h(t))_{0 \leq t \leq f(0)} = (f(\rho), g(\rho))_{0 \leq \rho \leq \rho_c},$$

$$(t, h(t))_{f(0) \leq t \leq 2\rho_c} = \left( f(\rho) + 2\rho \left( 1 - \frac{f(\rho) + g(\rho)}{2} \right), g(\rho) \right)_{0 \leq \rho \leq \rho_c},$$

où les fonctions  $f$  et  $g$  sont données par

$$f(\rho) = \frac{1}{c} \left[ Li_2(\rho_c) - Li_2(\rho) + \log \frac{1 - \rho_c}{1 - \rho} - 2 \left( \frac{\log(1 - \rho_c)}{\rho_c} - \frac{\log(1 - \rho)}{\rho} \right) \right],$$

$$g(\rho) = \frac{1}{c} \left[ Li_2(\rho) - Li_2(\rho_c) + \log \frac{1 - \rho}{1 - \rho_c} \right],$$

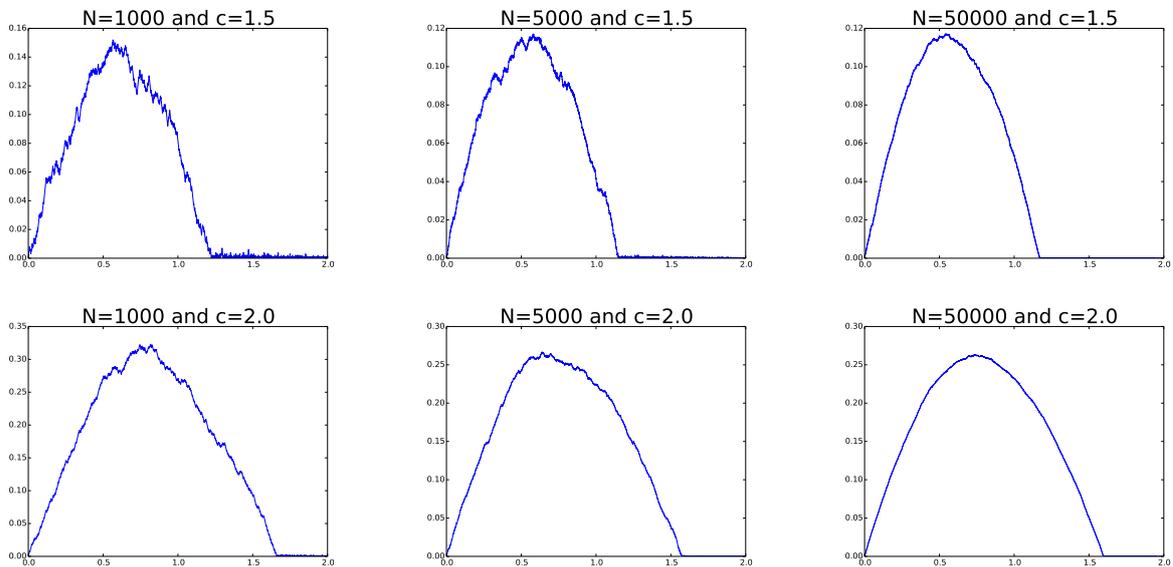
et  $Li_2$  est la fonction dilogarithme définie par  $Li_2(z) := \sum_{k=1}^{\infty} z^k / k^2$ .

Une des conséquences de ce résultat de forme asymptotique est la découverte d'un chemin auto-évitant de longueur linéaire en la taille de graphe par l'algorithme de recherche en profondeur. Cette longueur est donnée par la hauteur de la courbe du théorème qui vaut  $g(0)$ . On obtient alors :

### Corollaire 2.2.4 ([P12])

Soit  $c > 1$ , lorsque  $N$  tend vers l'infini, avec probabilité tendant vers 1, le plus long chemin auto-évitant dans  $\mathcal{G}(N, c/N)$  construit par l'algorithme recherche en profondeur est de longueur  $(\rho_c - \frac{Li_2(\rho_c)}{c}) \cdot N + o(N)$ , où  $Li_2$  est le dilogarithme.

La figure 2.3 donne quelques simulations de ce phénomène. Il y est tracé la fonction de contour de l'arbre construit par le DFS et le profil déterministe limite apparaît clairement.



**Figure 2.3** – Fonction de contour de l'arbre couvrant construit par le DFS dans des graphes  $\mathcal{G}(N, c/N)$  pour différentes valeurs de  $N$  et  $c$ . Les abscisses et les ordonnées ont été divisées par  $N$ .

La stratégie que nous avons adoptée dans [P12] pour démontrer le théorème 2.2.3 est la suivante. Premièrement, il est clair qu'à tout moment de l'exploration, le graphe induit par les sommets restant à explorer est un graphe d'Erdős-Rényi, et la probabilité de connexion entre deux sommets est toujours  $c/N$ . Ainsi, si il reste une proportion  $(1 - \alpha)$  de sommets à explorer, le graphe induit par ces sommets a un degré moyen  $(1 - \alpha)c$  et est surcritique tant que cette quantité est strictement plus grand que 1. Nous étudions alors l'intervalle entre deux temps ou l'exploration entre dans la composante géante du graphe induit par les sommets inexplorés ; ce qui nous donne accès au profil limite.

Cette stratégie s'avère beaucoup plus complexe à mettre en œuvre pour un modèle de configuration général. En effet, si le graphe induit par les sommets est encore un modèle de configuration, la distribution empirique de ses degrés n'est pas directement accessible. Dans la prépublication [P13], écrite en collaboration avec Nathanaël Enriquez, Gabriel Faraud et Nathan Noiry, nous arrivons à étudier l'évolution de cette distribution. En particulier, en adaptant la méthode de l'équation différentielle de Wormald [128], nous montrons qu'elle est dirigée par un système infini d'équation différentielles qui s'encode par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) &= \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) \left( (1 - s) \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, 1) - 1 \right), \\ f(0, s) &= f_\pi(s); \end{cases}$$

où  $\rho_t$  est la plus petite solution dans  $(0, 1]$  de l'équation :

$$1 - \rho_t = \hat{f}(t, 1 - \rho_t) := \frac{\frac{\partial f}{\partial s}(t, 1 - \rho_t)}{\frac{\partial f}{\partial s}(t, 1)}.$$

Heureusement, il s'avère que ce système d'équations a une unique solution, qui plus est explicite ! Ceci nous permet de complètement identifier la loi du graphe induit par les sommets inexplorés le long de l'exploration :

### **Théorème 2.2.5 ([P13])**

*Soit  $\pi$  une probabilité sur  $\mathbb{Z}_+$  de série génératrice  $f$ , surcritique qu sens où l'inégalité (2.1) est vérifiée. Soit aussi  $(\mathcal{C}(\mathbf{d}^{(N)}))_{N \geq 1}$  une suite de modèles de configurations sur  $N$  sommets dont la loi empirique sur les degrés  $\mathbf{d}^{(N)}$  converge vers  $\pi$  (nous avons aussi besoin de la convergence du second moment et d'une hypothèse très raisonnable sur les queues de distributions, qui autorise de prendre des lois à queues lourdes, voir l'article pour plus de précisions).*

*Notons  $\alpha_c$  la plus petite solution strictement positive de l'équation*

$$\frac{f''_\pi(f_\pi^{-1}(1 - \alpha))}{f'_\pi(1)} = 1.$$

*Pour tout  $\alpha \in [0, \alpha_c)$ , soit  $\pi_\alpha$  la loi de probabilité sur  $\mathbb{Z}_+$  de série génératrice*

$$g(\alpha, s) = \frac{1}{1 - \alpha} f_\pi \left( f_\pi^{-1}(1 - \alpha) - (1 - s) \frac{f'_\pi(f_\pi^{-1}(1 - \alpha))}{f'_\pi(1)} \right).$$

*Alors, pour tout  $\alpha \in [0, \alpha_c)$ , les graphes induits par les sommets inexplorés après avoir visité  $\alpha N$  sommets lors de l'exploration en profondeur forment une suite de graphes de configurations dont la distribution empirique des degrés converge vers  $\pi_\alpha$ .*

En adaptant les techniques que nous avons développé pour les graphes d'Erdős-Rényi, ce résultat nous permet alors de démontrer un analogue au théorème 2.2.3 pour la convergence du profil de l'exploration en profondeur d'un modèle de configuration :

**Théorème 2.2.6 ([P13])**

*Sous les hypothèses du théorème 2.2.5, la convergence suivante a lieu en probabilité pour la topologie de la convergence uniforme :*

$$\forall t \in [0, 2\xi_\pi], \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{X_{[tN]}}{N} = h(t),$$

où  $h$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[0, 2\xi_\pi]$  définie ci-dessous.

Il existe une fonction implicite  $\alpha(\rho)$ , définie sur  $[0, \rho_\pi]$  et telle que  $1 - \rho = \widehat{g}(\alpha(\rho), 1 - \rho)$  où, pour tout  $\alpha \in [0, \alpha_c]$ , la fonction  $s \mapsto \widehat{g}(\alpha, s)$  est la version biaisée par la taille de la fonction  $s \mapsto g(\alpha, s)$  définie dans le théorème 2.2.5. Le graphe  $(t, h(t))_{t \in [0, 2\xi_\pi]}$  peut être découpé en une première partie croissante et une seconde décroissante. Ces deux parties ont les paramétrisations respectives suivantes pour  $\rho \in [0, \rho_\pi]$  :

$$\begin{cases} x^\uparrow(\rho) & := (2 - \rho) \alpha(\rho) - \int_\rho^{\rho_\pi} \alpha(u) du, \\ y^\uparrow(\rho) & := \rho \alpha(\rho) + \int_\rho^{\rho_\pi} \alpha(u) du, \end{cases}$$

pour la partie croissante et

$$\begin{cases} x^\downarrow(\rho) & := x^\uparrow(\rho) + 2(1 - \alpha(\rho)) \left(1 - g(\alpha(\rho), 1 - \rho)\right), \\ y^\downarrow(\rho) & := y^\uparrow(\rho), \end{cases}$$

pour la partie décroissante.

Une conséquence directe de cette convergence est :

**Corollaire 2.2.7 ([P13])**

Soit  $\mathcal{H}_N$  la longueur du plus grand chemin simple dans un graphe de configuration sur  $N$  sommets et de distribution empirique des degrés tendant vers  $\pi$  et satisfaisant les hypothèses du théorème 2.2.5. Alors, avec les notations du théorème 2.2.6, en probabilité :

$$\liminf_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{H}_N \geq y^\uparrow(0) = \int_0^{\rho_\pi} \alpha(u) du.$$

Bien sûr, cette borne inférieure n'est pas optimale. C'est cependant à ma connaissance la seule connue pour une loi sur les degrés  $\pi$  générique. De plus elle est constructive en temps linéaire contrairement aux bornes optimales connues dans certains cas. Par exemple, les graphes  $d$ -réguliers sont presque hamiltoniens pour  $d \geq 3$  (voir [23]), la quantité  $\mathcal{H}_N/N$  converge donc vers 1 en probabilité. Cependant, aucun algorithme polynomial ne permet de construire de chemins aussi longs. En appliquant notre théorème 2.2.5 à  $\pi = \delta_d$ , on trouve que  $\pi_\alpha$  est la loi binomiale  $\text{Bin}\left(d, (1 - \alpha)^{\frac{d-2}{d}}\right)$  et que

$$y_d^\uparrow(0) = 1 - \int_0^1 \left( \frac{1 - x^{\frac{1}{d-1}}}{1 - x} \right)^{\frac{d}{d-2}} dx.$$

## 2.2.3 Perspectives

**Longs chemins dans les graphes aléatoires.** Les travaux que nous avons fait sur l'algorithme de recherche en profondeur dans les graphes d'Erdős-Rényi et le modèle de configuration permettent de construire des longs chemins. Ces chemins sont simples (ne passent pas deux fois par le même sommet), mais peuvent aussi être induits (au sens où deux sommets non consécutifs du chemin ne sont pas voisins dans le graphe) en modifiant un peu l'algorithme. Nous sommes actuellement en train d'étudier la longueur de ces chemins, obtenant une borne inférieure pour la longueur de chemin induits qui semble meilleure que celles actuellement connues (voir par exemple Frieze et Jackson [66]).

**Spectres de graphes aléatoires.** Une question apparaît en filigrane dans les travaux sur les spectres de graphes aléatoires : quels sont les liens entre la géométrie d'un graphe et son spectre ? Nous avons des raisons de penser que le spectre d'un graphe est influencé par ses longs chemins induits. Nous avons comme projet d'étudier cette influence plus précisément, et plus généralement d'essayer de comprendre les liens entre propriétés géométriques et propriétés spectrales qui sont encore mystérieux.

## 2.3 Processus de contact et percolation par groupements cumulatifs

### 2.3.1 Motivation : le processus de contact

Du point de vue des applications, l'étude de la propagation d'infections sur les graphes aléatoires est une question importante. Un des modèles les plus fondamentaux pour ce genre d'infections est le processus de contact introduit par Harris [75]. Ce système de particules en interactions sur un graphe éventuellement infini  $G = (V, E)$  est défini mathématiquement comme un processus de Markov à temps continu à valeurs dans l'ensemble des parties de  $V$ . De manière informelle, chaque sommet du graphe est *sain* ou *infecté* et l'évolution markovienne du système, qui dépend d'un paramètre  $\lambda > 0$  appelé *taux d'infection*, peut être décrite par les transitions suivantes :

- Chaque site infecté guérit et redevient sain à taux 1,
- Chaque site sain devient infecté à taux  $\lambda N$ , où  $N$  est le nombre de sites voisins infectés (de manière équivalente, chaque site infecté infecte ses voisins à taux  $\lambda$ ).

Une définition rigoureuse détaillée et un aperçu des résultats connus sur ce processus est disponible dans les ouvrages de Liggett [100, 99] et de Durrett [60].

Ce processus admet une transition de phase : pour tout graphe localement fini  $G$  il existe une intensité critique  $\lambda_c(G) \in [0, +\infty]$  en deça duquel l'infection démarrée d'un nombre fini de sommets s'éteint en temps fini presque sûrement et au delà duquel l'infection survit pour tout temps avec probabilité positive.

Il n'est pas très difficile de voir que  $\lambda_c(G) > 0$  si  $G$  est à degrés bornés en couplant l'infection avec une marche aléatoire branchante et un peu plus délicat de montrer que  $\lambda_c(G) < \infty$  dès que  $G$  est infini (voir par exemple [75]).

Lorsque les degrés du graphe sont non bornés, les choses se corsent et il est possible que la transition de phase soit triviale avec un seuil critique  $\lambda_c = 0$ . C'est par exemple le cas pour les arbres de Galton Watson dont la loi de reproduction  $B$  a une queue vérifiant

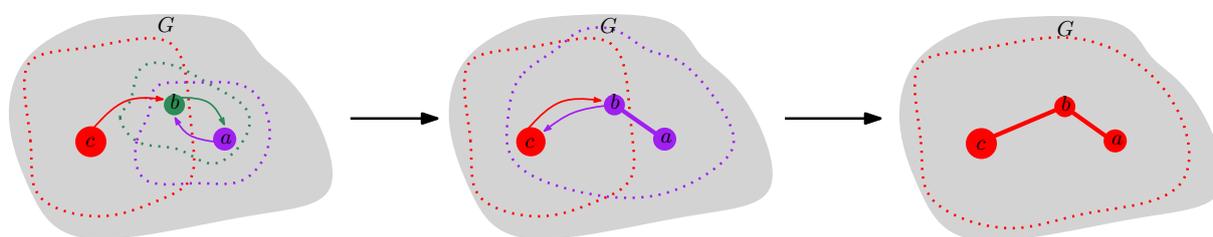
$$\mathbb{P}(B \geq x) \geq \exp(-x^\beta)$$

pour un certain  $\beta \in (0, 1)$  comme l'a montré Pemantle [113]. En particulier,  $B$  peut avoir des moments de tout ordre et le processus de contact sur un tel arbre peut ne pas avoir de phase sous-critique, à la différence d'un arbre ayant la même croissance mais de degré borné. Ce résultat indique donc que la

présence ou non d'une phase sous-critique pour le processus de contact dépend de manière fine de la géométrie du graphe considéré, et en particulier de ses sommets de haut degré.

Le processus de contact se révèle donc délicat à étudier en milieu aléatoire où la présence de degrés non bornés est typique. J'ai commencé à travailler avec Arvind Singh sur le sujet dans l'optique de trouver au moins un exemple non trivial de graphe à degrés non bornés pour lequel  $\lambda_c(G) > 0$  car aucun n'existait dans la littérature. Dans la publication [P7], nous établissons un critère pour qu'un graphe ait une intensité critique non nulle. Ce critère s'exprime en fonction d'un nouveau procédé de percolation, que nous avons appelé *percolation par groupements cumulatifs* (*Cumulative Merging Percolation*).

L'heuristique qui fait apparaître ce processus de percolation concerne l'influence des sommets de gros degré sur la survie du processus de contact dans un graphe infini  $G$ . Pour décrire la situation, fixons un nombre entier  $D$  qui aura vocation à être assez grand pour que les sommets de  $G$  de degré plus grand que  $D$  soient typiquement très éloignés. Fixons ensuite un taux d'infection  $\lambda$  de sorte que le processus de contact sur un graphe dont les degrés sont au plus  $D$  soit sous-critique. La figure 2.4 illustre les propos qui suivent.



**Figure 2.4** – Heuristique de la procédure de groupement cumulatif. À gauche  $a$  et  $b$  s'envoient mutuellement des infections. Le site  $c$  infecte aussi le site  $b$  mais la réciproque est fautive. Au milieu  $a$  et  $b$  sont regroupés et peuvent infecter des sites plus lointains, dont  $c$ . À droite les trois sites  $a, b$  et  $c$  sont regroupés et peuvent infecter des sites jusqu'à la distance  $d_a + d_b + d_c$ .

Imaginons maintenant que  $G$  possède un seul sommet  $a$  de degré  $d_a > D$ . Si l'épidémie démarre avec uniquement le sommet  $a$  infecté, elle va mettre un temps de l'ordre de  $\exp(d_a)$  pour s'éteindre. En effet, lorsque le site  $a$  guérit, avec une grande probabilité une fraction de ses voisins est malade et peuvent le réinfecter avant de guérir. La stratégie pour guérir toute l'étoile autour de  $a$  consiste donc à guérir  $a$  ainsi que ses  $d_a$  voisins avant toute nouvelle infection, ce qui arrive après un temps de l'ordre de  $\exp(d_a)$ . Pendant ce temps, l'infection se propage dans un milieu sous-critique. La distance maximale atteinte par l'infection est donc d'ordre logarithmique par rapport au temps qu'elle dure. Ceci fait que les infections parties de  $a$  atteignent une distance maximale de l'ordre de  $d_a$ .

Si maintenant à l'intérieur de la boule de centre  $a$  et de rayon  $d_a$  se trouve un autre sommet  $b$  de degré  $d_b > D$  deux cas peuvent se produire :

1. Si  $d_b$  est plus petit que la distance entre  $a$  et  $b$ , alors le sommet  $a$  va infecter le sommet  $b$  régulièrement puis va finalement devenir sain au bout d'un temps  $\exp(d_a)$ . Le site  $b$  mettra alors un temps de l'ordre de  $\exp(d_b)$  pour guérir à son tour, infectant au passage des sommets jusqu'à une distance  $d_b$ . Le sommet  $b$  ne réinfecte donc pas le sommet  $a$  et l'épidémie met un temps total  $\exp(d_a) + \exp(d_b) \sim \exp(d_a)$  pour s'éteindre.
2. Si  $d_b$  est plus grand que la distance entre  $a$  et  $b$ , avec le même raisonnement on voit que le site  $b$  va réinfecter le site  $a$  avec grande probabilité. Il y a alors un «renforcement multiplicatif» entre  $a$  et  $b$  et, pour que l'infection s'arrête, il faut que les deux voisinages de  $a$  et de  $b$

guérissent simultanément. Par indépendance de la dynamique dans des régions distinctes du graphe cela va mettre un temps de l'ordre de  $\exp(d_a) \times \exp(d_b) = \exp(d_a + d_b)$ .

Dans le second cas, du point de vue de l'infection, on peut donc considérer que les sommets  $a$  et  $b$  agissent comme un unique sommet de degré  $d_a + d_b$  qui, pendant le temps  $\exp(d_a + d_b)$  où il est infecté va émettre des infections qui atteindront une distance  $d_a + d_b$  de chacun des sites  $a$  et  $b$ . Si dans ce rayon d'action il existe un autre site  $c$  de degré plus grand que  $D$  et que la distance qui le sépare de  $\{a, b\}$ , ce sommet va alors interagir de manière cumulative avec le groupe  $\{a, b\}$  pour former un groupe  $\{a, b, c\}$  de rayon d'action  $d_a + d_b + d_c$ , etc. On voit donc apparaître une manière de partitionner le graphe en regroupant de manière successive les sites qui interagissent pour la dynamique du processus de contact. Nous formalisons cette idée dans [P7] par le procédé de percolation par regroupements cumulatifs.

### 2.3.2 Partition par groupements cumulatifs

Nous définissons maintenant le modèle de partition par groupements cumulatifs sur un graphe pondéré quelconque. Il n'y a pas ici de référence au processus de contact (ni même à la théorie des probabilités). Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe, localement fini. On note  $d$  la distance de graphe associée. Étant donné deux sous ensembles  $A, B \subset V$ , on note  $d(A, B) := \min\{d(a, b), a \in A \text{ et } b \in B\}$ . On se fixe une pondération des sites du graphe :

$$(r(v), v \in V) \in [0, +\infty)^V.$$

L'ensemble des poids définit une mesure sur  $V$  et l'on note  $r(A) := \sum_{a \in A} r(a)$  le poids total d'un ensemble  $A \subset V$ . On se fixe aussi un paramètre

$$\alpha \in [1, \infty)$$

appelé *coefficient d'expansion*. Considérons les partitions  $\mathcal{C}$  de l'ensemble  $V$  des sites du graphe satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall C, C' \in \mathcal{C}, \quad C \neq C' \implies d(C, C') > \min\{r(C), r(C')\}^\alpha. \quad (2.3)$$

Nous dirons de ces partitions qu'elles sont *admissibles*.

La partition triviale  $\{V\}$  est admissible et une intersection quelconque de partitions admissibles est encore admissible. On peut donc considérer la plus fine partition admissible appelée *partition par groupements cumulatifs* (CMP) définie par

$$\mathcal{C} := \bigcap_{\substack{\text{partitions} \\ \text{admissibles } \mathcal{C}}} \mathcal{C}.$$

Nous appellerons *amas* les éléments de cette partition. Le *rayon d'action* d'un amas  $C \in \mathcal{C}$  est l'ensemble des sites à distance au plus  $r(C)^\alpha$  de  $C$  noté  $B(C, r(C)^\alpha) := \{v \in V, d(v, C) \leq r(C)^\alpha\}$ .

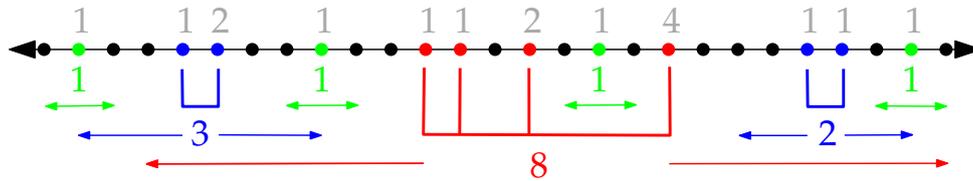
Dans la définition précédente, la partition  $\mathcal{C}$  est construite en « partant du haut ». On peut construire  $\mathcal{C}$  en « partant du bas » via un algorithme de fusions d'amas similaire à celui décrit dans l'heuristique de la section précédente (ce qui justifie le nom de la partition) :

#### Proposition 2.3.1 ([P7])

Considérons l'algorithme suivant

(1) On part initialement de la partition la plus fine  $\mathcal{C} = \{\{v\}, v \in V\}$ .

(2) À chaque étape, s'il existe  $C, C' \in \mathcal{C}$  tels que  $d(C, C') \leq \min\{r(C), r(C')\}^\alpha$ , alors on



**Figure 2.5** – Exemple de CMP sur  $\mathbb{Z}$  avec  $\alpha = 1$ . Le poids de chaque sommet est indiqué en gris au-dessus de celui-ci lorsque ce n'est pas 0. Trois amas de plus de 2 sommets sont créés : un de poids total 2 et un de poids total 3 ont exactement 2 sommets; l'amas rouge contient 4 sommets et a un poids total de 8. Les flèches indiquent le rayon d'influence de chaque sommet.

*regroupe  $C$  et  $C'$  dans une même classe d'équivalence puis on répète (2) tant qu'il reste des fusions possibles.*

*Cette procédure définit une suite de partitions de plus en plus grossières qui converge vers  $\mathcal{C}$ , indépendamment de l'ordre des fusions choisies.*

La figure 2.5 donne un exemple de CMP sur  $\mathbb{Z}$ . Faisons quelques remarques préliminaires :

- La distance minimale entre deux sites distincts du graphe est 1. En conséquence, tout site  $v \in V$  avec  $r(v) < 1$  se retrouve isolé dans la CMP ie.  $\{v\} \in \mathcal{C}$ .
- Un amas  $C \in \mathcal{C}$  est infini si et seulement si son rayon d'action est  $V$  entier. En particulier, si un amas infini existe dans  $\mathcal{C}$ , il est forcément unique.
- La CMP avec coefficient d'expansion  $\alpha > 1$  est une partition (possiblement strictement) plus grossière que la CMP avec coefficient d'expansion 1 et poids initiaux  $r(v)^\alpha$ .
- Par définition de la CMP, si  $C \neq C' \in \mathcal{C}$ , on est dans au plus un des deux cas suivants :

$$(a) B(C, r(C)^\alpha) \cap C' \neq \emptyset \quad (b) B(C', r(C')^\alpha) \cap C \neq \emptyset.$$

Dans le cas (a), on note  $C \rightarrow C'$  (et  $C' \rightarrow C$  dans le cas (b)). La relation  $\cdot \rightarrow \cdot$  induit une relation d'ordre partielle sur les amas de  $\mathcal{C}$  pour laquelle il n'existe aucune chaîne infinie descendante  $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots$  (mais il peut exister des chaînes infinies montantes).

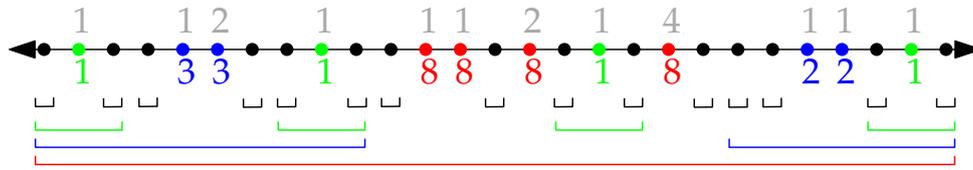
Il est facile de construire des exemples de graphes pondérés pour lesquels  $\mathcal{C}$  n'a pas d'amas infini mais tels que la modification du poids d'un seul site peut provoquer une avalanche de fusions conduisant à la création d'un amas infini. Une modification locale peut donc avoir un effet global. Pourtant, à cause de la condition de symétrie sur les fusions qui requiert que chacun des deux amas doit toucher l'autre dans son rayon d'action, ce modèle conserve tout de même des propriétés agréables de localité. Celles-ci sont mises en évidence avec la notion d'*ensemble stable* : pour tout  $v \in V$  notons  $\mathcal{C}_v$  l'amas de  $\mathcal{C}$  contenant  $v$ ; un ensemble  $H \subset V$  est dit *stable* s'il vérifie

$$\bigcup_{v \in H} B(\mathcal{C}_v, r(\mathcal{C}_v)^\alpha) = H.$$

Remarquons qu'un singleton  $\{v\}$  est stable si et seulement si  $r(v) < 1$ . Plus généralement, les ensembles stables sont les ensembles  $H$  pour lesquels, informellement, « aucun rayon d'action ne sort de  $H$  » et qui ne pourront donc jamais fusionner avec d'autres sites, cf. figure 2.6 pour des exemples. Ainsi, bien que cela ne soit pas apparent dans la définition précédente, la notion de stabilité est bien locale comme l'atteste la proposition suivante.

**Proposition 2.3.2 ([P7])**

| Soit  $H$  un sous ensemble de  $V$ . La propriété «  $H$  est stable » ne dépend pas de la valeur des poids



**Figure 2.6** – Stabilisateurs des amas de la CMP de la figure 2.5. On constate que l'ensemble entier représenté ici est stable (car c'est une union de stabilisateurs). On voit apparaître la structure multi-échelle de la partition et le fait que les stabilisateurs sont emboîtés.

$(r(v), v \in V \setminus H)$  et peut se vérifier en construisant la CMP uniquement à l'intérieur de  $H$  (qui, dans ce cas, coïncide avec la trace de la CMP sur  $G$  restreinte à  $H$ ).

On vérifie facilement qu'une intersection (respectivement union) quelconque d'ensembles stables est encore un ensemble stable. Puisque le graphe entier est stable, il est naturel de définir le *stabilisateur* d'un ensemble  $A \subset V$  noté  $\mathcal{S}_A$  comme le plus petit ensemble stable contenant  $A$ .

Le théorème suivant découle du fait que la relation d'ordre induite par  $\cdot \rightarrow \cdot$  sur les amas de la CMP n'a que des chaînes descendantes de longueur finie. Il s'avère utile pour déterminer l'existence d'un amas infini. Informellement, ce résultat affirme que les fusions d'amas construisant la CMP peuvent se propager « vers l'infini » mais ne peuvent pas, par contre, « venir de l'infini ».

### **Théorème 2.3.3 ([P7])**

Soit  $v \in V$ , on a l'équivalence

$$|\mathcal{C}_v| = +\infty \iff |\mathcal{S}_{\{v\}}| = \infty. \iff \mathcal{S}_{\{v\}} = V.$$

En particulier,  $\mathcal{C}$  ne possède pas d'amas infini si et seulement si il existe une famille  $(S_i)$  d'espaces stables finis telle que  $V = \bigcup_i S_i$ .

### **2.3.3 Transition de phase pour la percolation sur la CMP**

Nous allons maintenant considérer plusieurs familles de graphes aléatoires pondérés pour lesquelles nous allons étudier l'existence ou non d'un amas infini dans la CMP. Les deux premiers modèles sont les analogues des modèles classiques de percolation alors que le troisième modélise le renforcement du processus de contact décrit plus tôt.

**Modèle 1 (Percolation de Bernoulli)** Le graphe  $G = (V, E)$  est déterministe et les poids  $(r(v), v \in V)$  forment une famille i.i.d. de v.a. de Bernoulli de paramètre

$$p = \mathbb{P}\{r(v) = 1\} = 1 - \mathbb{P}\{r(v) = 0\}.$$

**Modèle 2 (Percolation continue)** Le graphe  $G = (V, E)$  est déterministe et les poids  $(r(v), v \in V)$  forment une famille i.i.d. de v.a. telles que

$$r(v) \stackrel{\text{loi}}{=} \gamma Z$$

où  $Z$  est une v.a. positive non nulle et  $\gamma > 0$ .

**Modèle 3 (Pondération par les degrés)** Le graphe  $G = (V, E)$  est aléatoire et les poids  $(r(v), v \in V)$  sont donnés par

$$r(v) = d_v \mathbf{1}_{\{d_v \geq \Delta\}}$$

où  $d_v$  est le degré du site  $v$  et  $\Delta > 0$ .

Chaque modèle possède un paramètre libre –  $p$ ,  $\gamma$  et  $\Delta$  respectivement – et nous noterons  $\mathcal{C}(p)$ ,  $\mathcal{C}(\gamma)$  et  $\mathcal{C}(\Delta)$  les partitions CMP obtenues dans chaque cas. Nous pouvons, par monotonie, définir pour chaque modèle une valeur critique :

$$\begin{aligned} p_c &:= \inf\{p \geq 0, \mathcal{C}(p) \text{ contient un amas infini avec probabilité non nulle}\}, \\ \gamma_c &:= \inf\{\gamma \geq 0, \mathcal{C}(\gamma) \text{ contient un amas infini avec probabilité non nulle}\}, \\ \Delta_c &:= \sup\{\Delta \geq 1, \mathcal{C}(\Delta) \text{ contient un amas infini avec probabilité non nulle}\}. \end{aligned}$$

Lorsque le graphe  $G$  est suffisamment régulier, on peut vérifier à l'aide d'arguments classiques d'ergodicité que l'existence d'un amas infini dans  $\mathcal{C}$  est un événement trivial :

**Proposition 2.3.4 ([P7])**

*Si  $G$  est un graphe transitivement invariant (modèles 1 et 2) ou si  $G$  est stationnaire et ergodique (modèle 3), alors on a*

$$\mathbb{P}\{\mathcal{C} \text{ contient un amas infini}\} \in \{0, 1\}.$$

Le résultat suivant montre qu'à la différence de la percolation classique, il existe une phase sur-critique sur tout graphe infini.

**Théorème 2.3.5 ([P7])**

*Si  $G$  est un graphe infini, pour la CMP du modèle 1 ou 2 avec coefficient d'expansion  $\alpha \geq 1$ , on a*

$$p_c < 1 \quad \text{et} \quad \gamma_c < +\infty.$$

Il suffit de montrer le résultat dans le cas  $G = \mathbb{N}$  puisque tout graphe infini en contient une copie. Notre approche utilise la structure multi-échelle des amas de la CMP. On estime la probabilité qu'un intervalle  $[0, n]$  contienne un amas macroscopique lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Pour cela, on construit itérativement des intervalles de plus en plus grands comme réunion d'intervalles plus petits et l'on établit que, partant d'un paramètre initial suffisamment grand, l'événement «l'intervalle contient un amas macroscopique» devient de plus en plus probable quand la taille de l'intervalle augmente.

Nous montrons ensuite l'existence d'une phase sous-critique pour la CMP sur  $\mathbb{Z}^d$ .

**Théorème 2.3.6 ([P7])**

*On considère la CMP sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$  avec paramètre d'expansion  $\alpha \geq 1$ .*

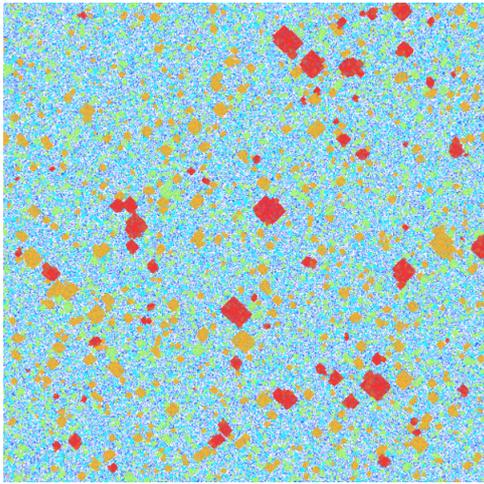
- *Modèle 1. On a*

$$p_c > 0.$$

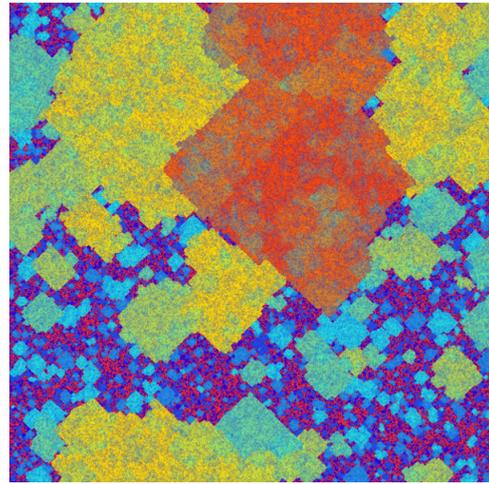
*Dans le cas particulier  $d = \alpha = 1$ , on a même  $p_c \geq 1/2$ .*

- *Modèle 2. On suppose que  $\mathbb{E}[Z^\beta] < +\infty$  avec  $\beta = 4\alpha d^2$ . Alors*

$$\gamma_c > 0.$$



CMP sous-critique ( $p = 0.11$ ).



CMP sur-critique ( $p = 0.12$ ).

**Figure 2.7** – Simulations de la CMP sur une grille de taille  $5000 \times 5000$  réalisées par Arvind Singh. Les «taches» représentent les stabilisateurs des amas et sont colorées selon leur taille. Dans le cas surcritique, le stabilisateur de «l'amas infini», en violet, est dessiné en arrière plan.

Là encore, la preuve – assez technique – utilise des arguments de renormalisation de groupe particulièrement adaptés à la structure récursive de la CMP. L'idée générale consiste à montrer que lorsque l'on considère des boîtes  $B_n$  dont le diamètre tend vers l'infini, la probabilité d'existence d'un ensemble stable  $S$  tel que  $\frac{1}{2}B_n \subset S \subset B_n$  tend vers 1 si le paramètre de percolation  $p$  (resp.  $\gamma$ ) est choisi assez petit. On conclut ensuite en utilisant la caractérisation de l'amas infini du théorème 2.3.3. En ce qui concerne l'inégalité  $p_c \geq 1/2$  lorsque  $d = \alpha = 1$ , elle est obtenue par un argument de dualité avec la CMP donnée par les poids  $\tilde{r}(v) := 1 - r(v)$ .

Pour le modèle 3, nous considérons ici deux types de graphes aléatoires sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$  construits à partir d'un processus ponctuel de Poisson  $\mathcal{P}$  d'intensité unité.

**Graphe géométrique.** On fixe un paramètre  $R > 0$ . Deux atomes du processus de Poisson  $\mathcal{P}$  sont reliés par une arête si leur distance euclidienne est inférieure à  $R$ . Si  $R$  est supérieur au paramètre critique de percolation continue sur  $\mathbb{R}^d$ , alors il existe une unique composante connexe infinie que l'on note  $\mathcal{G}(R)$ .

**Triangulation de Delaunay.** Pour chaque  $x \in \mathcal{P}$ , on définit sa cellule de Voronoï constituée des points de l'espace plus proches de  $x$  que de tout autre point de  $\mathcal{P}$ . La triangulation de Delaunay est le dual du graphe de Voronoï : l'ensemble de ses sommets est  $\mathcal{P}$  et deux sites sont adjacents ssi leurs cellules de Voronoï sont contiguës. On note ce graphe  $\mathcal{D}$ .

Ces deux graphes ne sont pas de degré borné mais le degré d'un site typique admet des moments exponentiels. On peut alors adapter les arguments de renormalisation précédents pour établir qu'il existe une phase sans amas infini.

**Théorème 2.3.7 ([P7])**

On considère la CMP du modèle 3 sur  $\mathcal{G}(R)$  ou  $\mathcal{D}$  avec coefficient d'expansion  $\alpha \geq 1$ . On a

$$\Delta_c < \infty.$$

### 2.3.4 Retour au processus de contact

Le résultat suivant formalise (bien que de manière incomplète) l'heuristique présentée dans la section 2.3.1.

#### **Théorème 2.3.8 ([P7])**

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe localement fini. On considère la CMP  $\mathcal{C}$  du modèle 3 (ie. avec poids  $r(v) := d_v \mathbf{1}_{\{d_v \geq \Delta\}}$ ) et coefficient d'expansion  $\alpha = 2.5$ . Si  $\mathcal{C}$  n'a pas d'amas infini pour  $\Delta$  assez grand, alors le processus de contact sur  $G$  possède une phase sous critique, c'est à dire  $\lambda_c > 0$ .

En combinant les résultats précédents, on obtient finalement des exemples de graphes de degré non borné pour lesquels le processus de contact possède une vraie transition de phase :

#### **Corollaire 2.3.9 ([P7])**

Le processus de contact admet une phase sous-critique sur le graphe géométrique  $\mathcal{G}(R)$  et sur la triangulation de Delaunay  $\mathcal{D}$  en toute dimension  $d \geq 2$ .

Plus récemment, V. H. Can [40] a utilisé ce résultat pour montrer que le processus de contact a une phase sous-critique sur certains graphes de type «percolation longue distance» sur  $\mathbb{Z}$ .

Remarquons que le théorème ne fait aucune hypothèse sur la croissance du graphe qui peut grossir exponentiellement vite. La preuve de ce résultat est longue et délicate. Il s'agit ici de supprimer l'aléa du processus de contact en contrôlant précisément la propagation de l'épidémie à travers le graphe. L'idée principale de la preuve est de montrer que, lorsqu'un amas  $C \in \mathcal{C}$  devient infecté, bien qu'il reste malade un temps exponentiel en sa taille  $r(C)$ , le nombre d'infections qui en sont issues et qui sortent de son stabilisateur  $\mathcal{S}_C$  est, en moyenne, plus petit que 1. Une fois ce résultat acquis, on peut ensuite réaliser un couplage avec une marche branchante sous-critique sur le graphe des amas de la CMP et en déduire que l'épidémie se termine en temps fini. L'estimation principale consiste donc à établir que le stabilisateur qui entoure chaque amas est suffisamment sous-critique pour «dissiper» presque toutes les infections qui en émanent. Mais, par la nature récursive de la CMP, ce stabilisateur est, lui-même, composé d'amas/stabilisateurs plus petits. On procède donc par récurrence sur la taille de l'amas. Il est ici essentiel d'obtenir des bornes uniformes pour tous les amas et la récurrence porte donc sur tous les graphes finis d'une taille fixée. C'est à cette étape qu'il est nécessaire de supposer que le paramètre d'expansion  $\alpha$  est assez grand (2.5 étant une borne supérieure non optimale) car cela permet de créer de la place à l'intérieur de chaque stabilisateur.

### 2.3.5 Remarques et perspectives

Le modèle de la CMP possède des propriétés assez remarquables qui paraissent justifier une étude plus approfondie (même sans lien avec le processus de contact).

- En dimension 1, pour le modèle de percolation de Bernoulli avec  $\alpha = 1$ , on sait que  $p_c \geq 1/2$ . Toutefois, des simulations numériques indiquent que la valeur critique se situe aux alentours de 0.65. Existe-t-il une formule exacte pour  $p_c$  ?
- Les questions habituelles pour la percolation classique sont aussi valables pour la CMP. Par exemple, observe-t-on une décroissance exponentielle de la taille des amas finis hors du régime critique ? Que se passe-t-il à la transition de phase : y a-t-il formation d'un amas à  $p_c$  ? Quelle est la structure de la CMP dans ce cas ?
- Les arguments de renormalisation utilisés pour montrer l'existence d'une phase sous-critique pour la CMP sur  $\mathbb{Z}^d$  sont assez robustes et permettent de traiter d'autres types de graphes du

moment qu'ils sont moyennables. Par contre, cette approche ne semble pas adaptée pour les graphes dont le volume croît exponentiellement. Toutefois, il semble raisonnable d'imaginer que la CMP avec un paramètre d'expansion  $\alpha$  assez petit devrait posséder une phase sous-critique sur un arbre de Galton-Watson dont la loi de reproduction  $B$  a une queue de distribution décroissant suffisamment rapidement.

- La condition  $\alpha > 2.5$  dans le théorème 2.3.8 est artificielle. Il est raisonnable d'espérer parvenir à remplacer cette condition par  $\alpha > 1 + \varepsilon$  pour  $\varepsilon$  assez petit. Il semble par contre beaucoup plus difficile de montrer le théorème pour  $\alpha = 1$  et nous ne sommes d'ailleurs pas convaincus que cela soit vrai.



# Références

- [1] Louigi ADDARIO-BERRY, Nicolas BROUTIN et Christina GOLDSCHMIDT. « The continuum limit of critical random graphs ». In : *Probab. Theory Related Fields* 152.3-4 (2012), p. 367-406. ISSN : 0178-8051. DOI : [10.1007/s00440-010-0325-4](https://doi.org/10.1007/s00440-010-0325-4). URL : <https://doi.org/10.1007/s00440-010-0325-4>.
- [2] Louigi ADDARIO-BERRY et Yuting WEN. « Joint convergence of random quadrangulations and their cores ». In : *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 53.4 (2017), p. 1890-1920. ISSN : 0246-0203. DOI : [10.1214/16-AIHP775](https://doi.org/10.1214/16-AIHP775). URL : <https://doi.org/10.1214/16-AIHP775>.
- [3] Miklós AJTAI, János KOMLÓS et Endre SZEMERÉDI. « The longest path in a random graph ». In : *Combinatorica* 1.1 (1981), p. 1-12. ISSN : 0209-9683. DOI : [10.1007/BF02579172](https://doi.org/10.1007/BF02579172). URL : <https://doi.org/10.1007/BF02579172>.
- [4] Marie ALBENQUE et Dominique POULALHON. « A generic method for bijections between blossoming trees and planar maps ». In : *Electron. J. Combin.* 22.2 (2015), Paper 2.38, 44. ISSN : 1077-8926.
- [5] David ALDOUS. « Brownian excursions, critical random graphs and the multiplicative coalescent ». In : *Ann. Probab.* 25.2 (1997), p. 812-854. ISSN : 0091-1798. DOI : [10.1214/aop/1024404421](https://doi.org/10.1214/aop/1024404421). URL : <https://doi.org/10.1214/aop/1024404421>.
- [6] David ALDOUS et Russell LYONS. « Processes on unimodular random networks ». In : *Electron. J. Probab.* 12.54 (2007), p. 1454-1508.
- [7] David ALDOUS et J. Michael STEELE. « The objective method : probabilistic combinatorial optimization and local weak convergence ». In : *Probability on discrete structures*. T. 110. Encyclopaedia Math. Sci. Springer, Berlin, 2004, p. 1-72. DOI : [10.1007/978-3-662-09444-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-09444-0_1). URL : [https://doi.org/10.1007/978-3-662-09444-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-09444-0_1).
- [8] J. AMBJØRN et T.G. BUDD. « Geodesic distances in Liouville quantum gravity ». In : *Nuclear Physics B* 889 (2014), p. 676-691. ISSN : 0550-3213. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2014.10.029>. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321314003356>.
- [9] Jan AMBJØRN et Timothy BUDD. « Multi-point functions of weighted cubic maps ». In : *Ann. Inst. H. Poincaré D* 3 (2016), p. 1-44.
- [10] Jan AMBJØRN et Yoshiyuki WATABIBI. « Scaling in quantum gravity ». In : *Nuclear Phys. B* 445.1 (1995), p. 129-142. ISSN : 0550-3213.
- [11] Omer ANGEL. « Growth and percolation on the uniform infinite planar triangulation ». In : *Geometric And Functional Analysis* 13.5 (2003), p. 935-974.
- [12] Omer ANGEL et Nicolas CURIEN. « Percolations on random maps I : Half-plane models ». In : *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 51.2 (2015), p. 405-431. ISSN : 0246-0203. DOI : [10.1214/13-AIHP583](https://doi.org/10.1214/13-AIHP583). URL : <https://doi.org/10.1214/13-AIHP583>.

- [13] Omer ANGEL et Oded SCHRAMM. « Uniform infinite planar triangulations ». In : *Communications in mathematical physics* 241.2-3 (2003), p. 191-213.
- [14] Albert-László BARABÁSI et Réka ALBERT. « Emergence of scaling in random networks ». In : *Science* 286.5439 (1999), p. 509-512. ISSN : 0036-8075. DOI : [10.1126/science.286.5439.509](https://doi.org/10.1126/science.286.5439.509). URL : <https://doi.org/10.1126/science.286.5439.509>.
- [15] Itai BENJAMINI et Nicolas CURIEN. « Simple random walk on the uniform infinite planar quadrangulation : subdiffusivity via pioneer points ». In : *Geom. Funct. Anal.* 23.2 (2013), p. 501-531. ISSN : 1016-443X. DOI : [10.1007/s00039-013-0212-0](https://doi.org/10.1007/s00039-013-0212-0). URL : <https://doi.org/10.1007/s00039-013-0212-0>.
- [16] Itai BENJAMINI et Oded SCHRAMM. « Recurrence of distributional limits of finite planar graphs ». In : *Electron. J. Probab.* 6 (2001), no. 23, 13 pp. (electronic). ISSN : 1083-6489. DOI : [10.1214/EJP.v6-96](https://doi.org/10.1214/EJP.v6-96). URL : <http://dx.doi.org/10.1214/EJP.v6-96>.
- [17] Nathanaël BERESTYCKI, Benoît LASLIER et Gourab RAY. « Critical exponents on Fortuin-Kasteleyn weighted planar maps ». In : *Comm. Math. Phys.* 355.2 (2017), p. 427-462. ISSN : 0010-3616. DOI : [10.1007/s00220-017-2933-7](https://doi.org/10.1007/s00220-017-2933-7). URL : <https://doi.org/10.1007/s00220-017-2933-7>.
- [18] Olivier BERNARDI et Mireille BOUSQUET-MÉLOU. « Counting colored planar maps : algebraicity results ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 101.5 (2011), p. 315-377.
- [19] Olivier BERNARDI, Nicolas CURIEN et Grégory MIERMONT. « A Boltzmann approach to percolation on random triangulations ». In : *Canad. J. Math.* 71.1 (2019), p. 1-43. ISSN : 0008-414X. DOI : [10.4153/cjm-2018-009-x](https://doi.org/10.4153/cjm-2018-009-x). URL : <https://doi.org/10.4153/cjm-2018-009-x>.
- [20] Olivier BERNARDI et Éric FUSY. « Unified bijections for maps with prescribed degrees and girth ». In : *J. Combin. Theory Ser. A* 119.6 (2012), p. 1351-1387. ISSN : 0097-3165. DOI : [10.1016/j.jcta.2012.03.007](https://doi.org/10.1016/j.jcta.2012.03.007). URL : <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2012.03.007>.
- [21] Olivier BERNARDI, Nina HOLDEN et Xin SUN. « Percolation on triangulations : a bijective path to Liouville quantum gravity ». In : *Preprint* (2019).
- [22] Béla BOLLOBÁS. « A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs ». In : *European J. Combin.* 1.4 (1980), p. 311-316. ISSN : 0195-6698. DOI : [10.1016/S0195-6698\(80\)80030-8](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(80)80030-8). URL : [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(80\)80030-8](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(80)80030-8).
- [23] Béla BOLLOBÁS. « Almost all regular graphs are Hamiltonian ». In : *European J. Combin.* 4.2 (1983), p. 97-106. ISSN : 0195-6698. DOI : [10.1016/S0195-6698\(83\)80039-0](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(83)80039-0). URL : [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(83\)80039-0](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(83)80039-0).
- [24] Béla BOLLOBÁS. « Long paths in sparse random graphs ». In : *Combinatorica* 2.3 (1982), p. 223-228. ISSN : 0209-9683. DOI : [10.1007/BF02579230](https://doi.org/10.1007/BF02579230). URL : <https://doi.org/10.1007/BF02579230>.
- [25] Béla BOLLOBÁS, Trevor FENNER et Alan FRIEZE. « Long cycles in sparse random graphs ». In : *Graph theory and combinatorics (Cambridge, 1983)*. Academic Press, London, 1984, p. 59-64.
- [26] Béla BOLLOBÁS et Oliver RIORDAN. « An old approach to the giant component problem ». In : *J. Combin. Theory Ser. B* 113 (2015), p. 236-260. ISSN : 0095-8956. DOI : [10.1016/j.jctb.2015.03.002](https://doi.org/10.1016/j.jctb.2015.03.002). URL : <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2015.03.002>.

- [27] Charles BORDENAVE et Marc LELARGE. « Resolvent of large random graphs ». In : *Random Structures Algorithms* 37.3 (2010), p. 332-352. ISSN : 1042-9832. DOI : [10.1002/rsa.20313](https://doi.org/10.1002/rsa.20313). URL : <https://doi.org/10.1002/rsa.20313>.
- [28] Charles BORDENAVE, Arnab SEN et Bálint VIRÁG. « Mean quantum percolation ». In : *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 19.12 (2017), p. 3679-3707. ISSN : 1435-9855. DOI : [10.4171/JEMS/750](https://doi.org/10.4171/JEMS/750). URL : <https://doi.org/10.4171/JEMS/750>.
- [29] Gaëtan BOROT, Jérémie BOUTTIER et Bertrand DUPLANTIER. « Nesting statistics in the  $O(n)$  loop model on random planar maps ». In : *arXiv preprint arXiv :1605.02239* (2016).
- [30] Gaëtan BOROT, Jérémie BOUTTIER et Emmanuel GUITTER. « A recursive approach to the  $O(n)$  model on random maps via nested loops ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 45.4 (2011), p. 045002.
- [31] Gaëtan BOROT, Jérémie BOUTTIER et Emmanuel GUITTER. « More on the  $O(n)$  model on random maps via nested loops : loops with bending energy ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 45.27 (2012), p. 275206.
- [32] Gaëtan BOROT, Jérémie BOUTTIER et Emmanuel GUITTER. « Loop models on random maps via nested loops : the case of domain symmetry breaking and application to the Potts model ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 45.49 (2012), p. 494017.
- [33] D.V. BOULATOV et V.A. KAZAKOV. « The Ising model on a random planar lattice : the structure of the phase transition and the exact critical exponents ». In : *Physics Letters B* 186.3-4 (1987), p. 379-384.
- [34] Mireille BOUSQUET-MÉLOU et Arnaud JEHANNE. « Polynomial equations with one catalytic variable, algebraic series and map enumeration ». In : *J. Combin. Theory Ser. B* 96.5 (2006), p. 623-672. ISSN : 0095-8956. DOI : [10.1016/j.jctb.2005.12.003](https://doi.org/10.1016/j.jctb.2005.12.003). URL : <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2005.12.003>.
- [35] Mireille BOUSQUET-MÉLOU et Gilles SCHAEFFER. « The degree distribution in bipartite planar maps : applications to the Ising model ». In : *arXiv preprint math/0211070* (2002).
- [36] Jérémie BOUTTIER, Philippe DI FRANCESCO et Emmanuel GUITTER. « Blocked edges on eulerian maps and mobiles : Application to spanning trees, hard particles and the Ising model ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 40.27 (2007), p. 7411.
- [37] Jérémie BOUTTIER, Philippe DI FRANCESCO et Emmanuel GUITTER. « Planar maps as labeled mobiles ». In : *Electron. J. Combin.* 11.1 (2004), Research Paper 69, 27. ISSN : 1077-8926. URL : [http://www.combinatorics.org/Volume\\_11/Abstracts/v11i1r69.html](http://www.combinatorics.org/Volume_11/Abstracts/v11i1r69.html).
- [38] Timothy BUDD. « The peeling process of infinite Boltzmann planar maps ». In : *Electron. J. Combin.* 23.1 (2016), Paper 1.28, 37.
- [39] Timothy BUDD. « The peeling process on random planar maps coupled to an  $O(n)$  loop model (with an appendix by Linxiao Chen) ». In : *arXiv preprint arXiv :1809.02012* (2018).
- [40] Van Hao CAN. « Contact process on one-dimensional long range percolation ». In : *Electron. Commun. Probab.* 20 (2015), no. 93, 11. DOI : [10.1214/ECP.v20-4461](https://doi.org/10.1214/ECP.v20-4461). URL : <https://doi.org/10.1214/ECP.v20-4461>.
- [41] Ariane CARRANCE. « Triangulations colorées aléatoires ». In : *thèse* (2019).
- [42] Guillaume CHAPUY, Michel MARCUS et Gilles SCHAEFFER. « A bijection for rooted maps on orientable surfaces ». In : *SIAM J. Discrete Math.* 23.3 (2009), p. 1587-1611. ISSN : 0895-4801. DOI : [10.1137/080720097](https://doi.org/10.1137/080720097). URL : <https://doi.org/10.1137/080720097>.

- [43] Philippe CHASSAING et Bergfinnur DURHUUS. « Local limit of labeled trees and expected volume growth in a random quadrangulation ». In : *Ann. Probab.* 34.3 (2006), p. 879-917. ISSN : 0091-1798.
- [44] Philippe CHASSAING et Gilles SCHAEFFER. « Random planar lattices and integrated super-Brownian excursion ». In : *Probab. Theory Related Fields* 128.2 (2004), p. 161-212. ISSN : 0178-8051. DOI : [10.1007/s00440-003-0297-8](https://doi.org/10.1007/s00440-003-0297-8). URL : <https://doi.org/10.1007/s00440-003-0297-8>.
- [45] Linxiao CHEN. « Basic properties of the infinite critical-FK random map ». In : *Ann. Inst. Henri Poincaré D* 4.3 (2017), p. 245-271. ISSN : 2308-5827. DOI : [10.4171/AIHPD/40](https://doi.org/10.4171/AIHPD/40). URL : <https://doi.org/10.4171/AIHPD/40>.
- [46] Linxiao CHEN, Nicolas CURIEN et Pascal MAILLARD. « The perimeter cascade in critical Boltzmann quadrangulations decorated by an  $O(n)$  loop model ». In : *arXiv preprint arXiv :1702.06916* (2017).
- [47] Linxiao CHEN et Joonas TURUNEN. « Critical Ising model on random triangulations of the disk : enumeration and local limits ». In : *arXiv preprint arXiv :1806.06668* (2018).
- [48] Robert CORI et Bernard VAUQUELIN. « Planar maps are well labeled trees ». In : *Canadian J. Math.* 33.5 (1981), p. 1023-1042. ISSN : 0008-414X. DOI : [10.4153/CJM-1981-078-2](https://doi.org/10.4153/CJM-1981-078-2). URL : <https://doi.org/10.4153/CJM-1981-078-2>.
- [49] Nicolas CURIEN. « Peeling random planar maps ». In : *Saint-Flour lecture notes* (2019).
- [50] Nicolas CURIEN et Igor KORTCHEMSKI. « Percolation on random triangulations and stable looptrees ». In : *Probab. Theory Related Fields* 163.1-2 (2015), p. 303-337. ISSN : 0178-8051. DOI : [10.1007/s00440-014-0593-5](https://doi.org/10.1007/s00440-014-0593-5). URL : <https://doi.org/10.1007/s00440-014-0593-5>.
- [51] Nicolas CURIEN et Jean-François LE GALL. « First-passage percolation and local modifications of distances in random triangulations ». In : *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 52.3 (2019), p. 631-701. ISSN : 0012-9593. DOI : [10.24033/asens.2394](https://doi.org/10.24033/asens.2394). URL : <https://doi.org/10.24033/asens.2394>.
- [52] Nicolas CURIEN et Jean-François LE GALL. « Scaling limits for the peeling process on random maps ». In : *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 53.1 (2017), p. 322-357. ISSN : 0246-0203. DOI : [10.1214/15-AIHP718](https://doi.org/10.1214/15-AIHP718). URL : <https://doi.org/10.1214/15-AIHP718>.
- [53] Nicolas CURIEN et Jean-François LE GALL. « The Brownian plane ». In : *J. Theoret. Probab.* 27.4 (2014), p. 1249-1291. ISSN : 0894-9840. DOI : [10.1007/s10959-013-0485-0](https://doi.org/10.1007/s10959-013-0485-0). URL : <https://doi.org/10.1007/s10959-013-0485-0>.
- [54] Nicolas CURIEN et Jean-François LE GALL. « The hull process of the Brownian plane ». In : *Probab. Theory Related Fields* 166.1-2 (2016), p. 187-231. ISSN : 0178-8051. DOI : [10.1007/s00440-015-0652-6](https://doi.org/10.1007/s00440-015-0652-6). URL : <https://doi.org/10.1007/s00440-015-0652-6>.
- [55] Dragoš M. CVETKOVIĆ, Michael DOOB et Horst SACHS. *Spectra of graphs*. Third. Theory and applications. Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, 1995, p. ii+447. ISBN : 3-335-00407-8.
- [56] Souvik DHARA, Remco van der HOFSTAD, Johan S. H. van LEEUWAARDEN et Sanchayan SEN. « Critical window for the configuration model : finite third moment degrees ». In : *Electron. J. Probab.* 22 (2017), Paper No. 16, 33. DOI : [10.1214/17-EJP29](https://doi.org/10.1214/17-EJP29). URL : <https://doi.org/10.1214/17-EJP29>.
- [57] Philippe DI FRANCESCO. « Geodesic distance in planar graphs : an integrable approach ». In : *Ramanujan J.* 10.2 (2005), p. 153-186. ISSN : 1382-4090.

- [58] Jian DING et Ewain GWYNNE. « The fractal dimension of Liouville quantum gravity : universality, monotonicity, and bounds ». In : *arXiv preprint arXiv :1807.01072* (2018).
- [59] Bertrand DUPLANTIER et Scott SHEFFIELD. « Liouville quantum gravity and KPZ ». In : *Inventiones mathematicae* 185.2 (2011), p. 333-393.
- [60] Rick DURRETT. *Random graph dynamics*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010, p. x+210. ISBN : 978-0-521-15016-3.
- [61] Paul ERDŐS. « Problems and results on finite and infinite combinatorial analysis ». In : *Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. I*. 1975, 403-424. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10.
- [62] Paul ERDŐS et Alfréd RÉNYI. « On the evolution of random graphs ». In : *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 5 (1960), p. 17-61.
- [63] Wenceslao FERNANDEZ DE LA VEGA. « Long paths in random graphs ». In : *Studia Sci. Math. Hungar.* 14.4 (1979), p. 335-340. ISSN : 0081-6906.
- [64] Philippe FLAJOLET et Robert SEDGEWICK. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009, p. xiv+810. ISBN : 978-0-521-89806-5. DOI : [10.1017/CB09780511801655](https://doi.org/10.1017/CB09780511801655). URL : <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511801655>.
- [65] Alan FRIEZE. « On large matchings and cycles in sparse random graphs ». In : *Discrete Math.* 59.3 (1986), p. 243-256. ISSN : 0012-365X. DOI : [10.1016/0012-365X\(86\)90171-8](https://doi.org/10.1016/0012-365X(86)90171-8). URL : [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(86\)90171-8](https://doi.org/10.1016/0012-365X(86)90171-8).
- [66] Alan FRIEZE et Bill JACKSON. « Large holes in sparse random graphs ». In : *Combinatorica* 7.3 (1987), p. 265-274. ISSN : 0209-9683. DOI : [10.1007/BF02579303](https://doi.org/10.1007/BF02579303). URL : <https://doi.org/10.1007/BF02579303>.
- [67] Matthias GORNY, Édouard MAUREL-SEGALA et Arvind SINGH. « The geometry of a critical percolation cluster on the UIPT ». In : *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 54.4 (2018), p. 2203-2238. ISSN : 0246-0203. DOI : [10.1214/17-AIHP869](https://doi.org/10.1214/17-AIHP869). URL : <https://doi.org/10.1214/17-AIHP869>.
- [68] Misha GROMOV. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. T. 152. Progress in Mathematics. Based on the 1981 French original [ MR0682063 (85e :53051)], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999, p. xx+585. ISBN : 0-8176-3898-9.
- [69] Emmanuel GUITTER. « Geodesic distance in planar graphs ». In : *Nuclear Phys. B* 663.3 (2003), p. 535-567. ISSN : 0550-3213.
- [70] Emmanuel GUITTER. « Planar maps and continued fractions ». In : *Comm. Math. Phys.* 309.3 (2012), p. 623-662. ISSN : 0010-3616.
- [71] Ori GUREL-GUREVICH et Asaf NACHMIAS. « Recurrence of planar graph limits ». In : *Ann. of Math. (2)* 177.2 (2013), p. 761-781. ISSN : 0003-486X. DOI : [10.4007/annals.2013.177.2.10](https://doi.org/10.4007/annals.2013.177.2.10). URL : <http://dx.doi.org/10.4007/annals.2013.177.2.10>.
- [72] Ewain GWYNNE, Nina HOLDEN et Xin SUN. « A mating-of-trees approach to graph distances in random planar maps ». In : *arXiv preprint arXiv :1711.00723* (2017).
- [73] Ewain GWYNNE et Jason MILLER. « Existence and uniqueness of the Liouville quantum gravity metric for  $\gamma \in (0, 2)$  ». In : *to appear in Invent. Math.* (2020).

- [74] Ewain GWYNNE et Jason MILLER. « Scaling limit of the uniform infinite half-plane quadrangulation in the Gromov-Hausdorff-Prokhorov-uniform topology ». In : *Electron. J. Probab.* 22 (2017), Paper No. 84, 47. ISSN : 1083-6489. DOI : [10.1214/17-EJP102](https://doi.org/10.1214/17-EJP102). URL : <https://doi.org/10.1214/17-EJP102>.
- [75] Ted E. HARRIS. « Contact interactions on a lattice ». In : *Ann. Probability* 2 (1974), p. 969-988.
- [76] Hamed HATAMI et Michael MOLLOY. « The scaling window for a random graph with a given degree sequence ». In : *Random Structures Algorithms* 41.1 (2012), p. 99-123. ISSN : 1042-9832. DOI : [10.1002/rsa.20394](https://doi.org/10.1002/rsa.20394). URL : <https://doi.org/10.1002/rsa.20394>.
- [77] Remco van der HOFSTAD. *Random graphs and complex networks. Vol. 1*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, [43]. Cambridge University Press, Cambridge, 2017, p. xvi+321. ISBN : 978-1-107-17287-6. DOI : [10.1017/9781316779422](https://doi.org/10.1017/9781316779422). URL : <https://doi.org/10.1017/9781316779422>.
- [78] Svante JANSON. « The probability that a random multigraph is simple ». In : *Combin. Probab. Comput.* 18.1-2 (2009), p. 205-225. ISSN : 0963-5483. DOI : [10.1017/S0963548308009644](https://doi.org/10.1017/S0963548308009644). URL : <https://doi.org/10.1017/S0963548308009644>.
- [79] Svante JANSON. « The probability that a random multigraph is simple. II ». In : *J. Appl. Probab.* 51A. Celebrating 50 Years of The Applied Probability Trust (2014), p. 123-137. ISSN : 0021-9002. DOI : [10.1239/jap/1417528471](https://doi.org/10.1239/jap/1417528471). URL : <https://doi.org/10.1239/jap/1417528471>.
- [80] Mehran KARDAR, Giorgio PARISI et Yi-Cheng ZHANG. « Dynamic Scaling of Growing Interfaces ». In : *Phys. Rev. Lett.* 56 (9 mar. 1986), p. 889-892. DOI : [10.1103/PhysRevLett.56.889](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.56.889). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.56.889>.
- [81] Harry KESTEN. *Percolation theory for mathematicians. T. 2*. Progress in Probability and Statistics. Birkhäuser, Boston, Mass., 1982, p. iv+423. ISBN : 3-7643-3107-0.
- [82] Harry KESTEN. « Subdiffusive behavior of random walk on a random cluster ». In : *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 22.4 (1986), p. 425-487. ISSN : 0246-0203. URL : [http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1986\\_\\_22\\_4\\_425\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1986__22_4_425_0).
- [83] Harry KESTEN. « Symmetric random walks on groups ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 92 (1959), p. 336-354. ISSN : 0002-9947.
- [84] V. G. KNIZHNIK, A. M. POLYAKOV et A. B. ZAMOLODCHIKOV. « Fractal structure of 2D-quantum gravity ». In : *Modern Phys. Lett. A* 3.8 (1988), p. 819-826. ISSN : 0217-7323. DOI : [10.1142/S0217732388000982](http://dx.doi.org/10.1142/S0217732388000982). URL : <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732388000982>.
- [85] Paul KOEBE. *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*. German. Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig 88, 141-164 (1936). 1936.
- [86] Maxim KRIKUN. « A uniformly distributed infinite planar triangulation and a related branching process ». In : *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 307. Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 10 (2004), p. 141-174, 282-283. ISSN : 0373-2703.
- [87] Maxim KRIKUN. « Local structure of random quadrangulations ». In : *Preprint* <http://arxiv.org/abs/math/0512304> (2006).
- [88] Maxim KRIKUN. « On one property of distances in the infinite random quadrangulation ». In : *Preprint* <https://arxiv.org/abs/0805.1907> (2008).

- [89] Michael KRIVELEVICH et Benny SUDAKOV. « The phase transition in random graphs : a simple proof ». In : *Random Structures Algorithms* 43.2 (2013), p. 131-138. ISSN : 1042-9832. DOI : [10.1002/rsa.20470](https://doi.org/10.1002/rsa.20470). URL : <https://doi.org/10.1002/rsa.20470>.
- [90] Jean-François LE GALL. « Geodesics in large planar maps and in the Brownian map ». In : *Acta Math.* 205.2 (2010), p. 287-360. ISSN : 0001-5962. DOI : [10.1007/s11511-010-0056-5](https://doi.org/10.1007/s11511-010-0056-5). URL : <https://doi.org/10.1007/s11511-010-0056-5>.
- [91] Jean-François LE GALL. « Random geometry on the sphere ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. 1.* Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, p. 421-442.
- [92] Jean-François LE GALL. *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999, p. x+163. ISBN : 3-7643-6126-3. DOI : [10.1007/978-3-0348-8683-3](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8683-3). URL : <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8683-3>.
- [93] Jean-François LE GALL. « The topological structure of scaling limits of large planar maps ». In : *Invent. Math.* 169.3 (2007), p. 621-670. ISSN : 0020-9910. DOI : [10.1007/s00222-007-0059-9](https://doi.org/10.1007/s00222-007-0059-9). URL : <https://doi.org/10.1007/s00222-007-0059-9>.
- [94] Jean-François LE GALL. « Uniqueness and universality of the Brownian map ». In : *The Annals of Probability* 41.4 (2013), p. 2880-2960.
- [95] Jean-François LE GALL et Thomas LEHÉRICY. « Separating cycles and isoperimetric inequalities in the uniform infinite planar quadrangulation ». In : *Ann. Probab.* 47.3 (2019), p. 1498-1540. ISSN : 0091-1798. DOI : [10.1214/18-AOP1289](https://doi.org/10.1214/18-AOP1289). URL : <https://doi.org/10.1214/18-AOP1289>.
- [96] Jean-François LE GALL et Grégory MIERMONT. « Scaling limits of random planar maps with large faces ». In : *Ann. Probab.* 39.1 (2011), p. 1-69. ISSN : 0091-1798. DOI : [10.1214/10-AOP549](https://doi.org/10.1214/10-AOP549). URL : <https://doi.org/10.1214/10-AOP549>.
- [97] Jean-François LE GALL et Mathilde WEILL. « Conditioned Brownian trees ». In : *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 42.4 (2006), p. 455-489. ISSN : 0246-0203. DOI : [10.1016/j.anihpb.2005.08.001](https://doi.org/10.1016/j.anihpb.2005.08.001). URL : <https://doi.org/10.1016/j.anihpb.2005.08.001>.
- [98] Thomas LEHÉRICY. « First-passage percolation in random planar maps and Tutte's bijection ». In : *arXiv preprint arXiv :1906.10079* (2019).
- [99] Thomas M. LIGGETT. *Interacting particle systems.* Classics in Mathematics. Reprint of the 1985 original. Springer-Verlag, Berlin, 2005, p. xvi+496. ISBN : 3-540-22617-6.
- [100] Thomas M. LIGGETT. *Stochastic interacting systems : contact, voter and exclusion processes.* T. 324. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999, p. xii+332. ISBN : 3-540-65995-1. DOI : [10.1007/978-3-662-03990-8](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-03990-8). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-03990-8>.
- [101] Jean-François MARCKERT et Abdelkader MOKKADEM. « Limit of normalized quadrangulations : the Brownian map ». In : *The Annals of Probability* 34.6 (2006), p. 2144-2202.
- [102] Brendan D. MCKAY. « The expected eigenvalue distribution of a large regular graph ». In : *Linear Algebra Appl.* 40 (1981), p. 203-216. ISSN : 0024-3795. DOI : [10.1016/0024-3795\(81\)90150-6](http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(81)90150-6). URL : [http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795\(81\)90150-6](http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(81)90150-6).
- [103] Grégory MIERMONT. « Aspects of random maps ». In : *Saint-Flour lecture notes* (2014).

- [104] Grégory MIERMONT. « Tessellations of random maps of arbitrary genus ». In : *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 42.5 (2009), p. 725-781. ISSN : 0012-9593. DOI : [10.24033/asens.2108](https://doi.org/10.24033/asens.2108). URL : <https://doi.org/10.24033/asens.2108>.
- [105] Grégory MIERMONT. « The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations ». In : *Acta mathematica* 210.2 (2013), p. 319-401.
- [106] Jason MILLER et Scott SHEFFIELD. « Liouville quantum gravity and the Brownian map I : The QLE (8/3, 0) metric ». In : *arXiv preprint arXiv :1507.00719* (2015).
- [107] Jason MILLER et Scott SHEFFIELD. « Liouville quantum gravity and the Brownian map II : geodesics and continuity of the embedding ». In : *arXiv preprint arXiv :1605.03563* (2016).
- [108] Jason MILLER et Scott SHEFFIELD. « Liouville quantum gravity and the Brownian map III : the conformal structure is determined ». In : *arXiv preprint arXiv :1608.05391* (2016).
- [109] Michael MOLLOY et Bruce REED. « A critical point for random graphs with a given degree sequence ». In : *Proceedings of the Sixth International Seminar on Random Graphs and Probabilistic Methods in Combinatorics and Computer Science, "Random Graphs '93" (Poznań, 1993)*. T. 6. 2-3. 1995, p. 161-179. DOI : [10.1002/rsa.3240060204](https://doi.org/10.1002/rsa.3240060204). URL : <https://doi.org/10.1002/rsa.3240060204>.
- [110] Michael MOLLOY et Bruce REED. « The size of the giant component of a random graph with a given degree sequence ». In : *Combin. Probab. Comput.* 7.3 (1998), p. 295-305. ISSN : 0963-5483. DOI : [10.1017/S0963548398003526](https://doi.org/10.1017/S0963548398003526). URL : <https://doi.org/10.1017/S0963548398003526>.
- [111] R. C. MULLIN. « On the enumeration of tree-rooted maps ». In : *Canadian J. Math.* 19 (1967), p. 174-183. ISSN : 0008-414X. DOI : [10.4153/CJM-1967-010-x](https://doi.org/10.4153/CJM-1967-010-x). URL : <https://doi.org/10.4153/CJM-1967-010-x>.
- [112] Nathan NOIRY. « Spectral asymptotic expansion of Wishart matrices with exploding moments ». In : *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 2 (2018), p. 897-911.
- [113] Robin PEMANTLE. « The contact process on trees ». In : *Ann. Probab.* 20.4 (1992), p. 2089-2116. ISSN : 0091-1798. URL : [http://links.jstor.org/sici?sici=0091-1798\(199210\)20:4%3C2089:TCPOT%3E2.0.CO;2-1&origin=MSN](http://links.jstor.org/sici?sici=0091-1798(199210)20:4%3C2089:TCPOT%3E2.0.CO;2-1&origin=MSN).
- [114] Mathew PENROSE. *Random geometric graphs*. T. 5. Oxford Studies in Probability. Oxford University Press, Oxford, 2003, p. xiv+330. ISBN : 0-19-850626-0. DOI : [10.1093/acprof:oso/9780198506263.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198506263.001.0001). URL : <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198506263.001.0001>.
- [115] Loïc RICHIER. « The incipient infinite cluster of the uniform infinite half-planar triangulation ». In : *Electron. J. Probab.* 23 (2018), Paper No. 89, 38. DOI : [10.1214/18-EJP218](https://doi.org/10.1214/18-EJP218). URL : <https://doi.org/10.1214/18-EJP218>.
- [116] Loïc RICHIER. « Universal aspects of critical percolation on random half-planar maps ». In : *Electron. J. Probab.* 20 (2015), Paper No. 129, 45. DOI : [10.1214/EJP.v20-4041](https://doi.org/10.1214/EJP.v20-4041). URL : <https://doi.org/10.1214/EJP.v20-4041>.
- [117] Oliver RIORDAN. « The phase transition in the configuration model ». In : *Combin. Probab. Comput.* 21.1-2 (2012), p. 265-299. ISSN : 0963-5483. DOI : [10.1017/S0963548311000666](https://doi.org/10.1017/S0963548311000666). URL : <https://doi.org/10.1017/S0963548311000666>.
- [118] Justin SALEZ. « Every totally real algebraic integer is a tree eigenvalue ». In : *J. Combin. Theory Ser. B* 111 (2015), p. 249-256. ISSN : 0095-8956. DOI : [10.1016/j.jctb.2014.09.001](https://doi.org/10.1016/j.jctb.2014.09.001). URL : <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2014.09.001>.

- [119] Gilles SCHAEFFER. « Conjugaisons d'arbres et cartes combinatoires aléatoires ». PhD thesis. Université de Bordeaux I, 1998.
- [120] Gilles SCHAEFFER. « Planar Maps ». In : *Handbook of Enumerative Combinatorics*. Sous la dir. de Miklós BÓNA. Discrete Mathematics and Its Applications. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015. Chap. 5, p. 335-392.
- [121] Scott SHEFFIELD. « Quantum gravity and inventory accumulation ». In : *Ann. Probab.* 44.6 (2016), p. 3804-3848. ISSN : 0091-1798. DOI : [10.1214/15-AOP1061](https://doi.org/10.1214/15-AOP1061). URL : <https://doi.org/10.1214/15-AOP1061>.
- [122] William T. TUTTE. « A census of planar maps ». In : *Canadian J. Math.* 15 (1963), p. 249-271. ISSN : 0008-414X. DOI : [10.4153/CJM-1963-029-x](https://doi.org/10.4153/CJM-1963-029-x). URL : <https://doi.org/10.4153/CJM-1963-029-x>.
- [123] William T. TUTTE. « A census of planar triangulations ». In : *Canadian J. Math.* 14 (1962), p. 21-38. ISSN : 0008-414X. DOI : [10.4153/CJM-1962-002-9](https://doi.org/10.4153/CJM-1962-002-9). URL : <https://doi.org/10.4153/CJM-1962-002-9>.
- [124] William T. TUTTE. « Chromatic sums revisited ». In : *Aequationes Math.* 50.1-2 (1995), p. 95-134. ISSN : 0001-9054. DOI : [10.1007/BF01831115](https://doi.org/10.1007/BF01831115). URL : <https://doi.org/10.1007/BF01831115>.
- [125] Piet VAN MIEGHEM. *Graph spectra for complex networks*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011, p. xvi+346. ISBN : 978-0-521-19458-7.
- [126] Yoshiyuki WATABIKI. « Analytic study of fractal structure of quantized surface in two-dimensional quantum gravity ». In : *Progress of Theoretical Physics Supplement* 114 (1993), p. 1-17.
- [127] Yoshiyuki WATABIKI. « Construction of non-critical string field theory by transfer matrix formalism in dynamical triangulation ». In : *Nuclear Phys. B* 441.1-2 (1995), p. 119-163. ISSN : 0550-3213. DOI : [10.1016/0550-3213\(95\)00010-P](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00010-P). URL : [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00010-P](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00010-P).
- [128] Nicholas C. WORMALD. « Differential equations for random processes and random graphs ». In : *Ann. Appl. Probab.* 5.4 (1995), p. 1217-1235. ISSN : 1050-5164. URL : [http://links.jstor.org/sici?sici=1050-5164\(199511\)5:4%3C1217:DEFRPA%3E2.0.CO;2-A&origin=MSN](http://links.jstor.org/sici?sici=1050-5164(199511)5:4%3C1217:DEFRPA%3E2.0.CO;2-A&origin=MSN).
- [129] Inna ZAKHAREVICH. « A generalization of Wigner's law ». In : *Comm. Math. Phys.* 268.2 (2006), p. 403-414. ISSN : 0010-3616. DOI : [10.1007/s00220-006-0074-5](http://dx.doi.org/10.1007/s00220-006-0074-5). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-006-0074-5>.