Algèbre supérieure de la théorie de Morse
- A_∞-catégories et A_∞-algèbres en géométrie -

Thibaut Mazuir

IMJ-PRG - Sorbonne Université

19 novembre 2019

Fonction de Morse

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n, et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction sur M.

On appelle point critique de f un point x de M tel que $\nabla_g(f)(x) = 0$.

On définit alors une fonction de Morse comme une fonction dont tous les points critiques sont isolés (au sens topologique). En particulier, lorsque la variété M est compacte, une fonction de Morse a toujours un nombre fini de points critiques. On fera cette hypothèse dans la suite de cet exposé.

Trajectoires de gradient I

Considérons le champ de vecteurs $\nabla_g(f)$ sur la variété M, et notons $\mathrm{Crit}(f)$ l'ensemble (fini) des points critiques de ce champ de vecteurs.

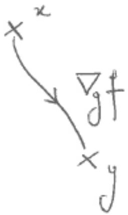
Soit $\gamma : \mathbb{R} \to M$ une trajectoire solution de $\dot{\gamma}(s) = \nabla_g(f)(\gamma(s))$: on appellera γ une *trajectoire de gradient* pour f. Alors, on peut montrer qu'il existe deux points critiques de f, x et y, tels que

$$\lim_{s \to -\infty} \gamma(s) = x$$

$$\lim_{s \to +\infty} \gamma(s) = y \ ,$$

ce que nous représentons comme suit

Trajectoires de gradient II



Une trajectoire de gradient du point critique x vers le point critique y

Complexe de cochaînes

Nous souhaitons associer à toute fonction de Morse un complexe de cochaînes, c'est-à-dire une suite $(M^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}$-modules ainsi que de morphismes $d^k : M^k \to M^{k+1}$, tels que $d^{k+1} \circ d^k = 0$ pour tout k, ce que l'on représente traditionnellement de la manière suivante

$$\cdots \longrightarrow M^{k-1} \xrightarrow[d^{k-1}]{} M^k \xrightarrow[d^k]{} M^{k+1} \longrightarrow \ldots \ .$$

Indice d'un point critique et modules C^k_{Morse}

Commençons par définir les modules de ce complexe de cochaînes.

À tout point critique x de la fonction f, on peut associer un indice $|x| \in \mathbb{Z}$ - il se définit comme l'indice de la hessienne de f en x, qui est bien définie car x est un point critique de f.

On définit alors les modules du complexe des cochaînes de Morse de f comme

$$C^k_{Morse} := \bigoplus_{|x|=k} \mathbb{Z} \cdot x \ .$$

Espaces de modules de trajectoires de gradients I

Définissons l'ensemble des trajectoires de gradient de x vers y

$$\mathcal{M}(x,y) := \{\text{trajectoire de gradient } \gamma \text{ telle que } \lim_{s\to-\infty}\gamma(s) = x \text{ et } \lim_{s\to+\infty}\gamma(s) = y\} \ .$$

Nous appellerons par la suite cet ensemble *l'espace de modules* des trajectoires de gradient de x vers y.

Sous certaines hypothèse sur le couple (fonction,métrique sur la variété), ces espaces de modules sont en fait des variétés orientables, et ont pour dimension

$$\dim \mathcal{M}(x,y) = |y| - |x| - 1 \ .$$

Espaces de modules de trajectoires de gradients II

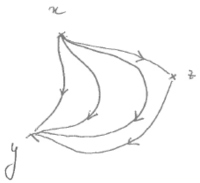
En fait, on dispose même des résultats suivants lorsque la dimension vaut 0 ou 1.

Si la variété $\mathcal{M}(x,y)$ est de dimension 0 - lorsque $|y| = |x|+1$, alors elle est compacte. Elle correspond donc à un nombre fini de points, qu'on peut compter avec signes, car la variété est orientable.

Si la variété $\mathcal{M}(x,y)$ est de dimension 1 - lorsque $|y| = |x|+2$, elle peut être compactifiée en une variété à bords $\bar{\mathcal{M}}(x,y)$, dont le bord est donné par

$$\partial \bar{\mathcal{M}}(x,y) = \bigcup_{|z|=|x|+1} \mathcal{M}(x,z) \times \mathcal{M}(z,y) \ .$$

Espaces de modules de trajectoires de gradients III



Compactification d'un espace de modules de trajectoires de dimension 1

La différentielle ∂^k_{Morse} I

Rappellons que les $\mathbb{Z}$-modules de notre complexe étaient définis comme

$$C^k_{Morse} := \bigoplus_{|x|=k} \mathbb{Z} \cdot x \ .$$

On définit alors la différentielle

$$\partial^k_{Morse}(x) := \sum_{|y|=|x|+1} \#\mathcal{M}(x,y) \cdot y \ ,$$

qui est bien définie car les espaces de modules $\mathcal{M}(x,y)$ sont de dimension 0.
Montrons que c'est bien un complexe de cochaînes, c'est-à-dire que l'on a bien $\partial^{k+1}_{Morse} \circ \partial^k_{Morse} = 0$. Pour x un point critique

$$\partial^{k+1}_{Morse} \circ \partial^k_{Morse}(x) = \sum_{\substack{|z|=|x|+1 \\ |y|=|x|+2}} \#\mathcal{M}(x,z) \cdot \#\mathcal{M}(z,y) \cdot y \ .$$

La différentielle ∂^k_{Morse} II

En projetant sur chaque composante $\mathbb{Z} \cdot y$, on trouve le compte signé des éléments du bord $\partial \bar{\mathcal{M}}(x, y)$, qui est donc nul comme tout compte signé du bord d'une variété orientée de dimension 1.

Cela achève de définir le complexe des cochaînes de Morse associé à la fonction f et à la métrique g sur M.

Transfert d'une structure de dga le long d'une déformations par rétracte I

Soient (A, d_A) et (H, d_H) deux complexes de cochaînes.
Considérons un diagramme de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} (A, d_A) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (H, d_H) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd} ,$$

où $\mathrm{id}_A - ip = dh + hd := [d, h]$ et $pi = \mathrm{id}_H$. On dit alors que H est un rétracte par déformation de A.

Lorsque (A, d_A) est muni d'une structure d'algèbre différentielle graduée - abrégée dga, on souhaite utiliser le diagramme précédent pour transporter la structure de dga sur A en une structure de dga sur H.

Transfert d'une structure de dga le long d'une déformations par rétracte II

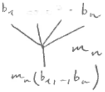
Cela n'est en général pas possible, car la multiplication m que l'on définit sur H n'est pas associative. Elle est toutefois associative à homotopie près, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $\kappa : H \otimes H \to H$ tel que

$$m \circ (m \otimes \mathrm{id}_H) - m \circ (\mathrm{id}_H \otimes m) = [d_H, \kappa] \ .$$

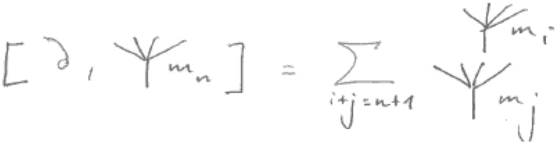
En fait, la structure d'algèbre différentielle graduée se transporte sous le diagramme précédent en une structure d'A_∞-algèbre : la bonne notion homotopique d'une algèbre associative à homotopie près. Ce résultat constitue ce qu'on appelle le *théorème de transfert*.

A_∞-algèbre : définition

Une A_∞-algèbre est la donnée d'un complexe de cochaînes (B, d_B) ainsi que d'une suite d'opérations $m_n : B^{\otimes n} \to B$ de degré $2 - n$ qui satisfont les équations A_∞(voir suite).



Si l'on représente les opérations m_n comme des n-corolles prenant n éléments de B en entrées, l'équation A_∞ de degré n s'écrit comme toutes les manières d'exploser la n-corolle suivant une arête :



Théorème de transfert pour les cochaînes de Morse

Soit f une fonction de Morse sur une variété riemannienne (M, g).

On peut prouver que les cochaînes de Morse forment un rétracte par déformation des cochaînes singulières de M, c'est-à-dire qu'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} (C^*_{sing}, \partial_{sing}) \arrow[loop left, "H"] \arrow[r, shift left, "A"] & (C^*_{Morse}, \partial_{Morse}) \arrow[l, shift left, "D"] \end{tikzcd} ,$$

où $\mathrm{id} - D \circ A = [d, H]$ et $A \circ D = \mathrm{id}$.

Or, les cochaînes singulières munies du produit cup forment une algèbre différentielle graduée. Le théorème de transfert assure donc que les cochaînes de Morse peuvent être munies d'une structure d'A_∞-algèbre.

Idée

Le résultat précédent nous dit que C^*_{Morse} peut être muni d'une structure d'A_∞-algèbre par un argument purement algébrique. On souhaite définir cette structure d'A_∞-algèbre de façon géométrique, c'est-à-dire introduire de nouveaux espaces de modules dont le compte définira les opérations m_n sur C^*_{Morse}.

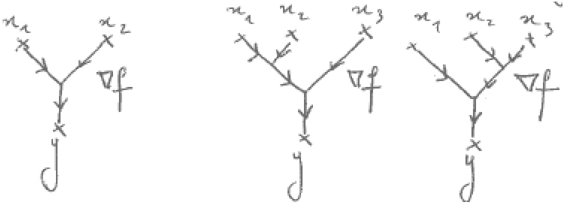
On comptait précédemment des *trajectoires de gradient* pour définir la différentielle sur C^*_{Morse}. On va cette fois compter des *arbres de gradient* pour définir les m_n.

On rappelle pour la suite que

$$C^k_{Morse} := \bigoplus_{|x|=k} \mathbb{Z} \cdot x \ .$$

Arbres de gradient : définition

Les arbres de gradient sont la réalisation en théorie de Morse des arbres binaires métriques. Plutôt que de donner une définition à rallonge, nous en donnons l'intuition avec les trois exemples qui suivent.



Espaces de modules d'arbres de gradient

On note alors l'espace de modules des arbres de gradient à n sommets entrants $x_1, \dots, x_n$ et à sommet sortant y comme

$$\mathcal{M}(x_1, \dots, x_n; y) \ .$$

Sous certaines nouvelles conditions satisfaites génériquement, cet espace de modules est de dimension

$$\dim \mathcal{M}(x_1, \dots, x_n; y) = |y| - \sum_{i=1}^{n} |x_i| + n - 2 \ ,$$

et est de plus orientable.

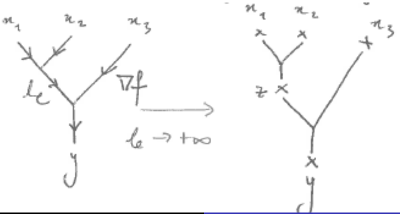
Espaces de modules d'arbres de gradient de dimension 0 et 1

Lorsque l'espace de modules d'arbres de gradient est de dimension 0, il est compact. Comme précédemment pour $\mathcal{M}(x, y)$, on peut donc effectuer un compte signé de ses éléments.

Lorsque cet espace de modules est de dimension 1, il admet une compactification en une variété à bord $\bar{\mathcal{M}}(x_1, \dots, x_n; y)$, dont le bord est donné par

$$\bigcup \mathcal{M}(x_1, \dots, x_i, z, x_j, \dots, x_n; y) \times \mathcal{M}(x_{i+1}, \dots, x_{j-1}; z) \ ,$$

ce qui se représente comme suit



L'A_∞-algèbre des cochaînes de Morse

On définit alors la structure d'A_∞-algèbre sur les cochaînes de Morse comme suit. Les opérations m_n sont définies par un compte signé d'espace de modules d'arbres de gradient de dimension 0, c'est-à-dire que pour $x_1, \dots, x_n$ des points critiques f, on définit

$$m_n(x_1, \dots, x_n) := \sum_{|y| = \sum_{i=1}^n |x_i| + 2 - n} \# \mathcal{M}(x_1, \dots, x_n; y) \cdot y \ .$$

Ces opérations m_n satisfont alors bien les équations A_∞ grâce à la formule de bord pour les espaces de modules d'arbres de gradient de dimension 1 - c'est le même argument pour montrer que ∂^*_{Morse} est bien une différentielle.

Cela achève la construction de la structure d'A_∞-algèbre sur les cochaînes de Morse.

Pour aller plus loin : A_∞-catégories en topologie symplectique

La théorie de Morse se généralise en fait avec la théorie de Floer au monde de la géométrie symplectique. L'A_∞-algèbre des cochaînes de Morse devient alors l'A_∞-catégorie de Fukaya d'une variété symplectique : c'est actuellement un des domaines de recherche les plus actifs en géométrie symplectique, à la croisée de la géométrie, de l'algèbre et de l'analyse.

Bibliographie

- Mohammed Abouzaid.
  Morse homology, tropical geometry, and homological mirror symmetry for toric varieties.
  Selecta Math. (N.S.), 15(2):189–270, 2009.

- Bruno Vallette.
  Algebra + homotopy = operad.
  In *Symplectic, Poisson, and noncommutative geometry*, volume 62 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 229–290. Cambridge Univ. Press, New York, 2014.