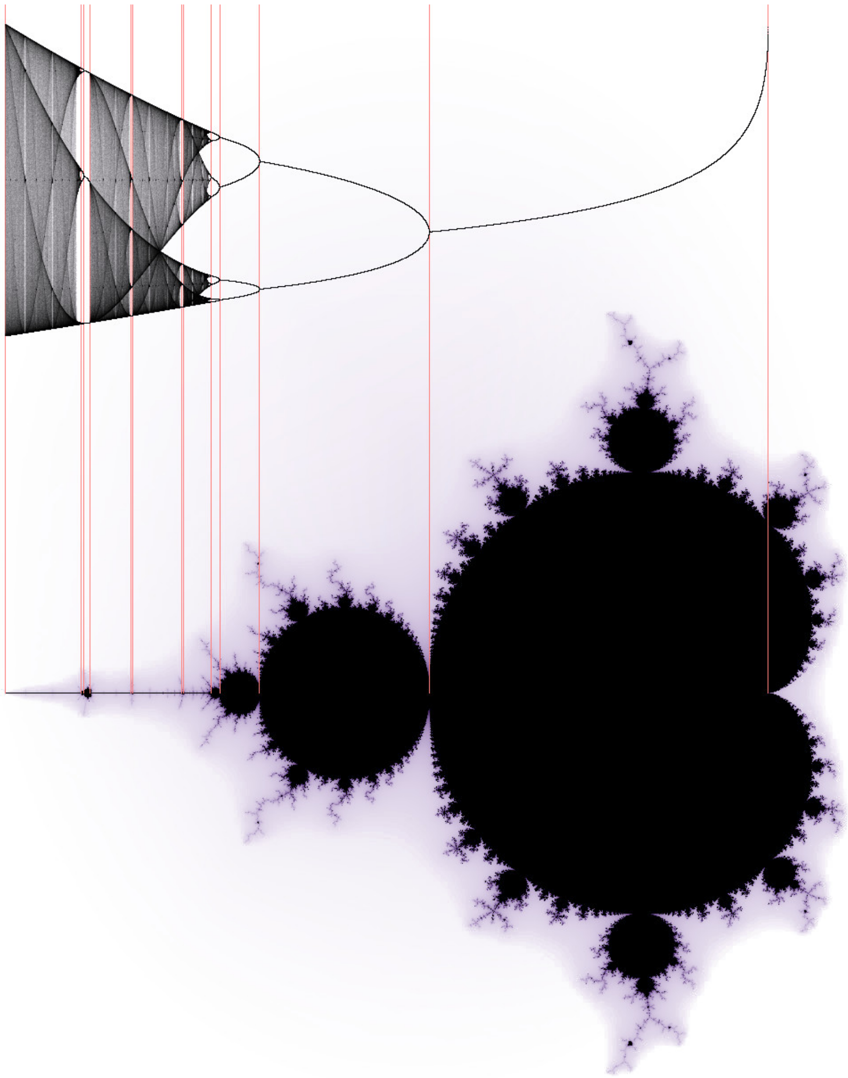
Cours de mathématiques

ECG1



T. Mainguy

Table des matières

Première partie

Introduction

Chapitre 1

Le language des mathématiques

1 Énoncés, symboles et ensembles de bases

1.1 Symboles courants et énoncés

Les mathématiques peuvent être vues comme une nouvelle “langue vivante”, avec son vocabulaire, ses règles grammaticales, etc. Cette “langue” a été construite pour éviter toute ambiguïté, et faciliter les raisonnements abstraits, mais il est possible de tirer des parallèles entre le langage mathématique et les langues naturelles.

Définition 1.1

Les “phrases” mathématiques sont les énoncés, *des affirmations qui peuvent être soit vraies, soit fausses. Ils sont composés de divers* symboles mathématiques *(“mots”), dont l'agencement est régit par des règles de syntaxe particulières :*

- *Des symboles de* constantes *(≈ noms propres), ($\mathbb{R}$, e, π, $+\infty$, ...), subdivisés en plusieurs* catégories *(ensembles, nombres, opérateurs, etc.).*
- *Des* variables *(≈ pronoms) (x, a, etc.) qui servent à référencer des objets particuliers.*
- *Des symboles de* relations *(≈ verbes), comme $\leqslant$, $>$, $\in$, $=$, etc., qui relient un ou plusieurs objets de catégories précises pour en faire un énoncé.*
- *Des* connecteurs logiques *entre formules (≈ conjonctions de coordinations), qui relient deux énoncés pour en faire un nouveau :*

et	*ou*	*implique*	*est équivalent à*	*non*
$\wedge$	$\vee$	$\Longrightarrow$	$\Longleftrightarrow$	$\neg$

- *Deux* quantificateurs, *qui introduisent (“lient”) les variables :*

pour tout	*il existe*
$\forall$	$\exists$

Toute variable doit être introduite, soit par un de ces quantificateurs, soit par une phrase préliminaire, comme « Soit n un entier naturel », ou « Posons f la fonction $x \mapsto x^2$ ».

Ces énoncés sont ensuite utilisés dans des raisonnements, *qui consistent en une succession d'énoncés reliés par des liens logiques.*

Remarque. Il est important de bien faire la différence entre l'équivalence $\iff$, l'implication $\implies$, et le mot "donc". Par exemple, $\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x = y) \iff (x^2 = y^2)$ est un énoncé faux, alors que $\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x = y) \implies (x^2 = y^2)$ est vrai. Enfin, le *raisonnement* « pour tous réels x et y, $x = y$ donc $x^2 = y^2$ » n'est pas un raisonnement correct.

En revanche, l'affirmation « pour tous réels x et y, si $x = y$ alors $x^2 = y^2$ » est correcte, et dit exactement la même chose que l'affirmation de l'énoncé précédent « $\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x = y) \implies (x^2 = y^2)$ (est vrai) * ».

Définition 1.2

Si P est une propriété (càd que $P(x)$ est un énoncé pour tout objet x), l'énoncé

$$\Big(\exists x \in E\ P(x)\Big) \wedge \Big(\forall x \in E\ \forall x' \in E\ \Big(\big(P(x) \wedge P(x')\big) \implies x = x'\Big)\Big)$$

signifie qu'il existe un unique élément de E qui vérifie P. Il est noté

$$\exists! x \in E\ P(x).$$

1.2 Les ensembles de base

Définition 1.3 (*ensembles numériques*)

Les nombres existants en mathématiques sont regroupés en une hiérarchie d'ensembles, dont :

- *l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des* entiers naturels, $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$
- *l'ensemble* $\mathbb{Z}$ *des* entiers relatifs, $0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots,$
- *l'ensemble* $\mathbb{Q}$ *des entiers rationnels, ou fractions,*
- *l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des tous les réels.*

Ces ensembles peuvent être modifiés par des signes divers, comme par exemple $\mathbb{N}^*$ désignant l'ensemble des entiers naturels non nuls, ou $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls. On définit aussi les intervalles réels et entiers :

Définition 1.4

- *Si a, b sont deux réels, avec $a < b$,*
  - $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$,
  - $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leqslant b\}$,
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$,
  - $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x < b\}$,
  - $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$,
  - $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$,
  - $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leqslant b\}$,
  - $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x\}$,
- *Si a, b sont deux entiers, avec $a < b$,* $[\![a, b]\!] = \{n \in \mathbb{N}, a \leqslant n \leqslant b\}$.

*. Par convention, tout énoncé écrit dans un exposé mathématique est vrai. Il n'est pas nécessaire de le préciser !

1.3 Raisonnements mathématiques

Définition 1.5

> *Un* raisonnement *(ou* démonstration*) mathématique est une succession d'énoncés reliés par des liens logiques valides, partant d'énoncés vrais ("prémisses") et aboutissant à un énoncé ("conclusion"), qui doit, de part la validité du raisonnement, être lui aussi vrai. Les énoncés sont en général écrits au moyen du formalisme mathématique, mais peuvent aussi être (au moins en partie) paraphrasés en langue naturelle.*

Par exemple, le raisonnement suivant constitue une démonstration de l'énoncé $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ x < y$:

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{N}$.

Puisque $0 < 1$,

on a donc $x + 0 < x + 1$ [*],

ce qui revient, en posant $y = x + 1$, à $x < y$.

De plus, comme la somme de deux entiers est encore un entier, $y = x + 1 \in \mathbb{N}$.

On a donc bien montré que, quelque soit l'entier naturel x, il existe un entier naturel y (par exemple $x + 1$) tel que $x < y$:

L'énoncé

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ x < y$$

« Pour tout entier naturel, il en existe un plus grand » est donc vrai. □

D'autres modes de raisonnements sont possibles. Le raisonnement précédent est un raisonnement *par inférence déductive*. Un autre mode de raisonnement, par exemple, est le raisonnement *par équivalence*, où l'on montre que deux énoncés (dont la véracité n'est pas forcément établie) sont équivalents, c'est-à-dire qu'ils auront la même valeur logique : si l'un est vrai, l'autre aussi, et réciproquement.

Le raisonnement suivant constitue une preuve (par équivalence, évidemment) que $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^3 + x \geqslant 0) \iff (x \geqslant 0)$:

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équivalents :

$$\begin{aligned} x^3 + x \geqslant 0 &\iff x(x^2+1) \geqslant 0 \text{ (puisque } x^3 + x = x(x^2+1)) \\ &\iff x \geqslant 0 \text{ (puisque } x^2 + 1 > 0). \end{aligned}$$

□

Remarque. On peut souvent être tenté d'utiliser un raisonnement par équivalence pour montrer des résultats où une démonstration par inférence suffit. Par exemple, le raisonnement précédent constitue aussi une preuve que $\forall x \in \mathbb{R}_+\ x^3 + x \geqslant 0$ (puisque le dernier énoncé, $x \geqslant 0$, est vrai si $x \in \mathbb{R}_+$, le premier doit nécessairement l'être aussi).

Mais une preuve directe est souvent plus simple : si $x \in \mathbb{R}_+$, x^3 et x sont positifs, donc leur somme aussi... et il n'est aucunement nécessaire de montrer de plus que le résultat est faux pour d'autres valeurs de x (ce qui est inclut dans l'équivalence).

---

*. conséquence de la propriété de l'addition : $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (a < b) \implies (a + x < b + x)$

Les raisonnements par équivalence sont bien plus complexes que les raisonnements par inférence, puisqu'il s'agit en quelque sorte de deux raisonnements en un (un qui "descend", et un qui "remonte"). Il importera de les utiliser avec parcimonie, et à bon escient.

Un autre exemple de raisonnement est le raisonnement *par l'absurde*, comme illustré dans cette démonstration que l'énoncé $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y < x$ est faux :

Démonstration. Prenons l'entier naturel $x = 0$.

Supposons qu'il existe un entier naturel y tel que $y < x$.

On a donc que $y < 0$. Or y est un entier naturel, donc $y \geqslant 0$.

Ces deux conclusions sont incompatibles, il y a donc une partie du raisonnement fausse. Ce ne peut être que la supposition qu'il existe un entier naturel y tel que $y < x$, qui est donc fausse.

Nous avons donc trouvé un entier pour lequel il n'existe pas d'entiers strictement inférieurs, ce qui contredit l'énoncé $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y < x$.

En revanche, nous avons démontré le contraire de cet énoncé, à savoir

$$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y \geqslant x.$$

□

Nous verrons, au cours de l'année, d'autres types de raisonnements, comme le raisonnement par récurrence (chapitre 4). Un dernier raisonnement a cependant sa place dans cette section : le raisonnement par contraposée, qui repose sur le fait qu'un énoncé $A \implies B$ est équivalent à $\text{non}(B) \implies \text{non}(A)$. En effet, dire que « s'il pleut, je sors avec un parapluie », dit exactement la même chose que « si je n'ai pas de parapluie, c'est qu'il ne pleut pas ». Illustrons ce raisonnement par un dernier exemple, en montrant que $\forall x \in \mathbb{R}_+, (\forall \varepsilon > 0, x < \varepsilon) \implies (x = 0)$: le seul réel positif inférieur à tout réel strictement positif est 0 [*].

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons la contraposée : $(x \neq 0) \implies (\exists \varepsilon > 0, x \geqslant \varepsilon)$.

Si $x \neq 0$, c'est que $x > 0$. En posant $\varepsilon = x$, on a bien trouvé un réel strictement positif, inférieur ou égal à x : $\varepsilon = x \leqslant x$. □

Remarques.

— Un raisonnement mathématique ne doit affirmer que des énoncés *vrais* et justifiés comme tels, (car évidents ou conséquences des énoncés précédents). Les énoncés dont la véracité est inconnue doivent être introduits comme tels (en les supposant, comme dans le cas précédent par exemple), et ce uniquement dans des types de raisonnements particulier, comme le raisonnement par l'absurde.

— Un raisonnement par équivalence, même si l'on ne connaît par la véracité des énoncés impliqués, respecte toujours cette règle : dans l'exemple précédent, ce qui est affirmé comme vrai n'est pas l'énoncé $x^3+x \geqslant 0$, mais l'équivalence $x^3 + x \geqslant 0 \iff x(x^2 + 1) \geqslant 0$ (qui est aussi un énoncé, et qui est vraie et justifiée).

∗. Les plus sagaces lecteurs auront remarqué que cette paraphrase en dit plus, en ajoutant que 0 vérifie bien la propriété (comme s'il y avait une équivalence). Mais cette affirmation est d'une évidence triviale.

— La convention veut que chaque ligne d'un raisonnement mathématique soit une affirmation vraie (à moins qu'elle ne soit introduite par un "montrons que" ou "supposons que", évidemment).
Comparer les deux rédactions suivantes :

· Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x^3 = x$.

$$\begin{aligned} &\text{On a donc } x^3 = x \\ &\implies x^3 - x = 0 \\ &\implies x(x^2-1) = 0 \\ &\implies x^2 = 1 \\ &\implies x = 1. \end{aligned}$$

· Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} x^3 = x &\iff x^3 - x = 0 \\ &\iff x(x^2-1) = 0 \\ &\iff x^2 = 1 \text{ ou } x = 0 \\ &\iff x = 1, -1 \text{ ou } 0. \end{aligned}$$

(Notons que le "vide" à gauche des équivalences contient, par convention, la même chose qu'aux lignes précédentes. Pas besoin de le réécrire.)

Exercice 1.1.
Parmis ces énoncés, lesquels sont vrais, lesquels sont faux, et pourquoi ?

1. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, y < x,$
2. $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z},\ x < z < y,$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R},\ x < z < y,$
4. $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2,$ [*]
5. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2,$ [†]
6. $\forall x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2) \implies (x \geqslant 0).$

1.4 Négations

Les deux derniers exemples de raisonnement, par l'absurde et par contraposée, montrent bien l'importance de savoir considérer la négation d'un énoncé donné.

Propriété 1.1

Le tableau suivant donne les règles de négation des énoncés formés à partir des symboles logique de base :

E	$non(E)$
$\forall x\ P(x)$	$\exists x\ non(P(x))$
$\exists x\ P(x)$	$\forall x\ non(P(x))$
A et B	$non(A)$ ou $non(B)$
A ou B	$non(A)$ et $non(B)$
$A \implies B$	A et $non(B)$
$A \iff B$	$(A$ et $non(B))$ ou $(non(A)$ et $B)$

(la dernière ligne n'est guère utile)

∗. Cet énoncé est faux, mais saurez-vous trouver pourquoi ? Nous en ferons une preuve en classe !

†. Celui-ci est vrai, en revanche, et vous devriez pouvoir le démontrer d'ici la fin de l'année !

2 Ensembles

2.1 Symboles particuliers

Définition 2.1

Soit E un ensemble, et a un objet.

- *$a \in E$ signifie que « a est un élément de E », ou « a appartient à E ».*
- *$a \notin E$ signifie que « a n'appartient pas à E ». C'est la négation de $a \in E$.*

Soit F un second ensemble. On dit que « F est inclu dans E », noté $F \subset E$, lorsque tout élément de F est aussi un élément de E. On dit aussi que F est une partie, ou un sous-ensemble, de E.

On appelle cardinal *d'un ensemble E, noté* $\mathrm{Card}(E)$*, le nombre d'éléments que celui-ci contient (si celui-ci est fini, bien sûr).*

S'il est possible de lister tous les éléments de l'ensemble E (i.e. s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$, cf chapitre 2), même si cet ensemble n'est pas fini, il est dit dénombrable.

Remarque. Pour tous ensembles E et F, on a l'équivalence

$$(F \subset E \text{ et } E \subset F) \iff E = F.$$

Définition 2.2

On note $\varnothing$ l'ensemble vide, l'unique ensemble qui ne contient aucun élément.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des objets, on note $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble formé d'exactement ces éléments.

Soit E un ensemble, et P une propriété définie sur E. On note $\{x \in E, P(x)\}$ le sous-ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété P.

Remarque. Un ensemble de la forme $\{x \in E, \exists a \in F, x = f(a)\}$, où f est une fonction, s'écrira souvent de façon plus simple

$$\{f(a), a \in F\}.$$

Cette écriture est appelée *représentation paramétrique* de l'ensemble.

Par exemple, l'ensemble des entiers pairs peut s'écrire $P = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$.

Remarques.

- Pour tout ensemble E, $\varnothing \subset E$,
- on a $\varnothing = \{\}$,
- si $x \in E$, alors $\{x\} \subset E$.

Exercice 1.2.
Soit $E = \{x \in \mathbb{R},\ \exists q \in \mathbb{N}^*, qx \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $E = \mathbb{Q}$:

1. Montrer que $E \subset \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\mathbb{Q} \subset E$.
3. Conclure.

On pourra adopter la définition suivante :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

2.2 Opérations sur les ensembles

Soit E un ensemble.

Définition 2.3 (*réunions, intersections, complémentaires d'ensembles*)

Soient A et B deux parties de E. On note

- $A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$ *leur* réunion*,*
- $A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$ *leur* intersection*,*
- $A \setminus B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B\}$ *l'ensemble « A* privé de *B »,*
- $\overline{A} = E \setminus A$ *le* complémentaire *de A (aussi noté $\complement_A^E$).*

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont disjoints.

Remarque. On généralise aisément la réunion et l'intersection à une collection d'ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et on note

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ et } A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Cette notation s'étend même à une collection quelconque d'ensembles : si I est une collection d'indices, et si pour tout $i \in I$, A_i est un ensemble, on note leur réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$ et leur intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$.

Proposition 2.1

Soient A et B deux parties de E. On a alors

- $A \cup \overline{A} = E$,
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$,
- $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$,
- $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing$,
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
- $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Définition 2.4 (*ensemble des parties*)

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles inclus dans E. On a ainsi l'équivalence, vraie pour tout ensemble F, $F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subset E$.

Proposition 2.2

Pour tout ensemble E, $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.

Exercice 1.3.
Prouvez cette affirmation !

Définition 2.5

Soient A et B ensembles. On définit leur produit cartésien *$A \times B$ comme étant l'ensemble des* couples *(x, y), $x \in A$, $y \in B$.*

On note $E^2 = E \times E$, et plus généralement $E^n = \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$.

Chapitre 2

Fonctions et Applications

Dans tout ce qui suit, on considère deux ensembles E et F. En pratique, on prendra $E = F = \mathbb{R}$.

1 Fonctions

Définition 1.1 (*fonctions*)

Une fonction f *d'un ensemble E dans un ensemble F est un procédé qui, à tout élément de E, associe au plus un élément de F, appelé son* image.

Pour tous les éléments $x \in E$ ayant une image par f, on note cette image $f(x)$. x est alors un antécédent *de cette image.*

L'ensemble E est appelé ensemble de départ *de f, F, son* ensemble d'arrivée.

L'ensemble des éléments de E qui possèdent une image est appelé domaine de définition *de f, noté $\mathscr{D}_f$. L'ensemble des éléments de F qui possèdent (au moins) un antécédent est l'*ensemble image *de f, note* $\mathrm{Im}(f)$.

Si $f(x)$ est une formule donnant l'image d'un objet x par la fonction f, on note $f : x \mapsto f(x)$ (x pouvant être remplacé par n'importe quelle autre lettre).

L'ensemble des fonctions de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$.

Remarque. Un élément y de F peut avoir un, plusieurs, ou aucun antécédents.

Définition 1.2

Le graphe *d'une fonction f est le sous-ensemble $\{(x, f(x)), x \in \mathscr{D}_f\} \subset E \times F$.*

Exercice 2.1.
Considérons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Déterminer l'image de 0, -1 et 1.
3. Déterminer les antécédents de 0, $\frac{1}{2}$ et 1.
4. Déterminer l'ensemble image de f.
5. Saurez-vous reconnaître le graphe de f ?

2 Applications

Définition 2.1 (*applications*)

Une application f *d'un ensemble* E *dans* F *est la donnée de deux ensembles* E *et* F, *et d'une fonction de* E *dans* F *telle que chaque élément de* E *a une image* ($E \subset \mathscr{D}_f$).

Remarque. Une simple formule ne suffit pas pour définir une application, il faut aussi donner son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée. On peut utiliser par exemple la notation

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Définition 2.2

Soit f *une application de* E *dans* F, *et* $E' \subset E$. *On appelle la* restriction *de* f *à* E', *notée* $f_{|E'}$, *l'application*

$$\begin{array}{rccc} f_{|E'}: & E' & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

2.1 Composition

Définition 2.3 (*composition d'applications*)

Soient f *une application de* E *dans* F, *et* g *une application de* F *dans* G. *On définit la composée de* f *par* g *comme :*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Remarque. Il est bien sûr possible de composer deux fonctions f et g entre elles (définissant ainsi $g \circ f$), mais le domaine de définition n'est alors pas forcément le domaine de définition de la première, mais plutôt

$$\mathscr{D}_{g \circ f} = g^{-1}(\mathscr{D}_f) = \{x \in \mathscr{D}_g, g(x) \in \mathscr{D}_f\},$$

appelé image réciproque de $\mathscr{D}_f$ par g, qu'il faudra souvent déterminer...

Propriété 2.1

La composition est associative, c'est-à-dire que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Exercice 2.2.
Si $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x + 1$, quelles sont $f \circ g$ et $g \circ f$? Leurs domaines de définition ? Sont-elles égales ?

Faire de même avec $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

3 Fonctions numériques

Remarque. Dans cette section, on parlera en terme de fonctions. Le même exposé est possible en terme d'applications, les quelques différences étant laissées à la sagacité du lecteur.

Définition 3.1

Un appelle fonction numérique toute fonction de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

3.1 Opérations sur les fonctions numériques

Définition 3.2

Soient f et g deux fonctions numériques, et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions suivantes (addition, produit extérieur, produit et quotient) :

- $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$,
- $\alpha f : x \mapsto \alpha f(x)$,
- $fg : x \mapsto f(x)g(x)$,
- $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$.

Remarque. Attention, si le domaine de définition des trois premières opérations reste le domaine de définition des fonctions d'origine (ou leur intersection s'il y en a deux), pour le quotient, il s'agit du domaine où la fonction ne s'annule pas, qu'il importera donc de déterminer.

3.2 Bornes

Définition 3.3 (*fonctions bornées*)

Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite :

- majorée *sur A lorsqu'il existe un réel M tel que $\forall x \in A\ f(x) \leqslant M$, le réel M est alors un* majorant *de f,*
- minorée *sur A lorsqu'il existe un réel m tel que $\forall x \in A\ f(x) \geqslant m$, le réel m est alors un* minorant *de f,*
- bornée *si elle est majorée et minorée.*

Un majorant qui est atteint est un maximum, *un minorant atteint, un* minimum, *et un* supremum *est un maximum ou un minimum. Ces derniers sont uniques, et notés respectivement*

$$\max_{t\in A}(f(t)) \text{ et } \min_{t\in A}(f(t)).$$

Remarque. Attention, un minorant (ou un majorant) ne sera jamais unique, et le minimum (ou le maximum) n'existe pas toujours. La notion générale est l'*infimum* et l'*extremum* : le plus grand minorant et le plus petit majorant... mais ce sont des objets complexes à déterminer, et bien au-delà du programme d'ECG.

3.3 Sens de variation

Définition 3.4 (*variations des fonctions*)

Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ *est dite :*

- constante *sur A lorsqu'il existe un réel c tel que $\forall x \in A\ f(x) = c$,*
- croissante *sur A si $\forall (x, x') \in A^2\ x \leqslant x' \implies f(x) \leqslant f(x')$,*
- strictement croissante *sur A si $\forall (x, x')^2 \in A\ x < x' \implies f(x) < f(x')$,*
- décroissante *sur A si $\forall (x, x') \in A^2\ x \leqslant x' \implies f(x) \geqslant f(x')$,*
- strictement décroissante *sur A si $\forall (x, x') \in A^2\ x < x' \implies f(x) > f(x')$,*
- (strictement) monotone *sur A si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.*

Remarque. S'il est possible de démontrer qu'une fonction est croissante ou décroissante à partir de ces définitions, il sera en pratique souvent plus simple de calculer le signe de sa dérivée (cf chapitre 13). La proposition suivante peut aussi permettre dans certains cas une étude facile :

Propriété 3.1

La composée de deux fonctions monotones est monotone. Si les deux fonctions ont même sens de variation, la composée est croissante, sinon, elle est décroissante.

L'addition de deux fonctions de même monotonie est elle aussi de cette monotonie. Il en est de même pour la multiplication, à condition que les deux fonctions soient positives.

3.4 Fonctions paires et impaires

Définition 3.5 (*parité*)

Soit f une fonction numérique dont le domaine de définition est centré en 0 *($\forall x \in \mathscr{D}_f, -x \in \mathscr{D}_f$).*

- *On dit que f est* paire *si $\forall x \in \mathscr{D}_f\ f(-x) = f(x)$.*
- *On dit que f est* impaire *si $\forall x \in \mathscr{D}_f\ f(-x) = -f(x)$.*

Propriété 3.2

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe $(Oy$. Celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exercice 2.3.
On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que f est définie et paire sur $\mathbb{R}$,
2. Montrer que f est bornée par 0 et 1, mais que seul 1 est un extrémum.
3. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

4 Applications particulières

Définition 4.1

On appelle application identité *sur un ensemble E, notée* Id_E*, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x. \end{array}$$

4.1 Surjections

Définition 4.2 (*surjections*)

Une application de E dans F est surjective *si tout élément de F a au moins un antécédent.*

Remarque. Une application $f : E \to F$ est une surjection ssi

$$\forall y \in F\ \exists x \in E\ f(x) = y,$$

ou ssi

$$\mathrm{Im}(f) = F.$$

4.2 Injections

Définition 4.3 (*injections*)

Une application de E dans F est injective *si tout élément de F a au plus un antécédent.*

Remarque. Une application $f : E \to F$ est une injection ssi

$$\forall (x, x') \in E\ (f(x) = f(x')) \implies (x = x').$$

4.3 Bijections

Définition 4.4 (*bijections*)

Une application de E dans F est bijective *si elle est injective et surjective.*

Remarque. Une application $f : E \to F$ est une bijection ssi

$$\forall y \in F\ \exists! x \in E\ f(x) = y.$$

Théorème 4.1

Une application $f : E \to F$ est une bijection si, et seulement si, il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{Id}_E \text{ et } g \circ f = \mathrm{Id}_F .$$

Cette fonction est unique, et est appelée la réciproque *de f, notée f^{-1}.*

Théorème 4.2

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections, alors $f \circ g$ est une bijection de E dans G, et
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Théorème 4.3 (*de la bijection monotone*)

Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f est une bijection de I sur l'intervalle image de I.*

Propriété 4.4

Si f est une bijection strictement monotone d'un intervalle réel I dans l'intervalle réel J, alors sa réciproque f^{-1} est aussi strictement monotone, de même variation que f.

Exercice 2.4 (fonctions trigonométriques hyperboliques).
On définit les fonctions
$$\mathrm{sh} : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{ch} : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot$$

1. (a) Montrer que sh est définie sur $\mathbb{R}$, et donner sa parité.
   (b) Montrer que sh est croissante sur $\mathbb{R}$, et en déduire qu'elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son intervalle image (on suppose qu'elle est continue, le cours correspondant viendra plus tard).
   (c) Déterminer l'intervalle image de sh, et montrer que sh est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Montrer que sh est injective sur $\mathbb{R}$.
   (e) En déduire que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que ch est définie sur $\mathbb{R}$, et donner sa parité.
   (b) Montrer que ch est croissante sur $\mathbb{R}_+$, décroissante sur $\mathbb{R}_-$, et en déduire qu'elle définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur son intervalle image.
   (c) Déterminer l'intervalle image de ch, et montrer que ch est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $[1, +\infty[$.
   (d) ch est-elle injective sur $\mathbb{R}$?

Chapitre 3

Fonctions usuelles et polynômes

1 Fonctions exponentielles et logarithmes

1.1 Fonction inverse

Définition 1.1 (*fonction inverse*)

On appelle la fonction inverse *la fonction*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

Propriétés 1.1

La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Elle est impaire sur $\mathbb{R}^*$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

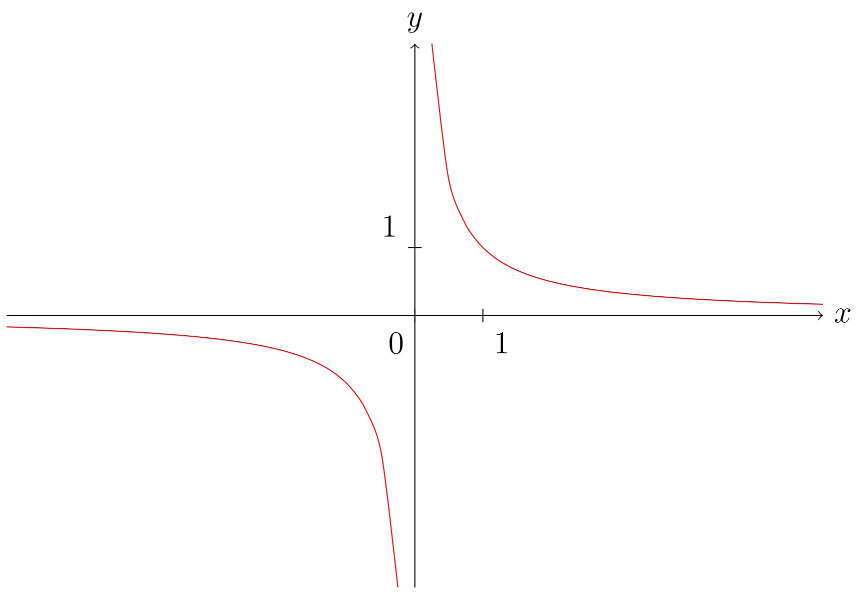


Figure 3.1 – Graphe de la fonction inverse

1.2 Logarithme népérien

Définition 1.2 (*fonction logarithme*)

On appelle la fonction logarithme népérien *la fonction* ln *définie comme l'unique fonction définie et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *telle que*

$$\begin{cases} \ln(1) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

C'est donc l'unique primitive de la fonction inverse valant 0 *en* 1 *(plus à ce sujet au chapitre 14).*

Propriétés 1.2

La fonction logarithme est, par définition, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$*, et sa dérivée est*

$$\begin{array}{rccc} \ln' : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$*, et définit une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$.

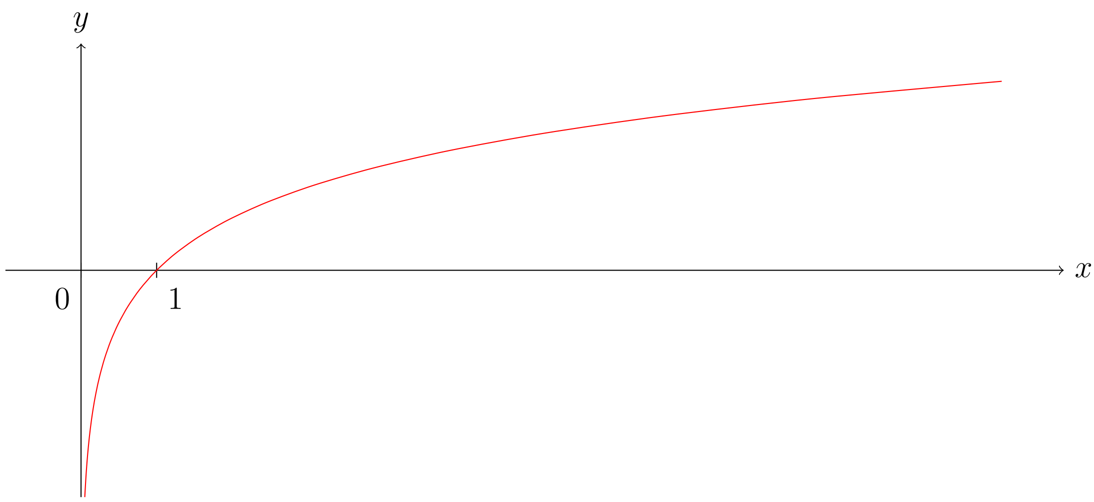


FIGURE 3.2 – Graphe de la fonction logarithme

Propriétés 1.3

Pour tous réels a *et* b *strictement positifs,* n *entier rationnel, on a*

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \ln(a)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

1.3 Exponentielle

Définition 1.3 (*fonction exponentielle*)

On appelle la fonction exponentielle *la fonction réciproque de* ln*, c'est-à-dire l'unique fonction* exp *telle que, pour tout* $y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$y = \ln(x) \iff \exp(y) = x.$$

On note souvent, pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Propriétés 1.4

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$*, et est sa propre dérivée.*

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$*, et définit une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

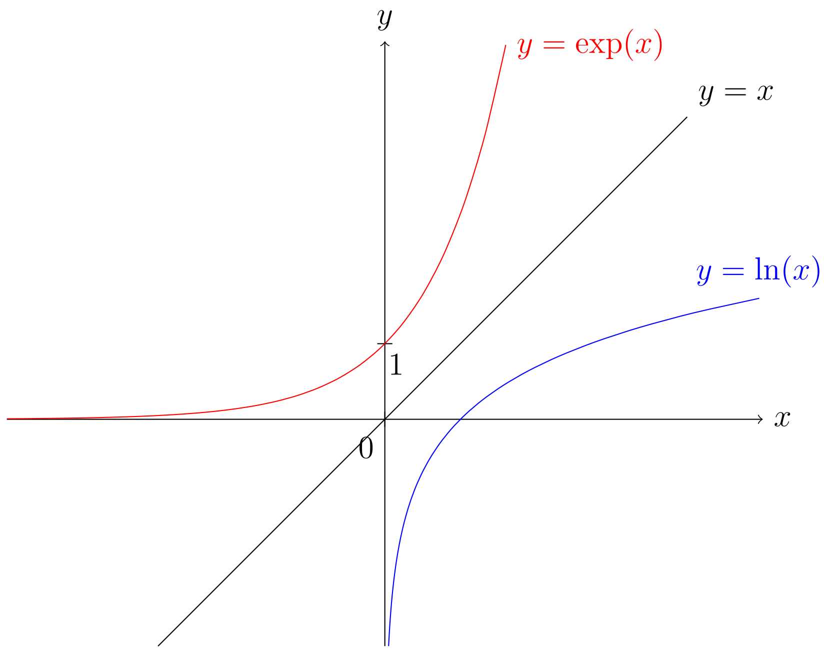


Figure 3.3 – Graphe de la fonction exponentielle (avec celui de $x \mapsto x$ et ln)

Propriété 1.5

Pour tout réel x*, pour tout réel* y *strictement positif,on a*

$$\ln(\exp(x)) = x \text{ et } \exp(\ln(y)) = y.$$

Propriétés 1.6

Pour tous réels a *et* b *strictement positifs, et* n *un entier rationnel, on a*

- $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$
- $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$
- $\mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}$
- $\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$

2 Fonctions puissances

2.1 Fonction racine

Définition 2.1 (*fonction racine*)

On appelle la fonction racine carrée *la réciproque de la fonction carrée* $x \mapsto x^2$ *sur* $\mathbb{R}_+$*, on note* $\sqrt{x}$ *l'image d'un réel positif* x *par cette fonction.*

Propriétés 2.1

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ *mais seulement dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$*, de dérivée* $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$*, et définit une bijection de* $\mathbb{R}_+$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

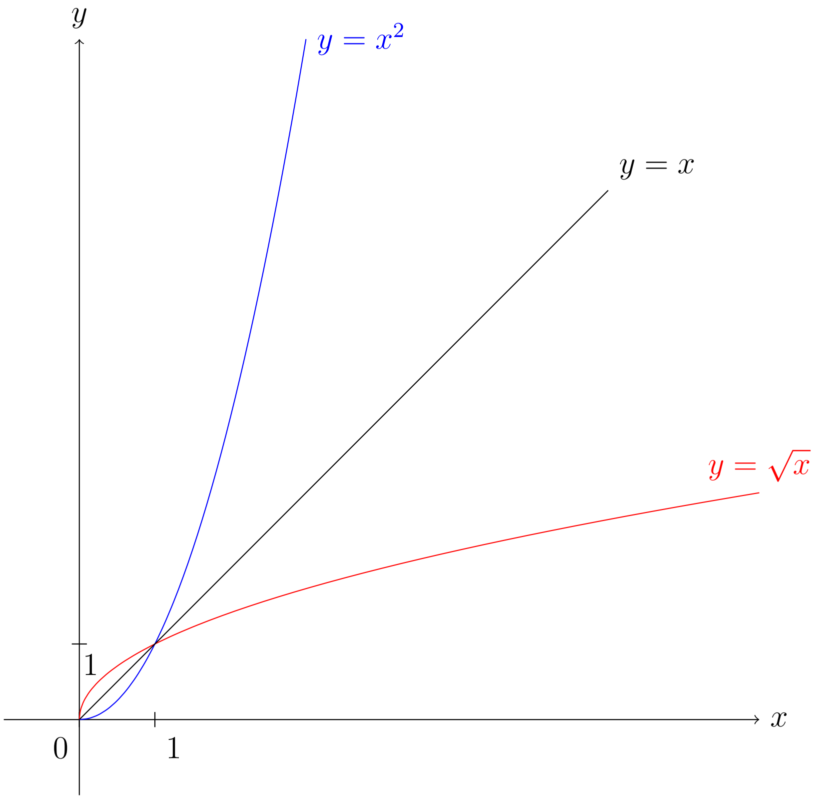


FIGURE 3.4 – Graphe de la fonction racine (avec celui de $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$)

2.2 Cas général

Définition 2.2

Soit α *un réel. On appelle la fonction* puissance α *la fonction*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^\alpha \overset{(\text{def})}{=} \exp(\alpha \ln(x)). \end{array}$$

Propriétés 2.2

La fonction puissance α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha > 0$, strictement décroissante si $\alpha < 0$, et constante, égale à 1 si $\alpha = 0$.

La fonction puissance α définit donc, pour tout α non nul, une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même. Sa réciproque est la fonction puissance $\frac{1}{\alpha}$.

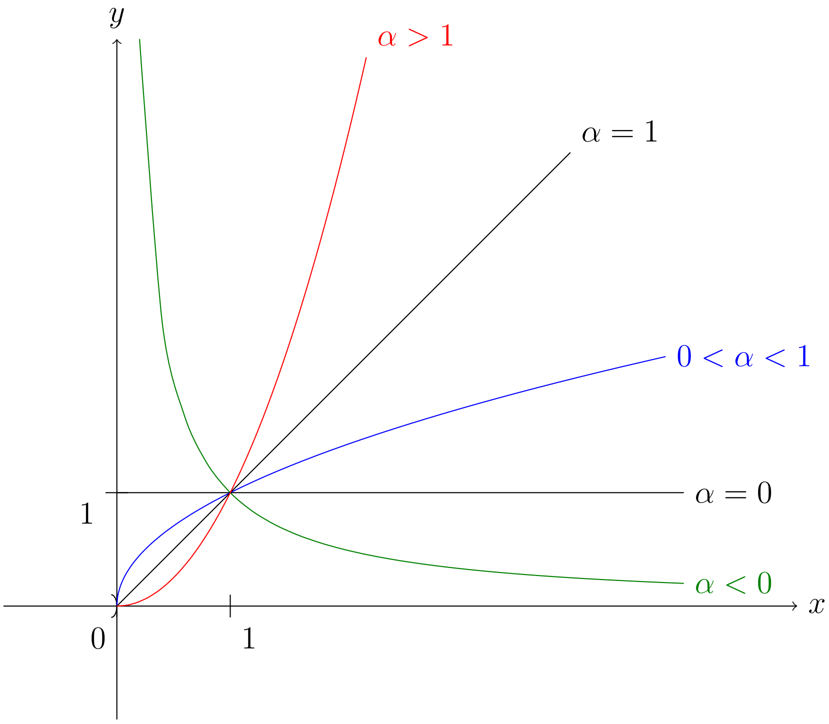


Figure 3.5 – Graphe de fonctions puissances α pour diverses valeurs de α

Propriété 2.3

On a pour tout x réel strictement positif, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

Propriétés 2.4

Soient α, β deux réels. Pour tous réels a et b strictement positifs, et n un entier rationnel, on a

- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{y^\beta}$

Remarque. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction racine carrée est la fonction puissance $\frac{1}{2}$.

3 Deux dernières fonctions

3.1 Valeur absolue

Définition 3.1 (*valeur absolue*)

On appelle la fonction valeur absolue *la fonction f qui à tout réel x associe*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriétés 3.1

La fonction valeur absolue est paire sur $\mathbb{R}$, d'intervalle image $\mathbb{R}_+$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

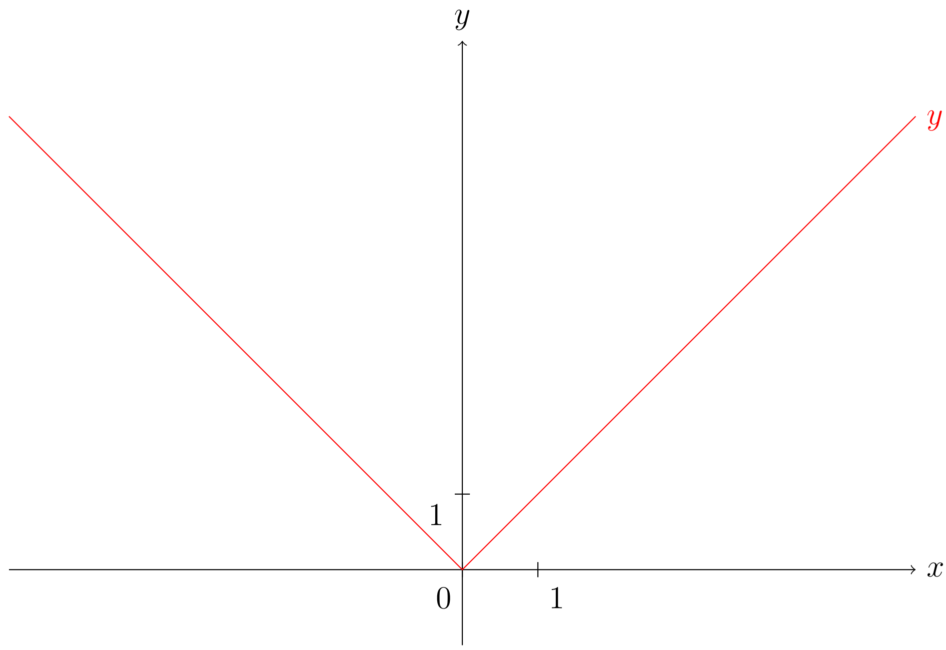


FIGURE 3.6 – Graphe de la fonction valeur absolue

Propriétés 3.2

Soient x, y deux réels.

- $|xy| = |x||y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ *si y non nul,*
- $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)*

Propriété 3.3

La valeur absolue d'un réel peut être vue comme la distance à 0 de ce réel, ou plus généralement, si x et y sont deux réels, $|x-y|$ représente la distance entre x et y.

3.2 Partie entière

Définition 3.2 (*partie entière*)

On appelle la fonction partie entière *la fonction f qui à tout réel x associe l'unique entier relatif, noté $\lfloor x \rfloor$, qui vérifie*

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

La partie entière d'un réel est le plus grand entier (relatif) qui lui est inférieur.

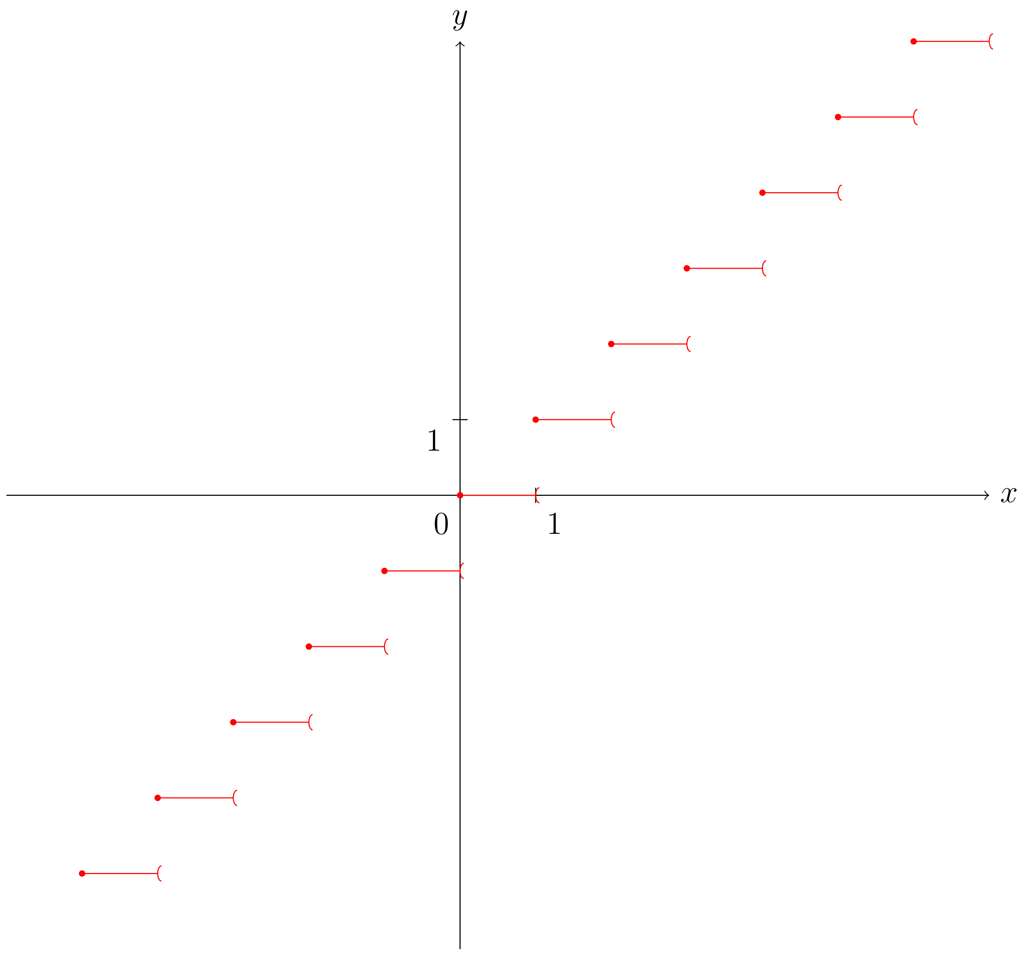


FIGURE 3.7 – Graphe de la fonction partie entière

Propriétés 3.4

La fonction partie entière est constante sur tous les intervalles $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, où elle vaut n.

Pour tout réel x, on a $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

Remarque. Cette fonction est la seule de la liste précédente qui n'est pas continue sur ses intervalles de définition.

4 Fonctions polynomiales

4.1 Généralités

Définition 4.1 (*polynômes*)

On appelle fonction polynomiale *(ou simplement* polynôme*) toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ de la forme*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des réels fixés.

Si $i \in \mathbb{N}$, a_i est le i^e coefficient *de P.*

Si $a_n \neq 0$, a_n est appelé le coefficient dominant *de P.*

Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé le polynôme nul.

Notation.

Il est de coutume de noter par la lettre X la fonction identité $X : x \mapsto x$, et d'utiliser cette notation pour désigner des polynômes.

Ainsi, plutôt que d'écrire $P : x \mapsto x^3 - 2x + 1$, on peut écrire $P = X^3 - 2X + 1$.

Utilisant cette notation, on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On voit aussi apparaître la notation $\mathbb{R}[x]$, désignant les polynômes relativement à la variable x. Ainsi $P(x) = x^2 - 3x + 1$ est une *expression polynomiale* en x, donc dans $\mathbb{R}[x]$, mais pas $P(y) = y^2 - 3y + 1$.

Proposition 4.1

Soient P et Q deux polynômes, λ un réel. Alors λP,$P + Q$, PQ sont encore des polynômes.

Proposition 4.2

Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux.

4.2 Degré d'un polynôme

Définition 4.2 (*degré d'un polynôme*)

Le degré *d'un polynôme est la plus haute puissance pour laquelle le coefficient associé est non nul : si n un entier, tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_i X^i$* avec *$a_n \neq 0$, est dit* de degré *$n$. On note* $\deg(P)$ *le degré du polynôme P.*

Par convention, le polynôme nul à un degré égal à $-\infty$.

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur *à n.*

Proposition 4.3

Soient P et Q deux polynômes, et λ un réel non nul. Alors

- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$,
- $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$,
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

4.3 Racines d'un polynôme

Définition 4.3 (*racines d'un polynôme*)

Soit P un polynôme. On dit qu'un réel α est racine *de P si $P(\alpha) = 0$.*

Théorème 4.4 (*factorisation des polynômes*)

Soit P un polynôme de degré entier, et $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P. Alors il existe un polynôme Q tel que

$$P = (X - \alpha)Q.$$

Exemple.
Prenons $P = X^3 + X^2 - 5X + 3$, et remarquons que $P(1) = 0$, donc 1 est une racine de P. On en déduit qu'il existe un polynôme Q tel que $P = (X - 1)Q$. Trouvons ce polynôme. Deux méthodes sont possibles :

i) Observons d'abord que $\deg((X - 1)Q) = \deg(X - 1) + \deg(Q) = \deg(P)$ donc $\deg(Q) = \deg(P) - 1$. Le polynôme P étant de degré 3, $\deg(Q) = 2$, et il existe trois réels a, b, c tels que $Q = aX^2 + bX + c$, qui doivent vérifier

$$\begin{aligned}
& (X-1)(aX^2+bX+c) = X^3+X^2-5X+3 \\
\iff & aX^3+bX^2+cX-aX^2-bX-c = X^3+X^2-5X+3 \\
\iff & aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c = X^3+X^2-5X+3
\end{aligned}$$

Ces deux polynôme sont égaux, leurs coefficients sont donc les mêmes, et

$$\begin{cases} a & = 1 \\ b-a & = 1 \\ c-b & = -5 \\ -c & = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 1+1 \\ c-b & = -5 \\ c & = -3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 2 \\ -3-2 & = -5 \\ c & = -3 \end{cases}$$

Le polynôme Q cherché est donc $Q = X^2 + 2X - 3$

ii) **Division euclidienne des polynômes :** Il est possible, en s'inspirant de la méthode classique de division "à la main" des entiers, d'appliquer un algorithme similaire sur les polynômes :

$$\begin{array}{rrrrrl|l}
 & X^3 & +X^2 & -5X & +3 & & X-1 \\ \cline{7-7}
-(& X^3 & -X^2 & & &) & X^2+2X-3 \quad = Q \\
 & & 2X^2 & -5X & +3 & & \\
-(& & 2X^2 & -2X & &) & \\
 & & & -3X & +3 & & \\
-(& & & -3X & +3 &) & \\
 & & & & 0 & &
\end{array}$$

Quoi qu'il en soit, on a bien factorisé $P = (X - 1)(X^2 + 2X - 3)$.

Remarque. La factorisation d'un polynôme ne s'arrête bien évidemment pas à une seule factorisation. Une fois une première racine trouvée, et la factorisation correspondante effectuée, on peut (et doit !) continuer à essayer de factoriser le polynôme Q obtenu, pour continuer la factorisation. Dans l'exemple précédent, on continue à chercher de factoriser $Q = X^2 + 2X - 3$. Remarquant que $Q(1) = 0$, Q s'écrit $Q = (X - 1)R$. On cherche R :

$$\begin{array}{rrrrl|l}
 & X^2 & +2X & -3 & & X-1 \\ \cline{6-6}
-(& X^2 & -X & &) & X+3 \\
 & & 3X & -3 & & \\
-(& & 3X & -3 &) & \\
 & & & 0 & &
\end{array}$$

ce qui donne finalement que $Q = (X - 1)(X + 3)$ et donc la factorisation finale $P = (X-1)(X-1)(X+3) = (X-1)^2(X+3)$ (on dit que 1 est une racine double).

Factoriser un polynôme revient à l'écrire sous la forme d'un produit de polynômes, chaque terme étant soit un polynôme de degré 1, ou un polynôme sans racine. Par exemple, une factorisation complète de $P = X^5 + 2X^4 - 2X - 2$ est $P = (X - 1)(X + 1)(X + 2)(X^2 + 1)$.

Proposition 4.5

Soit P un polynôme de degré inférieur à n, $n \in \mathbb{N}$. Si P admet strictement plus de n racines, alors P est le polynôme nul.

5 Trinômes du second degré

Dans toute cette section, on considère $P = aX^2 + bX + c$ un trinôme du second degré, avec a, b, c réels ($a \neq 0$).

5.1 Factorisation des trinômes du second degré et résolution des systèmes du second degré

Menons le calcul suivant, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left[\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x}_{\rightsquigarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\underbrace{x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].
\end{aligned}$$

Posons alors

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

ce qui nous amène à considérer 3 possibilités :

1. si $\Delta < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$ax^2 + bx + c = a \underbrace{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}_{>0},$$
2. si $\Delta = 0$, on a alors
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$
3. si $\Delta > 0$, on alors
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right). \end{aligned}$$

Ce qui nous conduit au théorème suivant :

Théorème 5.1 (*factorisation des trinômes du second degré*)

Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme. On a les cas suivants :

1. *Si $a = 0$, $P = bX + c$ est un polynôme de degré inférieur à 1. Si $b \neq 0$, son unique racine est $-\frac{c}{b}$, si $b = 0$, c'est le polynôme constant c.*
2. *Si $a \neq 0$, posons $\Delta = b^2 - 4ac$.*
   (a) *si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racine,*
   (b) *si $\Delta = 0$, P a une racine double, $-\frac{b}{2a}$, et se met sous la forme factorisée*
   $$P = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2,$$
   (c) *si $\Delta > 0$, P a deux racines, $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, et se factorise sous la forme*
   $$P = a\left(X + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(X + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Exercice 3.1.
Résoudre l'équation $x^5 - 5x^3 + 6 = x^4 - 5x^2 + 6$.

5.2 Signe d'un trinôme du second degré, résolution d'inéquations du second degré

La forme factorisée d'un polynôme permet de facilement discuter de son signe : soit à nouveau $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. On a vu que l'on pouvait distinguer trois cas :

1. si $\Delta < 0$, P ne peut pas se factoriser, et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] > 0,$$

   ainsi $P(x)$ est du signe de a.

$\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

2. si $\Delta = 0$, P admet une racine double $\alpha = -\frac{b}{2a}$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - \alpha)^2,$$

   et donc

$\Delta = 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

3. si $\Delta > 0$, P admet deux racines distinctes $\alpha_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\alpha_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Supposant que $\alpha_1 < \alpha_2$ ($a > 0$, l'inverse si $a < 0$), on alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)$$

   et donc

$\Delta > 0$

x	$-\infty$		α_1		α_2		$+\infty$
$(x-\alpha_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-\alpha_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Exercice 3.2.
La forme factorisée d'un polynôme permet, entre autre, de faire une étude quasi-complète de celui-ci : prenons par exemple $P = X^3 - X^2 - X + 1$.

1. Factoriser P et en déduire son signe,
2. Dériver P et factoriser P', en déduire les variations de P,
3. Dériver P' et factoriser P'', en déduire la convexité de P,
4. Tracer le graphe de P.

5.3 Fonction carré

Définition 5.1

On appelle la fonction carrée la fonction f qui à tout réel x associe x^2.

Propriétés 5.2

La fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 2x$. Elle est paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

5.4 Fonction cube

Définition 5.2

On appelle la fonction cube la fonction f qui à tout réel x associe x^3.

Propriétés 5.3

La fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 3x^2$. Elle est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5.5 Fonctions $x \mapsto x^n$

Propriétés 5.4

Pour tout entier n, on a

- $x \mapsto x^n$ *est paire si n l'est, impaire sinon,*
- *sa dérivée est* $x \mapsto nx^{n-1}$,
- $x \mapsto x^n$ *est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si n impair, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ si n est pair.*

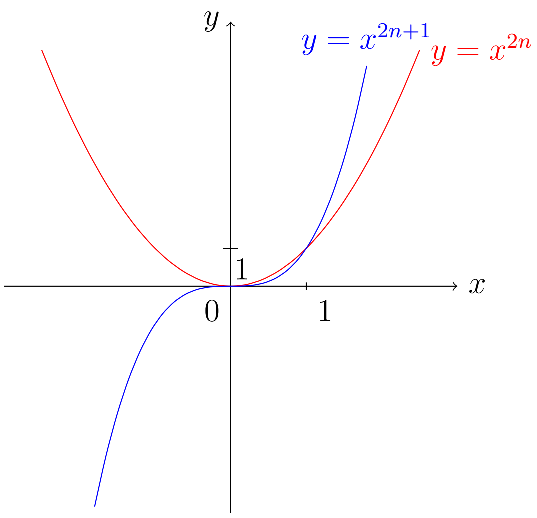


Figure 3.8 – Graphe des polynômes puissances

Chapitre 4

Récurrence, somme et produits

1 Le principe de récurrence

1.1 Énoncé

Théorème 1.1 (*démonstration par récurrence*)

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si
- $P(0)$ *(est vrai),*
- $\forall n \in \mathbb{N} \left(P(n) \implies P(n+1)\right)$ *(est vrai),*

alors $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ *(est vrai).*

Exercice 4.1 (pour les curieux).
Comment démontrer ce résultat ? De quelle propriété de $\mathbb{N}$ a-t-on besoin ? (indice : comment montrer ce résultat par l'absurde ?)

1.2 Exemple de démonstration

Rédaction-type

Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{P(n)}.$$

- **Initialisation :** Montrons $P(0)$:
  Démonstration...
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel tel que $P(n)$.
  Montrons $P(n+1)$:
  Démonstration...
- **Conclusion :** D'après le principe de récurrence, on a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n).$$

Exemple

Montrons par récurrence que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \underbrace{(1+x)^n \geqslant 1+nx}_{P(n)} \cdot$$

- **Initialisation :** Montrons $P(0)$:

$$(1+x)^0 = 1 \geqslant 1 + 0x.$$

- **Hérédité :** Soit n un entier naturel tel que $P(n)$.
Montrons $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geqslant (1+x)(1+nx) \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &\geqslant 1+nx+x+nx^2 \\ &\geqslant 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

- **Conclusion :** D'après le principe de récurrence, on a donc montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

Remarque. On peut aussi, à la place de « Soit n un entier naturel tel que $P(n)$. », écrire « Soit n un entier naturel quelconque fixé, et supposons $P(n)$. ». Les deux rédactions sont possibles, et signifient évidemment la même chose... À vous de choisir celle que vous préférez !

Exercice 4.2.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

1.3 Variantes

Récurrence qui part à $N \in \mathbb{N}$

Proposition 1.2

Soit P une propriété définie sur les entiers plus grands qu'un certain nombre N. Si

— $P(N)$,

— $\forall n \geqslant N, \big(P(n) \implies P(n+1)\big)$,

alors $\forall n \geqslant N P(n)$.

Exercice 4.3.
Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur à 2 est strictement supérieur au nombre d'origine.

Récurrence double

Proposition 1.3

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si

— $P(0)$ *et* $P(1)$,

— $\forall n \in \mathbb{N}\ (P(n) \text{ et } P(n+1)) \implies P(n+2)$,

alors $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$.

Exercice 4.4.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, \\ u_1 &= 3, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} &= 4u_{n+1} - 3u_n. \end{aligned}$$

Montrer par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{u_n = 3^n}_{P(n)}$.

Récurrence forte (Hors Programme)

Proposition 1.4

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si

— $P(0)$,

— $\forall n \in \mathbb{N}\ (\forall k \in \mathbb{N}, k \leqslant n \implies P(k)) \implies P(n+1)$,

alors $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$.

Exercice 4.5.
Une tablette de chocolat possède des rainures qui la décomposent en n carrés. On veut séparer les carrés de la tablette, et pour ce faire, on la casse selon une rainure, et on recommence avec les 2 tablettes ainsi formées. Montrer que, quelque soit l'ordre dans lequel on casse les rainures, on finira toujours en exactement $n-1$ coups.

Exercice 4.6 (Pour les plus curieux...).
Montrer par récurrence le théorème suivant : Tout entier naturel est divisible par au moins un nombre premier.

2 Sommation

2.1 Notation

Définition 2.1 (*sommes*)

Soit n un entier, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels. On note la quantité

$$a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

On pourra aussi noter cette quantité $\sum_{k \in [\![1,n]\!]} a_k$ ou encore $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k$, et toute autre variation sur le même modèle.

Par convention, ceci dit, une somme $\sum_{k=p}^{n} a_k$ avec $p > n$ sera considérée nulle.

Remarque. Dans ces notations, la lettre k (la variable, ou l'indice, de sommation) est une lettre *muette* (ou non liée), que l'on peut remplacer par n'importe quelle autre lettre. C'est évidemment une très mauvaise pratique d'utiliser un symbole déjà utilisé auparavant pour désigner la variable de sommation.

Il est possible de généraliser cette notation de la manière suivante : Si I est un ensemble fini quelconque, et $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de réels indexés par I, on écrit

$$\sum_{i \in I} a_i$$

pour désigner la somme de tous les éléments de cette famille. Cette définition n'est possible que grâce à la commutativité et l'associativité de l'addition.

2.2 Sommes classiques

Proposition 2.1

Soit n un entier non nul quelconque, et x un réel différent de 1.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$, *b)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, *d)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \cdot$ *si* $x \neq 1$

Remarque. On obtient des nouvelles factorisations, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + \ldots + x^{n-1}).$$

On vérifiera que cette formule est encore valable pour $x = 1$.

On en déduit (démontrez-le !) que si x et y sont deux réels, on a aussi

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Exercice 4.7 (Pour aller plus loin...).
En considérant un arrangement intelligent de “carrés” d'aire 1, retrouver la formule pour $\sum_{k=0}^{n} k$. Saurez-vous trouver un arrangement similaire pour $\sum_{k=0}^{n} k^3$?

Exercice 4.8 (factorisation des polynômes cyclotomiques).
On appelle, pour $N \in \mathbb{N}$, $P_N = X^N - 1$ le N^{e} polynôme cyclotomique.

1. Déterminer, pour N pair et N impair, les racines de P_N.
2. Établir la factorisation suivante des polynômes cyclotomiques :

$$X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^{2k}\right),$$
$$X^{2n+1} - 1 = (X-1)\left(\sum_{k=0}^{2n} X^{k}\right).$$

3. Montrer que cette factorisation est maximale, c'est-à dire que les polynômes

$$\sum_{k=0}^{n-1} X^{2k} \text{ et } \sum_{k=0}^{2n} X^{k}$$

n'ont pas de racine.

2.3 Formules de calcul élémentaires

Remarque. Dans tout ce qui suit, les formules sont énoncées pour des sommes entre 0 et n. Elles se généralisent aisément à toutes sommes finies, bien sûr.

Propriété 2.2

Soit n un entier non nul, $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ deux familles de réels. Alors

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Soit λ un réel, alors $\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Soit enfin m un entier, $0 \leqslant m < n$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Propriété 2.3 (*changement d'indice*)

Soient p et n deux entiers relatifs non nul, $p \leqslant n$, m un entier relatif quelconque, et $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une famille de réels. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} a_{k+m} = \sum_{i=p+m}^{n+m} a_i, \text{ et } \sum_{k=p}^{n} a_{m-k} = \sum_{i=m-n}^{m-p} a_i.$$

On dit qu'on a effectué le changement d'indice $i = k + m$ (resp. $i = m - k$).

Exercice 4.9.
Soit n un entier naturel, calculer (d'un maximum de façons différentes) les quantités suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k \ (x \in \mathbb{R})$, b) $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} 1 \ (a < b)$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2$ (et retrouver par la même occasion la formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$).

2.4 Sommes doubles

Définition 2.2 (*sommes doubles*)

Soient m et n deux entiers, et $(a_{i,j})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant m}}$ une famille de mn réels. Le produit de tous les nombres de cette famille est noté $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j}$.

Propriété 2.4

Soient m et n deux entiers, et $(a_{i,j})_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant m}}$ une famille de mn réels. On a alors

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j} = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j}.$$

Propriété 2.5 (*somme double à indices dépendants*)

On peut généraliser intuitivement les notations à

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}, \qquad \sum_{0\leqslant i< j\leqslant n} a_{i,j}.$$

On a alors

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{i,j},$$
$$\sum_{0\leqslant i< j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} a_{i,j}.$$

Exercice 4.10.
Montrer que, pour tout entier n et toute famille $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$,

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} {x_i}^2 + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j.$$

2.5 Produits, factorielles

Définition 2.3 (*produits*)

Soit n un entier, et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels. On note la quantité

$$a_0 \times a_1 \times \dots \times a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Toutes les variantes et généralisations de notation de la somme s'appliquent au produit.

Propriété 2.6

Soit n un entier non nul, $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux familles de réels. Alors

$$\prod_{k=1}^{n} (\lambda a_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Soit λ un réel, alors

$$\prod_{k=1}^{n} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\prod_{k=1}^{n} b_k \right).$$

Soit m un entier, $0 \leqslant m < n$, alors

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{m} a_k \right) \left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k \right).$$

Si, enfin, aucun des b_i n'est nul, pour $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} b_k}.$$

Définition 2.4 (*factorielle*)

Pour tout entier naturel n, on définit

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \prod_{k=1}^{n} k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4.11.
Calculer le produit des n premiers entier pairs (non nuls !), et en déduire le produit des n premiers entiers impairs.

Propriété 2.7 (*permutations*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble des permutations *sur n éléments, noté $\mathfrak{S}_n$,* *comme l'ensemble des bijections de* $[\![1, n]\!]$ *sur lui-même.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, il y a* $n!$ *permutations de* $[\![1, n]\!]$ *sur lui-même.*

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n) = n!$$

Exercice 4.12.
Combien y-a-t-il d'anagrammes (qu'ils signifient quelque chose ou non) du mot « VILGENIS » ?

2.6 Combinaisons

Définition 2.5 (*combinaisons*)

Pour $p \in \mathbb{N}$*, on appelle* combinaison *de* p *éléments d'un ensemble* E *toute partie à* p *éléments de* E*.*

Propriété 2.8

Le nombre de combinaisons de p *éléments d'un ensemble à* n *éléments vaut, si* $0 \leqslant p \leqslant n$ *:*

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots (n-p+1)}{p!}.$$

Remarque. $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments, ou encore le nombre de façon de choisir p éléments parmis n. On dit « p parmi n ».

Exercice 4.13.
Lors d'une réunion de n personnes, combien de poignées de mains seront-elles échangées ? On pourra calculer ce nombre de deux façons différentes, et retrouver la formule d'une somme bien connue...

Théorème 2.9 (*relation de Pascal*)

Pour tous entiers $0 < p < n$*,*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Définition 2.6 (*triangle de Pascal*)

Les combinaisons $\binom{n}{p}$ *sont souvent présentées dans le* tableau de Pascal *:*

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$							$\ddots$

Théorème 2.10 (*formule du binôme*)

Pour tout entier n, pour tous réels x, y,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Exercice 4.14.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, et retrouver ce résultat en calculant de deux façons le cardinal de $\mathscr{P}(E)$.

Deuxième partie

Suites

Chapitre 5

Introduction aux suites

1 Généralités sur les suites

1.1 Définitions

Définition 1.1 (*suites*)

On appelle suite réelle *toute application u d'une partie A* [*] *de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:*

$$u: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

En pratique, on note l'application u par $(u_n)_{n\in A}$, u, ou (quand A est implicite), (u_n).

Pour n entier, u_n est le terme d'indice n de la suite u. u_n est aussi appelé terme général *de la suite.*

Exemples.
Il existe trois manières principales de définir une suite :

— *explicitement* en donnant une formule pour son terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \frac{1-n}{1+n}.$$

— *par récurrence*, en donnant ses premiers termes et une relation de récurrence entre ses termes de différents indices :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2v_n. \end{cases}$$

— *implicitement* comme la solution d'une équation dépendant d'un paramètre entier :

La suite w est telle que, pour tout entier n, w_n est l'unique réel positif solution de l'équation $x^n + \ln(x) = 0$.

Dans ce cas, l'existence d'une telle solution est évidemment à établir en amont, et fait bien souvent l'objet d'une question préliminaire.

*. En pratique $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$, parfois $\{n \in \mathbb{N}, n \geqslant p\}$, $p \in \mathbb{N}$.

Définition 1.2

On dit qu'une suite (u_n) vérifie la propriété P à partir d'un certain rang lorsqu'il existe un entier N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant N) \implies P(u_n).$$

Définition 1.3

- *Deux suites u et v sont égales si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = v_n$,*
- *la somme $u+v$ de deux suites u et v est la suite de terme général u_n+v_n,*
- *le produit uv de deux suites u et v est la suite de terme général u_nv_n,*
- *pour λ réel, on appelle le produit de la suite u par λ la suite λu de terme général λu_n.*

1.2 Bornes

Définition 1.4 (*suites bornées*)

Une suite (u_n) est dite :

- majorée *lorsqu'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant M$, M est alors un majorant de la suite,*
- minorée *lorsqu'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geqslant m$, m est alors un minorant de la suite,*
- bornée *si elle est majorée et minorée.*

1.3 Sens de variation

Définition 1.5 (*suites monotones*)

Une suite (u_n) est dite :

- constante *lorsqu'il existe un réel C tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = C$,*
- stationnaire *si elle est constante à partir d'un certain rang,*
- croissante *si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \geqslant u_n$,*
- décroissante *si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \leqslant u_n$,*
- monotone *si elle est croissante ou décroissante.*

(Définitions similaires pour les suites strictement croissantes, etc.)

Méthode (variations d'une suite)**.**
Pour déterminer les variations d'une suite (u_n), on peut étudier, pour tout entier n, le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (uniquement si la suite est positive).

Il est recommandé, dans ce dernier cas, de revenir à une inégalité $u_{n+1} \geqslant / \leqslant u_n$ pour ne pas se tromper.

Exercice 5.1.
Montrer qu'une suite croissante est minorée, et qu'une suite décroissante est majorée.

2 Suites usuelles

2.1 Suites arithmétiques

Définition 2.1 (*suites arithmétiques*)

Une suite u est dite arithmétique *s'il existe un réel r tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est alors appelé la raison *de la suite.*

Exemple.
Si vous recevez un salaire mensuel constant, et dépensez tous les mois la même somme, l'argent de votre compte en banque suivra une suite arithmétique. Quelle sera sa raison ?

Proposition 2.1

Soit u une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 + nr.$$

De plus, on a, pour tout entier p, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Proposition 2.2

Soit u une suite arithmétique de raison r. alors, pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Exercice 5.2.
Quelques propriétés des suites arithmétiques :

1. Montrer qu'une suite arithmétique est toujours monotone, croissante si sa raison est positive, décroissante sa raison est négative.
2. Montrer qu'une suite arithmétique est bornée ssi sa raison est nulle.

2.2 Suites géométriques

Définition 2.2 (*suites géométriques*)

Une suite u est dite géométrique *s'il existe un réel q tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n.$$

Le réel q est alors appelé la raison *de la suite.*

Exemple.
Si vous placez une certaine somme dans un compte épargne à un taux $r\%$, la somme sur ce compte suivra une suite géométrique. De quelle raison ?

Proposition 2.3

Soit u une suite géométrique de raison q. Alors, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 q^n.$$

De plus, on a, pour tout entier p,

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

Proposition 2.4

Soit u une suite géométrique de raison q. alors, pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ u_0(n+1) & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Exercice 5.3.
Quelques propriétés des suites géométriques :

1. Montrer qu'une suite géométrique de raison positive est toujours monotone, et relier sa monotonie à sa raison et son premier terme. Que peut-on dire si la raison est négative ?
2. Montrer qu'une suite géométrique est bornée si sa raison est comprise entre -1 et 1. Est-ce la seule possibilité ?
3. Montrer que le logarithme d'une suite géométrique (positive, évidemment) est une suite arithmétique. Quelle est sa raison ?
4. Existe-il des suites à la fois arithmétiques et géométriques ?

2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 2.3 (*suites arithmético-géométriques*)

Une suite u est dite arithmético-géométrique *s'il existe deux réels a et b tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b.$$

Les réels a et b sont les paramètres de la suite, le réel a est parfois appelé la raison de la suite.

Exemple.
Le contenu du compte en banque d'un rentier n'ayant aucun salaire, mais vivant des intérêts de son compte, dépensant tous les ans la même somme, suit une suite artimético-géométrique. De quels paramètres ?

Méthode (terme général d'une suite arithmétice-géométrique)**.**
Pour déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique, pour $a \neq 1$:

1. On détermine le point fixe de l'équation de récurrence, c'est-à-dire le réel c tel que
$$c = ac + b.$$
2. On montre que la suite $v = u - c$ est une suite géométrique de raison a.
3. On en déduit le terme général de la suite v :
$$v_n = (u_0 - c)a^n.$$
4. On en déduit le terme général de la suite u :
$$u_n = (u_0 - c)a^n + c.$$

Exercice 5.4.
Quelques propriétés des suites arithmético-géométriques :

1. Existe-t-il des suites arithmético-géométriques qui sont arithmétiques ? géométriques ? Dans quels cas ?
2. À quelle condition une suite arithmético-géométrique est-elle bornée ? croissante ? décroissante ?
3. Montrer que la somme des n premiers termes d'une suite géométrique forme une suite arithmético-géométrique.

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 2.4 (*suites récurrentes linéaires d'ordre* 2)

Une suite u est récurrente linéaire d'ordre 2 *s'il existe deux réels a et b tels que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Théorème 2.5 (*terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre* 2)

Pour déterminer l'expression de son terme général, on étudie son équation associée :
$$(E) : X^2 = aX + b.$$

— *Si (E) possède deux solutions réelles r_1 et r_2, il existe deux réels λ et μ tels que*
$$\forall n \in_N N \ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
— *Si (E) possède une seule solution réelle r, il existe deux réels λ et μ tels que*
$$\forall n \in_N N \ u_n = (\lambda + n\mu)r^n.$$

... Tiens... ne manque-t-il pas un cas de figure ?

Chapitre 6

Convergence des suites

1 Convergence

1.1 Définitions

Définition 1.1 (*suites convergentes*)

Soit u une suite réelle. On dit que la suite converge vers la limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque tous les termes de la suite sont aussi proches de ℓ que l'on veut à partir d'un certain rang.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \Big[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n \geqslant N) \implies (|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)\Big].$$

Ceci revient à demander que tout intervalle ouvert contenant ℓ (tout voisinage *de ℓ, nous y reviendrons), contient les termes u_n pour tous les indices n, hormis un nombre fini d'entre eux.*

On note aussi

$$u \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

On dit alors que ℓ est la limite de la suite u.

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Remarque. La seconde lecture de la définition indique bien que la limite d'une suite ne dépend d'aucun de ses premiers termes.

Proposition 1.1

Une suite convergente est bornée.

Exercice 6.1 (pour les curieux).
Prouver cette proposition. On pourra par exemple commencer par montrer qu'une suite convergente est bornée à partir d'un certain rang.

Exercice 6.2.
La réciproque de cette proposition est fausse : une suite bornée n'est pas forcément convergente. Pouvez-vous trouver une telle suite (à la fois divergente et bornée) ?

Exercice 6.3.
Montrer que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition 1.2 (*limites infinies des suites*)

Soit u une suite réelle. On dit que la suite tend vers $+\infty$ lorsque tous les termes de la suite sont aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \iff \Big[\forall A \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant N) \implies (u_n \geqslant A)\Big].$$

On dit similairement que la suite tend vers $-\infty$ lorsque tous les termes de la suite sont aussi petits que l'on veut à partir d'un certain rang.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \iff \Big[\forall A \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant N) \implies (u_n \leqslant A)\Big].$$

On a alors les mêmes notations que pour les limites finies.

Remarque. Une suite qui tend vers $\pm\infty$ n'est *pas* convergente. Elle diverge, et n'est pas bornée. Ainsi, une suite divergente peut avoir une limite, qui sera donc infinie.

Propriété 1.2

La limite d'une suite, si elle existe, est unique.

Exercice 6.4 (pour les curieux...).
Démontrer cette propriété. On pourra effectuer un raisonnement par l'absurde.

1.2 Opérations sur les limites

Propriété 1.3

Soient u et v deux suites possédant une limite (finie ou non). Alors, sauf dans les cas marqués F.I., la somme, le produit et l'inverse de ces suites ont une limite, indiquées dans les tableaux suivants :

— *Limite de la somme $u + v$:*

$\lim u$ \ $\lim v$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*
$\ell \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$+\infty$

— *Limite du produit uv :*

$\lim u$ \ $\lim v$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}_-^*$	0	$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
0	*F.I.*	0	0	0	*F.I.*
$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$+\infty$

— *Limite de l'inverse $\frac{1}{u}$:*

$\lim u$	$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	0^-	0	0^+	$+\infty$
$lim\frac{1}{f}$	0	$\frac{1}{\ell}$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	0

Remarque. Le symbole $F.I.$ signifie “forme indéterminée” : il signifie que, sous cette forme, il n’est pas possible de déterminer la limite de la suite. Il faut donc alors modifier la formule étudiée pour “lever la forme indéterminée”.

La plupart du temps, on détermine la limite d’une suite à partir de limites de suites usuelles (cf section 2), couplées aux formules précédentes. Nul besoin de montrer les limites “à la main” au moyen de la définition du 1.1.

Proposition 1.4

Si u est une suite et f une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $u \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, alors $f(u) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 1.5

Si u est une suite et ℓ un réel quelconque. Alors

$$u \underset{\infty}{\longrightarrow} l \iff |u_n - \ell| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2 Comportement asymptotique des suites usuelles

2.1 Suites arithmétiques

Proposition 2.1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- *Si $r > 0$, la suite (u_n) est croissante, et tend vers $+\infty$.*
- *Si $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante, et tend vers $-\infty$.*
- *Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante, et tend vers u_0.*

2.2 Suites géométriques

Proposition 2.2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, de premier terme positif.

- *Si $q > 1$, la suite (u_n) est croissante, et tend vers $+\infty$.*
- *Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante, et tend vers u_0.*
- *Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est décroissante, et tend vers 0.*
- *Si $q = 0$, la suite (u_n) est constante à partir du rang 1, et tend vers 0.*
- *Si $-1 < q < 0$, la suite (u_n) tend vers 0.*
- *Si $q < -1$, la suite (u_n) n’a pas de limite.*

Exercice 6.5.
Que peut-on dire si le premier terme de la suite géométrique est négatif ? Que peut-on dire de la limite d’une suite arithmético-géométrique ?

2.3 Croissances comparées

Proposition 2.3

Pour tous réels strictement positifs a, b, pour tout réel $q > 1$, on a les croissances comparées suivantes :

$$\frac{n^a}{\ln(n)^b} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad \frac{q^n}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } \frac{q^n}{\ln(n)^b} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Remarque. On en déduit évidemment que pour tout réels négatifs a, b et tout réel $1 < q$,

$$\frac{\ln(n)^b}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \frac{n^a}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \frac{\ln(n)^b}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ainsi que des limites similaires (mais avec des produits) pour $-1 < q < 1$.

3 Propriétés des limites

3.1 Limites et inégalités

Proposition 3.1

Soient deux suites u et v, telles que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant v_n$. Si u converge vers ℓ_1 et v converge vers ℓ_2, alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Corollaire 3.2

Si u est une suite qui converge vers ℓ, et qu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$, alors $\ell \leqslant M$. De même, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant M$, alors $\ell \geqslant M$.

Théorème 3.3 (*des gendarmes*)

Soient u, v et w trois suites, telles que pour tout entier n on aie $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si u et w ont la même limite ℓ, alors v converge aussi vers ℓ.

Théorème 3.4

Soient u, v deux suites, telles que pour tout entier n on aie $u_n \leqslant v_n$.

- *Si $u \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,*
- *si $v \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*

Théorème 3.5 (*limite monotone – suites*)

Toute suite u croissante admet une limite. Si u est majorée, cette limite est finie, sinon, $u \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Toute suite u décroissante admet une limite. Si u est minorée, cette limite est finie, sinon, $u \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

3.2 Suites adjacentes

Définition 3.1 (*suites adjacentes*)

Deux suites u et v sont dites adjacentes si

- *u est croissante,*
- *v décroissante,*
- *$u - v \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Théorème 3.6 (*suites adjacentes*)

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Troisième partie

Probabilités finies

Chapitre 7

Fondamentaux de statistique

1 Données et séries statistiques

Définition 1.1 (*objet d'étude statistique*)

> *Les statistiques s'intéressent aux propriétés des objets d'un ensemble, appelés* individus *(même s'ils ne s'agit pas de personnes). L'ensemble de ces individus est appelée la* population. *L'ensemble de la population est souvent noté par la lettre Ω, et un individu, par ω.*
>
> *En général, la totalité de la population n'est pas directement accessible. Ce peut être simplement car elle est trop grande, ou pour d'autres raisons. L'étude statistique se fait alors sur un* échantillon, *c'est-à-dire sur un sous-ensemble fini de la population.*
>
> *La* taille *d'un échantillon est le nombre N d'éléments qu'il contient.*

Exemple.
Le ministère des solidarités et de la santé cherche à mieux comprendre sa *population* : l'ensemble des français de plus de 18 ans. Il ne peut bien évidemment pas étudier la totalité des 51+ millions d'*individus* de celle-ci, et demande à l'INSEE de mener une enquète. Celle-ci va donc interroger un *échantillon* de 10000 français.

Définition 1.2 (*caractère et variables statistiques*)

> *Les observations faites sur chaque individu sont appelés* caractère, *ou variables statistiques X.*
>
> *Une variable statistique est ainsi une application $X : \Omega \mapsto E$, où E est appelé le* support *de la variable, et est noté $X(\Omega)$.*
>
> *Si ces observations sont des réels ($X(\Omega) \subset \mathbb{R}$), la variable est dite* numérique. *Dans le cas contraire, elle est dite* quantitative.
>
> *Dans le cas des variables numériques, on distingue de plus si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, auquel cas la variable est dite* discrète, *ou non, auquel cas elle est dite* continue.

Exemple.
Parmis les *caractères* qui intéressent le ministère et qui seront analysés dans l'étude de l'INSEE, on peut compter la taille des individus (une variable statistique quantitative et continue), leur âge (une variable quantitative discrète), et leur nom (une

variable qualitative).

Définition 1.3 (*modalités, classes*)

Les valeurs prisent par une variable statistique discrète sont appelées modalités, *souvent ordonnées dans l'ordre croissant $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.*

Dans le cas d'une variable continue, on regroupe plutôt les valeurs en classes, *des intervalles $[x_1, x_2[\,, [x_2, x_3[\,, \ldots [x_n, x_{n+1}[$. C'est aussi possible dans le cas d'une variable discrète, bien sûr.*

Exemple.
Les modalités de l'âge de l'étude réalisée sont donc $18 < 19 < \ldots < 150$ (il n'est pas nécessaire de s'assurer que toutes les modalités sont remplies).

Pour l'étude de la taille, on peut considérer les classes suivantes (en centimètres) : $[0, 150[\,, [150, 160[\,, [160, 170[\,, [170, 180[\,, [180, 190[\,, [190, +\infty[$.

Définition 1.4 (*effectifs, fréquences, série statistique*)

Le nombre d'individus d'un échantillon dont le caractère est dans une modalité ($X(\omega) = x_i$) ou une classe particulière ($X(\omega) \in [x_i, x_{i+1}[$) est appelé effectif *de celle-ci. Il est souvent désigné par la lettre n_i.*

*L'*effectif cumulé *d'une modalité ou d'une classe, en revanche, est la somme des effectifs des modalités ou classes inférieures ou égales.*

La fréquence *d'une modalité ou d'une classe est le rapport de son effectif par la taille de l'échantillon : $f_i = \dfrac{n_i}{N}$.*

Un série statistique *est la donnée des différentes modalités ou classes d'un échantillon, accompagnées de leurs effectifs (ou effectif cumulés). Elle est dite* groupée *si les données sont regroupées par classes.*

Exemple.
Nous n'avons évidemment pas la place ici de représenter les effectifs relatifs à l'âge de l'échantillon des 10000 français puisqu'il y a bien trop de modalités, mais il est possible de les représenter pour la taille (d'après les chiffres ENNS, 2006-2007 *)

classe	$[0, 150[$	$[150, 160[$	$[160, 170[$	$[170, 180[$	$[180, 190[$	$[190, +\infty[$
effectif	150	1700	3800	3280	9550	1150
frequence	1.5%	17%	38%	32.8%	9.55%	1.15%
eff. cum.	150	1850	5650	8930	9885	10000
freq. cum.	1.5%	18.5%	56.5%	89.3%	98.85%	100%
	<150	<160	<170	<180	<190	

2 Indicateurs statistiques

2.1 Paramètres de position

Définition 2.1 (*modes*)

On appelle mode *(ou* classe modale *pour les classes) toute modalité ayant le plus fort effectif (il peut y en avoir plusieurs).*

*. Les chiffres sont reconstruits à partir des fréquences cumulées

Exemple.
La classe modale pour la taille dans l'exemple précédent est ainsi $[160 - 170[$.

Définition 2.2 (*moyenne*)

On appelle moyenne *d'une série* $X \rightsquigarrow (n_i, x_i)$ *la quantité*

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i = \sum_i f_i x_i.$$

Dans le cas d'une série groupée $X \rightsquigarrow (n_i, [x_i, x_{i+1}[)$, *on utilise le milieu des classes : si* $c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$,

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_i n_i c_i = \sum_i f_i c_i.$$

Exemple.
Dans l'exemple de la taille précédent, la moyenne groupée (en prenant $c_1 = 145$ et $c_6 = 195$), on obtient $\bar{X} = 168.5$cm. C'est un peu plus que la moyenne non groupée fournie par le document, $\bar{X} = 168.05$cm.

Définition 2.3 (*quantiles*)

On appelle médiane *d'une série statistique le réel* m_e *partageant la série en deux effectifs égaux :*

— *dans le cas d'une série* discrète, *c'est la* $\frac{N+1}{2}^e$ *valeur ordonnée si la taille* N *de l'échantillon est impaire, ou la moyenne entre les* $\frac{N+1}{2}$ *et* $\frac{N+1}{2}^e$ *valeurs ordonnées si* N *est paire.*

— *dans le cas d'une série* continue, *c'est la valeur correspondant à* 50% *de fréquence cumulée.*

On appelle premier *(resp.* troisième*)* quartile *la valeur, notée* q_1 *(resp.* q_3*) correspondant à la fréquence cumulée de* 25% *(resp.* 75%*). On appelle* écart interquartile *la quantité* $Q_3 - Q_1$.

On définit de même le k^e décile *(*$1 \leqslant k \leqslant 9$*) comme la valeur correspondant à la fréquence cumulée de* $k \cdot 10\%$.

Remarque. — Le 5^e^ décile est ainsi la médiane.

— Surtout ne pas confondre moyenne et médiane !

Exemple.
Dans le cas de la taille des français, la médiane est entre 160 et 170cm. On remarque que dans le cas d'une série statistique groupée, le calcul des quantiles (médiane, quartiles et déciles) n'est pas forcément possible.

Dans ce cas, on peut émettre l'hypothèse que les données sont uniformément réparties dans la classe identifiée, et interpoler la valeur.

Dans notre cas, la fréquence cumulée avant la classe $[160, 170[$ est de 18.5%. Il manque donc 31.5% pour atteindre les 50% attendus, sur une amplitude de 38% pour la classe $[160, 170[$. Il est donc raisonnable de penser que la médiane sera atteinte à $\frac{31.5}{38}$ de l'intervalle $[160, 170[$:

$$\frac{m_e - 160}{170 - 160} = \frac{31.5}{38} \left(= \frac{50\% - 18.5\%}{56.5\% - 18.5\%} \right)$$
$$\iff m_e = 160 + 10\frac{31.5}{38} = 168.28.$$

2.2 Paramètres de dispersion

Définition 2.4 (*variance et écart-type*)

On appelle variance *(empirique) d'une série statistique la quantité*

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{N}\sum_i n_i(x_i - \bar{X})^2 = \sum_i f_i(x_i - \bar{X})^2.$$

Dans le cas d'une série statistique groupée, on prend le milieu des classes, comme pour la moyenne.

On appelle écart-type *(empirique) d'une série statistique la racine de la variance empirique :*

$$\hat{\sigma}_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Théorème 2.1 (*formule de König-Huygens*)

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{X}^2 = \overline{X^2} - \bar{X}$$

3 Représentations graphiques

3.1 Diagrammes en bâtons et histogrammes

Définition 3.1 (*histogrammes*)

Pour représenter une série statistique (n_i, x_i), il est souvent utile de dresser le diagramme en bâtons *correspondant, en plaçant au-dessus de chaque point d'abscisse x_i, un bâton de taille n_i.*

*Dans le cas d'une série groupée $(n_i, [x_i, x_{i+1}[)$, on privilégie l'*histogramme*, correspondant à tracer au-dessus de chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$ un rectangle d'*aire *n_i.*

Remarque.

- Il faut bien prendre garde à tracer des rectangles d'aire n_i et pas de hauteur n_i !
- Un diagramme en bâton pour une série statistique à valeurs entières peut souvent être vu comme un histogramme avec pour classes $[x_i, x_{i+1}[$.

Définition 3.2 (*diagramme des fréquences cumulées*)

Il est aussi possible de tracer le diagramme des fréquences cumulées*, en traçant* *le graphe de la fonction correspondant aux fréquences cumulées. Celle-ci étant en escalier, on choisit souvent de relier les points par des segments de droite.*

Exemple.
Voici ci-dessous le diagramme en barre correspondant à l'âge de la population franaise en 2021 (la "pyramide des âges"), ainsi que le diagramme des fréquences cumulées correspondant.

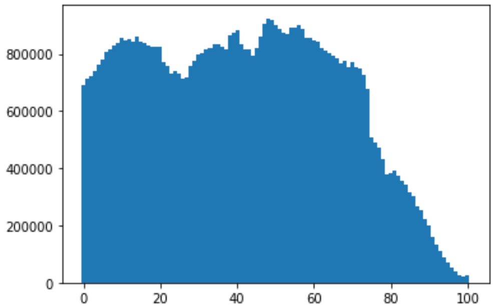


Figure 7.1 – Pyramide des âges

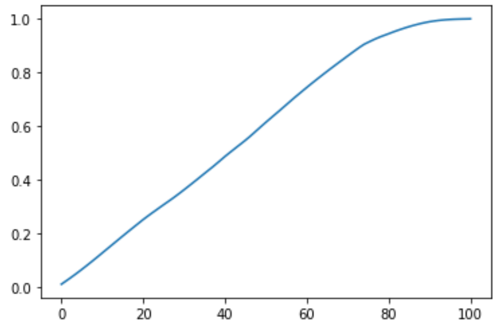


Figure 7.2 – Diagramme des fréquences cumulé

3.2 Boîtes à moustache

Définition 3.3 (*boîte à moustache*)

Pour tracer la boîte à moustache *correspondant à une série statistique, on trace un rectangle entre les deux quartiles, séparé en deux par la médiane. On ajoute à celui-ci deux "moustaches" qui s'étendent jusqu'au minimum et maximum de la série.*

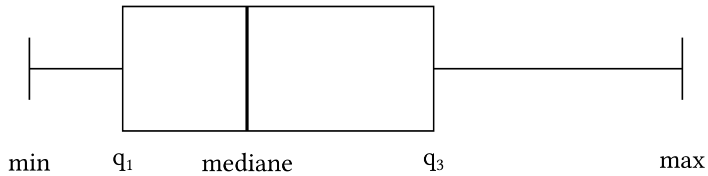


Figure 7.3 – une boîte à moustaches

Chapitre 8

Probabilités sur un univers fini

1 Les événements

1.1 Le language des événements

Définition 1.1

On appelle expérience aléatoire *une expérience dont on ne peut prédire le résultat avant de l'avoir effectuée.*

Un événement *est une affirmation sur le* résultat *d'une expérience aléatoire. À l'issue de l'expérience, si cette affirmation est vraie, on dit que l'événement (s')est réalisé.*

Définition 1.2

Un événement qui ne se réalisera jamais est appelé événement impossible*, un événement qui se réalise toujours est appelé* événement certain.

Pour un résultat précis de l'expérience, l'événement « C'est ce résultat qui est arrivé » est un événement élémentaire.

1.2 Modélisation mathématique

Définition 1.3 (*modélisation d'une expérience aléatoire*)

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire, noté Ω*, est appelé* univers *de l'expérience.*

Un résultat de l'expérience est ainsi un élément ω *de l'ensemble* Ω*. Seul l'un d'entre eux est observé à l'issue de l'expérience.*

Un événement est ainsi une partie de Ω *(l'ensemble des résultats qui réalisent cet événement),* $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

Exercice 8.1.
De bon matin, vous piochez deux chaussettes dans votre tiroir au hasard. Vos 10 paires de chaussettes (toutes différentes, bien sûr) sont hélas toutes séparées et en pagaille. Vous espérez bien sûr avoir deux chausettes appareillées...

Quel serait l'univers de cette expérience ? et l'événement « la paire de chaussettes tirée est appareillée ? ».

Faire de même en supposant que vos chaussettes sont toutes noires et compatibles entre paires, mais qu'elles sont latéralisées (une chaussette gauche ne va pas au pied droit !).

1.3 Correspondance entre le langage des ensembles et le langage des événements

- Un résultat ω réalise l'événement A ssi $\omega \in A$.
- L'événement A implique l'événement B ssi $A \subset B$.
- L'événement contraire à A est $\Omega \setminus A = \bar{A}$.
- L'événement « l'un des deux événements A ou B est réalisé » est modélisé par $A \cup B$.
- L'événement « les événements A et B sont tous deux réalisés » est modélisé par $A \cap B$.
- Si $A \cap B = \varnothing$, A et B ne peuvent arriver en même temps, ils sont *incompatibles*.

Définition 1.4 (*systèmes complets d'événements*)

La famille $A_1, \ldots, A_n$ est un système complet d'événements *si les A_k sont deux à deux incompatibles mais l'un d'entre eux est toujours réalisé. Cela revient à demander à ce qu'ils forment un partition d'Ω.*

Exemple.
Lors de l'expérience des chaussettes, les trois événements « avoir deux chausettes droites », « avoir deux chausettes gauches » et « avoir une paire de chaussette droite/gauche », forment un système complet d'événement.

2 Probabilités dans un univers fini

On suppose, pour le reste du chapitre, que Ω est fini de cardinal N.

2.1 Définition

Définition 2.1 (*probabilités sur un univers fini*)

On appelle probabilité *sur $\mathscr{P}(\Omega)$ toute application*

$$\begin{array}{rrcl} \mathbb{P}: & \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$$

qui vérifie

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. *si* $A \cap B = \varnothing$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini.

Remarque. Une expérience aléatoire (avant de savoir le résultat) est entièrement définie par la donnée d'un espace probabilisé.

Propriété 2.1

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité, on a les résultats suivants :

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
2. *Pour tout événement A,* $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. *Si* $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
4. *Pour toute famille* $(A_1, \dots A_n)$ *d'événements incompatibles* 2 à 2,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k\right).$$
5. *En particulier, si* $(A_1, \dots, A_n)$ *est un système complet d'événements,*
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k\right) = 1.$$

2.2 Exemple fondamental : l'équiprobabilité

Définition 2.2 (*équiprobabilité*)

On dit qu'on est en situation d'équiprobabilité *lorsque chaque résultat a la même chance d'être obtenu, c'est à dire que les probabilités de chaque événement élémentaire sont toutes égales :*

$$\forall(\omega, \omega') \in \Omega^2 \ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{\omega'\}).$$

On montre sans difficulté que ceci revient à dire que

$$\forall \omega \in \Omega \ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{N}.$$

Proposition 2.2 (*formule de l'équiprobabilité*)

Si l'on est en situation d'équiprobabilité, alors pour tout événement A,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

Cette formule définit bien une probabilité, qui est appellée probabilité uniforme *sur* $\mathscr{P}(\Omega)$.

Exercice 8.2.
Dans votre aventure matinale de recherche de chaussettes, quel est le cardinal de l'univers (dans les deux cas) ? En déduire la probabilité d'avoir une paire de chaussette assortie ou bien latéralisée.

2.3 Probabilités non uniformes

Proposition 2.3

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, et $(p_1, p_2, \dots, p_N) \in [0,1]^N$. Si $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$ (et uniquement dans ce cas), il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}(\omega_i) = p_i$. Cette probabilité est donnée par la formule

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i, \omega_i \in A} p_i.$$

Proposition 2.4

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, et $(p_1, p_2, \dots, p_N) \in \mathbb{R}_+^N$. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}(\omega_i) \propto p_i$. Cette probabilité est donnée par la formule

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\sum\limits_{i, \omega_i \in A} p_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i}.$$

3 Indépendance

3.1 Indépendance deux à deux

Définition 3.1 (*événements indépendants deux à deux*)

Deux événements A et B sont indépendants *(pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Définition 3.2

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. On dit qu'ils sont deux à deux indépendants *(pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque, pour tout couple $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.*

Théorème 3.1

Si deux événements A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants.

3.2 Indépendance mutuelle

Définition 3.3 (*événements mutuellement indépendants*)

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants *(pour la probabilité* $\mathbb{P}$*) lorsque, pour toute sous-partie* $\mathscr{N} \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathscr{N}} A_k\right) = \prod_{k\in\mathscr{N}} \mathbb{P}(A_k).$$

Remarque. L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux, mais pas l'inverse.

Exemple.
On lance deux dés à six faces, l'un rouge, l'autre vert. Les événements

— R : « le dé rouge donne un résultat pair »,

— V : « le dé vert donne un résultat pair »,

— S : « la somme des résultats est pair »,

sont indépendants deux à deux, mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 8.3.
Toujours pas réveillé·e mais avec des chaussettes assorties, vous descendez l'escalier pour boire votre bassine de café matinale. Hélas, les 12 marches de l'escalier sont grincantes, et vous avez une chance sur 5 de faire grincer chaque marche et de réveiller la maisonnée. Quelle est la probabilité que vous parveniez à la cuisine sans réveiller personne ?

Théorème 3.2

Si des événements A_i *sont mutuellement indépendants, il en est de même avec toute collection formée de ces événements ou de leurs complémentaires, i.e. toute collection* (B_i)*, avec* $B_i = A_i$ *ou* $\bar{A}_i$.

Théorème 3.3 (*des coalitions*)

Si des événements sont mutuellement indépendants, tout événement formé avec certains d'entre eux, est indépendant de tout événement formé à partir d'autres.

Remarque. En général, l'indépendance mutuelle n'est pas à vérifier, mais est impliquée par l'énoncé. Cependant, même dans le cas d'expériences dont les résultats sont mutuellement indépendants, tous les événements que l'on peut considérer ne sont pas mutuellement indépendants.

Par exemple, si l'on lance une pièce équilibrée un certain nombre de fois, les résultats des différents lancés sont mutuellement indépendants. En revanche, les événements « on obtient pile, puis face aux lancers n et $n+1$ » (relatifs aux paires de résultats successifs, donc) ne sont pas mutuellement indépendants (ils ne sont même pas indépendants deux à deux !).

4 Conditionnement

4.1 Probabilités conditionnelles

Définition 4.1 (*probabilités conditionnelles*)

Soient A et B deux événements, tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle « probabilité de B sachant A » *le réel*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Théorème 4.1

L'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.

Propriété 4.2

On a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A(\Omega) &= 1, \\ \mathbb{P}_A(\varnothing) &= 0, \\ \mathbb{P}_A(\bar{B}) &= 1 - \mathbb{P}_A(B), \\ \mathbb{P}_A(B \cup C) &= \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C). \end{aligned}$$

Remarque. On utilise très souvent la formule "inverse", donnant la probabilité de l'intersection en fonction de la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A).$$

Théorème 4.3

Deux événements A et B, $\mathbb{P}(A) \neq 0$, sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$: la probabilité de B ne dépend pas de A.

4.2 Formule des probabilités composées

Théorème 4.4 (*formule des probabilités composées*)

Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exercice 8.4.

Ouf ! vous êtes parvenu·e dans la cuisine sans encombre. Pendant que le café percole, vous préparez votre bol de céréales. Parmi les 5 boîtes de céréales, votre petit déjeuner préféré en utilise trois particulières, à verser dans un ordre bien précis. Si vous prenez trois boîtes, l'une après l'autre, au hasard dans le placard et remplissez votre bol ainsi (c'est le matin, il ne faut pas demander trop d'effort de réflexion... surtout que le café n'est toujours pas prêt !), quelle est la probabilité que vous puissiez profiter de votre petit déjeuner préféré ?

4.3 Formule des probabilités totales

Théorème 4.5 (*formule des probabilités totales – 2/2*)

Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements, chacun de probabilité non nulle, alors pour tout événement B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B).$$

Exercice 8.5.
Enfin, il est temps de partir. Vous prenez au hasard un des trois trousseaux de clef à la porte... après tout, ils ont tous la clef de l'appartement. Votre trousseau contient 4 clefs, alors que les deux autres en contiennent 3. Quelle est la probabilité que vous trouviez la clef de l'appartement du premier coup ?

4.4 Formule de Bayes

Théorème 4.6 (*formule de Bayes*)

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle,

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_B(A)\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Exercice 8.6.
À la pause de 10h, vous vous inquiétez soudain. Vous avez trouvé la clef de l'appartement du premier coup, ce matin. C'est rare, et plus probable si vous avez pris le trousseau d'un de vos colloc', qui contiennent moins de clefs. Quelle est la probabilité que vous ayez pris le trousseau d'un de vos colloc' ?

Quatrième partie

Limites et continuité

Chapitre 9

Limites et continuité de fonctions

1 Intervalles et voisinages

Définition 1.1 (*intervalles de* $\mathbb{R}$)

Un intervalle *de* $\mathbb{R}$ *est une partie de* $\mathbb{R}$ *de la forme :*

- $[a, b]$, $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ *(aussi appelé segment, ou intervalle fermé),*
- $]a, b]$, $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
- $[a, b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \{+\infty\} \cup \mathbb{R}$, $a < b$,
- $]a, b[$, $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}, b \in \{+\infty\} \cup \mathbb{R}$, $a < b$ *(aussi appelé intervalle ouvert).*

Remarque. Les intervalles de $\mathbb{R}$ en sont les parties *connexes*, c'est-à-dire "sans trous" :

$$I \text{ est un intervalle } \iff \forall (a, b) \in I^2 \ \forall c \in \mathbb{R} \ (a \leqslant c \leqslant b) \implies (c \in I).$$

Définition 1.2 (*voisinages*)

On apelle voisinage d'un réel x_0 *toute partie de* $\mathbb{R}$ *contenant intervalle ouvert contenant* x_0*. Un voisinage à droite (resp. à gauche) de* x_0 *est une partie de* $\mathbb{R}$ *contenant un intervalle ouvert dont la borne droite (resp. gauche) est* x_0*.*

On appelle voisinage de $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) tout intervalle de la forme* $]a, +\infty[$, $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ *(resp.* $]-\infty, b[$, $b \in \{+\infty\} \cup \mathbb{R}$*).*

Remarque. Attention ! un voisinage à droite ou à gauche d'un point ne contient pas nécessairement ce point !

Définition 1.3

On dit qu'une fonction est définie au voisinage (potentiellement à droite ou à gauche) de a *si son ensemble de définition contient un voisinage (potentiellement à droite ou à gauche) de* a*.*

Dans tout ce qui suit, on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

2 Limites

2.1 Définitions

Définition 2.1 (*limites d'une fonction*)

Soient $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, et f une fonction numérique définie au voisinage du point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que la fonction f tend vers la limite *ℓ en a lorsque, pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe un voisinage V_a du point a tel que $f(V_a) \subset V_\ell$, ou, intuitivement, si $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ, si on prend x assez proche de a. En termes formels (on adaptera dans le cas $-\infty$),*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathscr{D}_f \cap \left]a-\alpha, a+\alpha\right[, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \text{ (limite finie en un point fini)}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathscr{D}_f \cap \left]A, +\infty\right[, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \text{ (limite finie en } +\infty)$$
$$\forall E > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathscr{D}_f \cap \left]a-\alpha, a+\alpha\right[, f(x) \geqslant E \text{ (limite } +\infty \text{ en un point fini)}$$
$$\forall E > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathscr{D}_f \cap \left]A, +\infty\right[, f(x) \geqslant E \text{ (limite } +\infty \text{ en } +\infty)$$

On note alors (4 notations possibles)

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \text{ ou } f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$$

On dit alors que ℓ est la limite de la fonction f en a, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$.

On définit de même la notion de limite à gauche ou à droite, où le voisinage V_a est un voisinage à gauche ou à droite. On note alors

$$f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell,\ f \underset{a^-}{\longrightarrow} \ell,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{a^-} f = \ell. \text{ (limite à gauche)}$$
$$f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell,\ f \underset{a^+}{\longrightarrow} \ell,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{a^+} f = \ell. \text{ (limite à droite)}$$

Si la limite ℓ est finie, on dit que f converge *en a. Dans tous les autres cas, on dit que f* diverge.

Remarque. Les notations utilisant $\longrightarrow$ et lim ont une légère différence d'utilisation. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ signifie bien que f tend vers ℓ en a, l'objet $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe que si la fonction f a bien une limite en a, et ne peut être utilisé qu'*après* avoir établi que f avait une limite !

Une fonction divergeant en un point peut avoir une limite (infinie), ou pas de limite du tout.

Exercice 9.1.
Au moyen de cette définition, montrer que

1. $x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
2. $\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$,
3. $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Propriété 2.1

La limite d'une fonction en un point, si elle existe, est unique.

Exercice 9.2.
Démontrer ce résultat.

2.2 Opérations sur les limites

Propriété 2.2

Soient f et g deux fonctions possédant une limite (finie ou non) en un point a. Alors, sauf dans les cas marqués F.I., la somme, le produit et l'inverse de ces fonctions ont une limite en a, indiquées dans les tableaux suivants :

— *Limite de la somme $f+g$:*

$\lim f$ \ $\lim g$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*
$\ell \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$+\infty$

— *Limite du produit fg :*

$\lim f$ \ $\lim g$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}_-^*$	0	$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
0	*F.I.*	0	0	0	*F.I.*
$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$+\infty$

— *Limite de l'inverse $\frac{1}{f}$:*

$\lim f$	$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	0^-	0	0^+	$+\infty$
$lim \frac{1}{f}$	0	$\frac{1}{\ell}$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	0

Remarque. La notation F.I. signifie "Forme Indéterminée". Cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de limite (la plupart du temps il y en a une), mais que la simple connaissance des deux limites de f et g ne suffit pas pour déterminer la limite finale. Il faut alors continuer l'étude, souvent en réécrivant la formule.

Proposition 2.3

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a et b respectivement, si $g \underset{a}{\longrightarrow} b$ et $f \underset{b}{\longrightarrow} \ell$, alors $f \circ g \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 2.4

Si u est une suite et f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $u \underset{\infty}{\longrightarrow} a$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$, alors $f(u) \underset{\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 2.5 (*croissances comparées*)

Pour tous réels strictement positifs a, b, pour tout réel $q > 1$, on a les croissances comparées suivantes :

$$\frac{x^a}{\ln(x)^b} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } \frac{q^x}{x^a} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } \frac{q^x}{\ln(x)^b} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ceci implique, entre autres, que $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 2.6

Limites à connaître (admises pour l'instant) :

$$\frac{e^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \text{ et } \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \text{ et } \frac{\ln(x)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1.$$

2.3 Méthode pour lever les formes indéterminées

Il convient de remarquer qu'il y a en réalité deux grands types de formes indéterminées :

1. Les formes indéterminées de type $\frac{1}{0}$.
   La question est alors de connaître le signe de la fonction. Par exemple, s'il s'agit d'un polynôme au dénominateur, il est souvent pertinent de le factoriser.
2. Les formes indéterminées $+\infty - \infty$ et 0∞ (qui sont souvent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$).
   Il s'agit ici d'un "conflit" entre deux parties antagonistes. Il faut alors souvent factoriser par des termes "principaux" : la partie qui tend le plus vite vers l'infini, ou vers 0 (ce qui revient souvent à factoriser un polynôme). La formule se simplifie souvent, ou on fait apparaître une croissance comparée.

Exemples.
Levons les formes indéterminées suivantes :

1. Type $\frac{1}{0}$: $\frac{1}{1-x^2}$ en 1. On factorise le polynôme au dénominateur pour trouver son signe :
   $$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(1-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(1+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{1-x^2}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

   et donc
   $$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty,$$
   $$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} -\infty.$$

2. Type $+\infty - \infty$: $x^2 - x$ en $+\infty$: on factorise par le "plus gros morceau", x^2 :
   $$x^2 - x = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

3. Type $\frac{0}{0}$: $\frac{x^2-x}{1-x^2}$ en 1 : on factorise les deux polynômes par le facteur $(x-1)$:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x}{1-x^2} &= \frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)}\\ &= -\frac{x}{1+x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. Type $\frac{\infty}{\infty}$: $\frac{x^2+\mathrm{e}^x}{x^2+\ln(x)}$ en $+\infty$: on factorise au numérateur et dénominateur par les termes les plus “forts” :

$$\frac{x^2+\mathrm{e}^x}{x^2+\ln(x)} = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}}{1+\frac{\ln(x)}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \text{ (trois croissances comparées)}$$

5. Méthode particulière dans le cas d'une différence de deux racines : on fait apparaître au numérateur et dénominateur la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1}-\sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{\sqrt{x-1}^2-\sqrt{x}^2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = \frac{x-1-x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

2.4 Limites et inégalités

Ici, $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.7

Soient deux fonctions f et g, telles que, pour x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$. Si f tend vers ℓ_1 et g converge vers ℓ_2 en a, alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Théorème 2.8 (*des gendarmes*)

Soient f, g et h trois fonctions, telles que l'on ait au voisinage de a $f \leqslant g \leqslant h$. Si f et h ont la même limite ℓ en a, alors g tend aussi vers ℓ en a.

Théorème 2.9

Soient f, g deux fonctions, telles que l'on ait $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de x_0.

- *Si $f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $g \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$,*
- *si $g \underset{a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f \underset{a}{\longrightarrow} -\infty$.*

Théorème 2.10 (*limite monotone – fonctions*)

Toute fonction f monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$ admet une limite aux bornes de cet intervalle, et une limite finie à droite et à gauche en tout point de cet intervalle.

3 Hors-programme : Asymptotes et branches infinies

Définition 3.1 (*asymptotes verticales*)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. Si la limite (à droite ou à gauche) de f en a est infinie, alors le graphe C_f de f a une asymptote verticale *en a.*

Définition 3.2 (*asymptotes horizontales*)

Soit f une fonction définie au voisinage de $i = \pm\infty$. Si $f \underset{i}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, alors le graphe C_f de f a une asymptote horizontale *en i d'équation $y = \ell$.*

Définition 3.3 (*directions asymptotiques*)

Soit f une fonction définie au voisinage de $i = \pm\infty$, de limite infinie.

- *Si $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to i}{\longrightarrow} 0$, alors le graphe C_f de f a une* branche parabolique *en i de* direction *$(Ox$.*
- *Si $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to i}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}^*$, alors le graphe C_f de f a une* direction oblique *en i* de pente *a.*
- *Si $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to i}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors le graphe C_f de f a une* branche parabolique *en i* de direction *$(Oy$.*

Définition 3.4 (*asymptotes obliques*)

Soit f une fonction définie au voisinage de $i = \pm\infty$. Si $f(x) - (ax + b) \underset{x \to i}{\longrightarrow} 0$, alors le graphe C_f de f a une asymptote oblique *en i d'équation $y = ax + b$.*

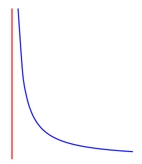


FIGURE 9.1 – Asymptote verticale

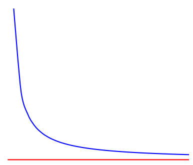


FIGURE 9.2 – Asymptote horizontale

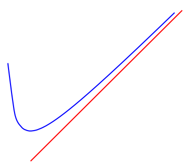


FIGURE 9.3 – Asymptote oblique

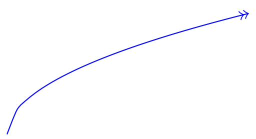


FIGURE 9.4 – Direction parabolique $(Ox$

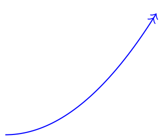


FIGURE 9.5 – Direction parabolique $(Oy$

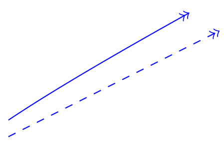


FIGURE 9.6 – Direction oblique

Remarque. Si une fonction a une asymptote oblique, elle a une direction oblique. L'inverse n'est pas vrai.

Méthode (comportement asymptotique d'une fonction)**.**
Pour étudier le comportement asymptotique (aussi appelé “branches infinies”) d'une fonction :

1) On identifie les bornes de son intervalle de définition.
2) Pour chaque borne finie, on calcule la limite à gauche et à droite de f, lorsqu'elles existent.
   — Si la limite est finie, f est prolongeable par continuité (cf section 4.2).
   — Si la limite est infinie, on a une asymptote verticale.
3) Pour chaque borne infinie, on calcule la limite de f.
   (a) Si la limite est finie, on a une asymptote horizontale.
   (b) Si la limite est infinie, on calcule la limite de $\frac{f(x)}{x}$.
      — si $\frac{f(x)}{x} \longrightarrow 0$, on a une branche parabolique de direction $(Ox$.
      — si $\frac{f(x)}{x} \longrightarrow \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction $(Oy$.
      — si $\frac{f(x)}{x} \longrightarrow a$, on calcule la limite de $f(x) - ax$.
         — si $f(x) - ax \longrightarrow b \in \mathbb{R}$, on a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.
         — si $f(x) - ax \longrightarrow \pm\infty$, la courbe a une direction oblique de pente a.

Exercice 9.3.
Étudier le comportement asymptotique des deux fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 \ln(x^2)}{x+2} \mathrm{e}^x \text{ et } g : x \mapsto \frac{\ln(x^2)}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \frac{x^2}{1+x}.$$

4 Continuité

4.1 Continuité en un point

Définition 4.1 (*continuité en un point*)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel $a \in \mathscr{D}_f$ appartenant à l'ensemble de définition de f. On dit que f est continue *en a si f admet une limite finie en a. Cette limite vaut alors obligatoirement $f(a)$.*

La fonction f est continue à droite en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, continue à gauche si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Théorème 4.1

Une fonction est continue en un point si, et seulement si, elle est continue à gauche et à droite en ce point.

4.2 Prolongement par continuité

Théorème 4.2 (*prolongement par continuité*)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a, sauf en a. *Si f admet une limite réelle ℓ en a, alors la fonction g, définie sur $\mathscr{D}_f \cup \{a\}$ par*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathscr{D}_f \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue en a.

Cette fonction est appelée prolongement par continuité de f en a.

On peut de même parler de prolongement par continuité à droite ou à gauche.

4.3 Continuité sur un intervalle

Définition 4.2 (*continuité sur un intervalle*)

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I (potentiellement seulement à droite ou à gauche aux bornes gauche et droite si elles sont inclues).

Théorème 4.3

Les fonctions polynomiales, rationnelles, valeur absolue, logarithme, exponentielle et puissances sont continues sur leurs intervalles de définition.

Remarque. La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur tout intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$. Elle est aussi continue à droite sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4.4

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, alors $f+g$ et fg sont continues sur I. Si de plus g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est aussi continue sur I.

Théorème 4.5

Si f est continue sur I, à valeurs dans J, et si g est continue sur J, alors $g \circ f$ est aussi continue sur I.

Définition 4.3

On dit qu'une fonction f est continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ telle que les restricitons de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement par continuité à $[a_i, a_{i+1}]$.

On généralise cette définition sur les intervalles infinis, en demandant qu'elle soit vraie sur tous les segments de l'intervalle.

Exemple.
La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, mais pas $x \mapsto \frac{1}{x}$ (même si on la prolonge en 0, par $f(0) = 0$ par exemple).

4.4 Théorème des Valeurs Intermédiaires

Théorème 4.6 (*des Valeurs Intermédiaires*)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 4.7 (*TVI, version équivalente*)

Si f est continue sur le segment $[a,b]$, alors, pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Corollaire 4.8

Toute fonction qui change de signe sur un intervalle s'y annule au moins une fois.

Théorème 4.9

Si une fonction f est continue sur un segment, f y est bornée et atteind ses bornes, notées $\max\limits_{[a,b]} f$ et $\min\limits_{[a,b]} f$.

Corollaire 4.10

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Théorème 4.11 (*de la bijection monotone*)

Une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I forme une bijection de I dans l'intervalle $f(I)$.

Remarque. Si f est continue et strictement monotone sur $]a,b[$, et $f \underset{a}{\longrightarrow} c$, $f \underset{b}{\longrightarrow} d$, alors, pour tout réel λ entre c et d, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution dans $]a,b[$.

Cinquième partie

Matrices

Chapitre 10

Systèmes linéaires

1 Définitions et premières études

1.1 Définition

Définition 1.1 (*systèmes linéaires*)

On appelle système linéaire *de n équations à p inconnues tout système de la forme*

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p & = b_n, \end{cases}$$

avec $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux familles de réels.

- *Les $x_1, \ldots, x_p$ sont les* inconnues *du système, les $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$* et *$(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, les* coefficients *du système.*
- *La partie gauche s'appelle le premier membre du système, celle à droite, le second membre.*
- Résoudre *le système signifie trouver l'ensemble des solutions $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant les équations du système.*
- *Deux systèmes sont dit* équivalents *s'ils ont les mêmes solutions.*

1.2 Systèmes particuliers

Définition 1.2 (*systèmes de Cramer, systèmes homogènes*)

- *Un système linéaire est dit* de Cramer *s'il admet une unique solution. Il est dit* incompatible *s'il n'en a aucune.*
- *Un système dont le second membre est nul est dit* homogène.
- *Un système est dit* carré *s'il a autant de lignes que d'inconnues.*

Remarque. Un système homogène a toujours au moins une solution : le p-uplet nul $(0, 0, \ldots, 0)$.

Définition 1.3 (*systèmes triangulaires*)

Un système est dit triangulaire *quand ses coefficients vérifient $a_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$.*

Il se présente alors sous la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ & & & & & & a_{n,n}x_n & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

Les systèmes triangulaires sont faciles à résoudre par substitution. Si les coefficients diagonaux sont tous non nuls (et qu'il y a moins de lignes que d'inconnues), il y a toujours des solutions.

Proposition 1.1

Un système triangulaire carré (qui a autant d'équations que d'inconnues) est de Cramer si, et seulement si,tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

2 Opérations sur les lignes d'un système

On note L_i la $i$ème ligne d'un système.

2.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Proposition 2.1

Les opérations suivantes peuvent être effectuées sur un système :

1. *Échange des deux lignes i et j : $L_i \leftrightarrow L_j$,*
2. *Multiplication d'une ligne par un réel non nul : $L_i \leftarrow \alpha L_i$,*
3. *Ajout d'un multiple d'une ligne à une autre : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.*

Si $\alpha \neq 0$ et $i \neq j$, le système obtenu est équivalent au premier.

Exercice 10.1.
Démontrer cette proposition. On pourra montrer que ces opérations sont réversibles.

Remarque. En utilisant les opérations élémentaires (et uniquement celles-là), on s'assure que l'on garde des systèmes équivalents : les solutions trouvées à la fin sont exactement celles du système de départ. Si l'on perd l'équivalence à un moment, on devra vérifier que les solutions trouvées sont bien solutions du premier système... ce qui est une perte de temps !

Toute résolution de système devra s'appuyer sur ces opérations. Pour s'assurer de ne pas perdre les équivalences, il est conseillé de n'effectuer qu'une seule opération à la fois, mais cela peut devenir vite fastidieux... Il est possible de modifier plusieurs lignes à la fois en utilisant la dernière règle (3), à condition d'utiliser toujours la même ligne, qui elle ne sera pas modifiée.

2.2 Résolution par méthode du pivot de Gauss

Méthode (Pivot de Gauss)**.**
Pour résoudre un système linéaire :

1. (a) On choisit une ligne avec le coefficient de x_1 non nul le plus simple (premier *pivot*), et on l'échange avec la première ligne.
$$L_1 \leftrightarrow L_i.$$
   (b) On utilise alors cette nouvelle première ligne pour éliminer l'inconnue x_1 des toutes les lignes suivantes :
$$L_j \leftarrow \alpha L_j + \lambda L_1$$
   (c) On ne touche plus à la première ligne jusqu'à la fin.
2. (a) On recommence en trouvant la ligne (autre que la première) qui a le coefficient de x_2 non nul le plus simple (second pivot), et on place cette ligne en seconde position.
   (b) On utilise cette ligne pour éliminer l'inconnue x_2 de toutes les lignes suivantes.
3. On continue jusqu'à ce qu'on obtienne un système triangulaire, que l'on sait résoudre facilement.

Exercice 10.2.
Comment montrer rigoureusement que cette méthode finit toujours par donner un système triangulaire équivalent ?

2.3 Bilan

Proposition 2.2

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire de n équations à p inconnues. Trois cas sont possibles :

- *soit $(\mathscr{S})$ n'admet aucune solution, il est dit incompatible,*
- *soit $(\mathscr{S})$ admet une unique solution, il est dit de Cramer,*
- *soit $(\mathscr{S})$ admet une infinité de solutions.*

Remarque. Un système homogène n'est jamais incompatible, et est de Cramer ssi $(0, 0, \ldots, 0)$ est son unique solution.

L'ensemble des solutions d'un tel système peut toujours s'écrire comme une somme de solutions particulières, multipliées par des coefficients quelcoonques (une combinaison linéaire, cf. chapitre 20).

Proposition 2.3

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire de n équations à n inconnues. Ce système est de Cramer ssi la méthode de Gauss fait apparaître n pivots non nuls.

Remarque. Le fait qu'un système carré soit de Cramer ou non ne dépend que des coefficients $(a_{i,j})$. En revanche, ses solutions et leur nombre (s'il n'est pas de Cramer), dépendent du second membre.

Théorème 2.4

Un système carré est de Cramer, si, et seulement si, son système homogène associé est de Cramer.

Chapitre 11

Matrices

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1 (*matrices*)

Une matrice *à n lignes et p colonnes est un tableau de réels de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Les réels $a_{i,j}$ sont appelés les coefficients *de la matrice A.*

On note aussi la même matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

Définition 1.2

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- *Si $n = 1$, A est une matrice* ligne.
- *Si $p = 1$, A est une matrice* colonne.
- *Si $n = p$, A est une matrice* carrée.

Si les $a_{i,j}$ sont tous nuls, A est la matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Définition 1.3

Deux matrices sont égales ssi leurs coefficients sont égaux.

1.2 Opérations sur les matrices

Addition et multiplication par un réel

Définition 1.4 (*somme matricielle*)

Soient A et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ deux matrices de même taille. On apelle somme de A et B la matrice $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $A+B$, dont les coefficients sont :

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p,\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Propriété 1.1

L'addition de matrices a les même propriétés que l'addition sur $\mathbb{R}$: elle est associative et commutative. La matrice nulle est l'élément neutre.

Remarque. On ne peut additionner que deux matrices de même taille !

Définition 1.5 (*multiplication scalaire*)

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ un matrice et λ un réel. On apelle produit de A par λ la matrice $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $\lambda.A$ ou λA, dont les coefficients sont :

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p\ c_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

Propriété 1.2

La multiplication par un réel est compatible avec la multiplication réelle, distributive sur l'addition matricielle, et distributive sur l'addition réelle : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (\lambda\mu)A &= \lambda(\mu A) \\ \lambda(A+B) &= \lambda A + \lambda B \\ (\lambda+\mu)A &= \lambda A + \mu A. \end{aligned}$$

Propriété 1.3

Pour toute matrice A, $0.A = A - A = 0$ (la matrice nulle).

Produit matriciel

Définition 1.6 (*produit matriciel*)

On peut définir le produit de deux matrices A et B si la seconde a le même nombre de lignes que la première, de colonnes. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on définit le produit de A par B la matrice $C \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$, notée $A \times B$ ou AB, dont les coefficients sont :

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque. Attentionà ne pas confondre le produit, ou multiplication matriciel(le) avec la multiplication par un scalaire vue précédemment. Il s'agit de deux opérations très différentes, qui n'ont en commun que leur nom de multiplication (attention, le terme "produit scalaire" désigne encore une autre opération !).

Si la multiplication d'une matrice par un réel (le "scalaire") est toujours bien défini, le produit de deux matrices ne l'est pas forcément, même si elles sont même taille. Il convient à chaque fois de bien vérifier la compatibilité des lignes et des colonnes.

Propriété 1.4

Le produit matriciel vérifie toutes les propriété du produit sur $\mathbb{R}$, sauf la commutativité :

1. *il est associatif :* $A(BC) = (AB)C = ABC$,
2. *il est distributif sur l'addition :* $(A+B)C = AC + BC$ *et* $A(B+C) = AB + AC$,
3. *il commute avec la multiplication scalaire :* $\lambda(AB) = A(\lambda B)$.

Remarque. Le produit matriciel n'est PAS commutatif ! En général, si A et B sont deux matrices quelconques, $AB \neq BA$ (elles peuvent même avoir des tailles différentes, voire l'un des produit peut être possible alors que l'autre ne l'est pas). Si on a $AB = BA$, on dit que A et B commutent (et elles sont alors nécessairement carrées, et de même taille).

Transposée d'une matrice

Définition 1.7 (*transposée*)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la matrice transposée *de A $C \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, notée ${}^tA$, la matrice dont les coefficients sont :*

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant n \; c_{i,j} = a_{j,i}.$$

Remarque. Si X, Y sont deux matrices colonnes de même taille, ${}^tXY$ est un réel (et c'est d'ailleurs ce fameux produit scalaire).

Propriété 1.5

Pour toutes matrices A et B compatibles, et tout réel λ,

$$\begin{aligned} {}^t\left({}^tA\right) &= A \\ {}^t(A+B) &= {}^tA + {}^tB \\ {}^t(\lambda A) &= \lambda {}^tA \\ {}^t(AB) &= {}^tB\,{}^tA. \end{aligned}$$

2 Matrices carrées

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1 (*matrices carrées*)

Une matrice carrée *est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes. Ce nombre est appelé l'*ordre *de la matrice.*

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Les coefficients diagonaux *d'une matrice carrée A sont les $a_{i,i}$, $i \in [\![1, n]\!]$.*

Propriété 2.1

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est stable par addition et produit matriciel, ainsi que par multiplication par un scalaire : si A et B sont carrées de même ordre n, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A + B$, λA et AB existent et sont aussi carrées d'ordre n.

Définition 2.2 (*matrices particulières*)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On dit que A est

- triangulaire inférieure *si $\forall i < j$ $a_{i,j} = 0$,*
- triangulaire supérieure *si $\forall i > j$ $a_{i,j} = 0$,*
- diagonale *si $\forall i \neq j$ $a_{i,j} = 0$,*
- scalaire *si elle est diagonale, et que tous ces coefficients diagonaux sont égaux,*
- symétrique *si ${}^tA = A$,*
- antisymétrique *si ${}^tA = -A$.*

Remarque. Attention, une matrice peut très bien être à la fois carrée et triangulaire, même si cela peut être curieux la première fois qu'on l'entend... Ces deux notions ne font pas référence au même phénomène.

Propriété 2.2

Les ensembles des matrices triangulaires supérieures, inférieures, diagonales, scalaires, symétriques, antisymétriques, sont stables par addition matricielle et multiplication scalaire. Elles sont aussi stables par produit matriciel, sauf les symétriques et antisymétriques.

Remarque. Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Si Λ est une matrice scalaire d'ordre n, avec λ la valeur de ses coefficients diagonaux, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\Lambda \times A = \lambda.A$.

Exercice 11.1.
Que dire d'une matrice à la fois symétrique et antisymétrique ?

Définition 2.3

La matrice identité *(ou unité) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, notée I_n (ou simplement I), est la matrice scalaire dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.*

Propriété 2.3

La matrice identité est neutre pour la multiplication, i.e.

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\ IA = AI = A.$$

Remarque. Les matrices scalaires d'ordre n sont de la forme λI. Ce sont les seules qui commutent à toutes les matrices (de même ordre, bien sûr).

2.2 Puissances d'une matrice carrée

Définition 2.4

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On pose par convention $A^0 = I_n$, et , si $p \in \mathbb{N}^*$, on définit par récurrence $A^p = A^{p-1}A$.

Théorème 2.4 (*formule du binôme*)

Soient A et B deux matrices qui commutent ($AB = BA$). Alors

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{k}{p} A^k B^{p-k}.$$

Remarque. Les puissances d'une même matrice commutent entre elles !

Exemple.
Calculer la puissance 7ième de

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer plus généralement sa puissance $p$ième.

3 Matrices inversibles

3.1 Résultats généraux

Définition 3.1 (*matrices inversibles*)

Un matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible *s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$AB = BA = I_n.$$

La matrice B, si elle existe, est unique, et est appelée inverse *de A, notée A^{-1}.*

Exercice 11.2.
Démontrer l'unicité de l'inverse.

Remarque. Si A est inversible, et $AB = AC$, alors $B = C$, de même si $BA = CA$... mais uniquement dans ce cas. On ne peut "simplifier à gauche et à droite" qu'avec des matrices inversibles.

Propriété 3.1

Si A et B sont deux matrices carrées inversibles, on a :

- *A^{-1} est inversible, et*
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A,$$
- *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, λA est inversible, d'inverse*
$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1},$$
- *le produit AB est inversible, et*
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$
- *pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible, et*
$$(A^p)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p,$$
cet inverse est noté A^{-p}.
- *la transposée de A est inversible, et*
$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right).$$

Théorème 3.2

Si une matrice carrée A admet une inverse à droite (resp. à gauche), i.e. une matrice B telle que $AB = I_n$ (resp $BA = I_n$), alors elle est inversible, et $A^{-1} = B$.

3.2 Représentation matricielle d'un système, calcul de l'inverse

Définition 3.2 (*représentation matricielle d'un système linéaire*)

Si $A = (a_{i,j})$, $X = \begin{pmatrix} x1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors

$$AX = Y \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p & = b_n. \end{cases}$$

La matrice A est appelée la matrice associée au système linéaire. Notez qu'on ne s'intéresse ici qu'au premier membre...

Théorème 3.3

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice, on a équivalence entre :

1. *A est inversible,*
2. *pour tout $Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le système $AX = Y$ est de Cramer,*
3. *le système $AX = 0$ admet une unique solution, la colonne nulle.*

Dans ce cas, pour tout $Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le système $AX = Y$ a une unique solution, donnée par $X = A^{-1}Y$.

Remarque. Ceci consitue ue méthode simple pour déterminer si une matrice est inversible et trouver son inverse : il suffit de résoudre le système linéaire associé avec un second membre quelconque. La solution générale (si elle est unique) donne le produit de l'inverse de la matrice avec le vecteur du second membre.

Corollaire 3.4

Si A et B deux matrices carrées telles que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles, et $A^{-1} = B$.

Exercice 11.3.
Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et en donner l'inverse le cas échéant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.3 Cas particuliers

Proposition 3.5

Une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, et son inverse est alors* $\mathrm{Diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n})$.

Proposition 3.6

Une matrice triangulaire est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Proposition 3.7 (*déterminant* 2×2)

Une matrice 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible ssi $ad - bc \neq 0$.

3.4 Polynôme annulateur

Définition 3.3 (*polynôme annulateur*)

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur *d'une matrice M si $P(M) = 0$.*

Proposition 3.8

Soit A une matrice, et P un polynôme annulateur de M tel que $P(0) \neq 0$. Alors A est inversible.

Proposition 3.9

Si $A^n = 0$ (on dit que A est nilpotente*), A ne peut pas être inversible.*

Exercice 11.4.
Démontrer ce résultat.

Exercice 11.5.
Calculer C^2 de l'exercice 11.3 et retrouver son inverse.

Chapitre 12

Graphes

1 Définition et vocabulaire

1.1 Vocabulaire

Définition 1.1 (*Graphes*)

On appelle graphe tout ensemble de sommets *reliés par des* arêtes.

Ces arêtes peuvent être orientées ou non : dans un graphe orienté*, une arête menant d'un sommet a à un sommet b sera distincte d'une arête menant du sommet b au sommet a.*

Un graphe où tout sommet est relié à tous les autres est dit complet*.*

Les arêtes d'un graphe peuvent aussi comporter un poids *(un réel positif). On dit alors que le graphe est* pondéré*.*

Une arête reliant un sommet à lui-même est appelée une boucle*.*

Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents*. Un sommet qui n'est relié à aucun autre est dit* isolé*.*

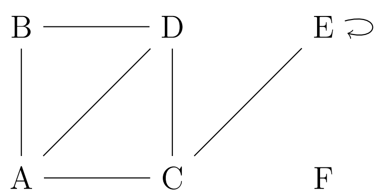


Figure 12.1 – un graphe non orienté

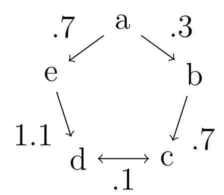


Figure 12.2 – orienté et pondéré

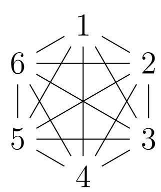


Figure 12.3 – un graphe complet

1.2 Ordre, degré et formule d'Euler

Définition 1.2 (*ordre et degré d'un graphe*)

L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets qu'il contient.

Le degré *d'un sommet est le nombre d'arêtes connectées à ce sommet.*

Remarque. Une boucle compte donc pour 2 dans le calcul du degré d'un sommet.

Théorème 1.1 (*Formule d'Euler*)

Soit $\mathscr{G}$ est un graphe d'ordre n, comprenant p arêtes et $S_1, \dots S_n$ ses n sommets. Notons σ_i le degré du sommet S_i. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_i = 2p.$$

1.3 Chemins et graphes eulériens

Définition 1.3

On appelle chemin *(ou* chaîne*) dans un graphe, toute suite de sommets $s_1, \dots, s_n$, tels que chaque paire consécutive de sommet est reliée par une arête (dans le bon sens si le graphe est orienté).*

Si le graphe est pondéré, le poid du chemin est la somme des poids de chaque arête le constituant.

Un chemin dont le dernier sommet est le même que le premier, est dit fermé*.*

Un chemin fermé dans lequel chaque arête est visitée une seule fois est appelé un cycle*.*

Définition 1.4 (*graphe connexe*)

Un graphe est dit connexe si n'importe quel sommet est relié à n'importe quel autre par une chaîne.

Définition 1.5 (*chaîne et graphe eulérien*)

Une chaîne eulérienne est une chaîne qui contient, une et une seule fois, toutes les arêtes d'un graphe. Si elle est fermée, c'est un cycle eulérien.

Un graphe eulérien est un graphe pour lequel il existe un cycle eulérien. S'il n'existe qu'un chemin eulérien, ont dit qu'il est semi-eulérien.

Théorème 1.2

Soit G un graphe connexe.

- *G est eulérien si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair.*
- *G est semi-eulérien si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair, sauf au plus deux.*

  Deux sommets sont reliés par une chaîne eulérienne si, et seulement si, ce seont les deux seuls sommets de degré impair du graphe.

Exercice 12.1.
L'origine du problème des graphes eulériens est attribuée au mathématicien Leonhard Euler (1707-1783), qui aurait répondu à la question suivante : est-il possible d'effectuer une promenade à Königsberg en passant exactement une fois sur chaque pont de la ville ?

Saurez-vous répondre à cette question ?

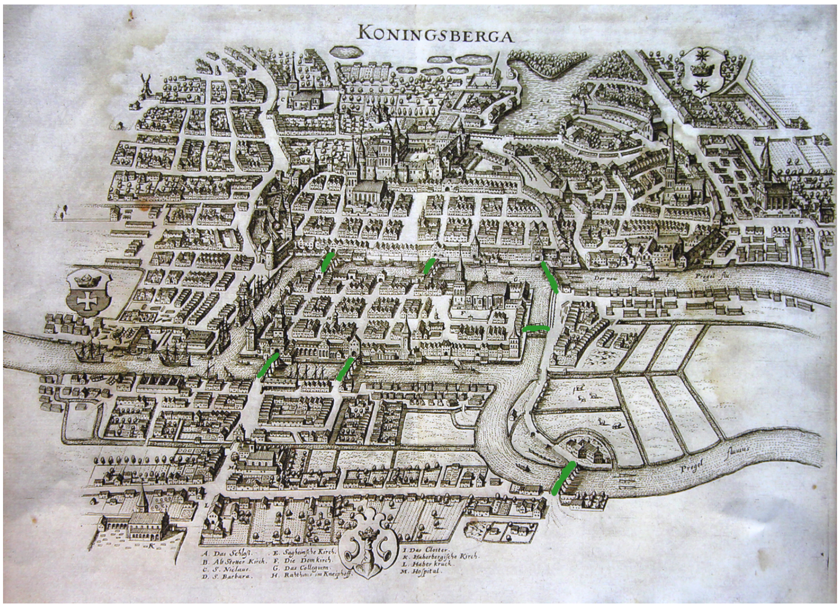


Figure 12.4 – Carte de Königsberg en 1652

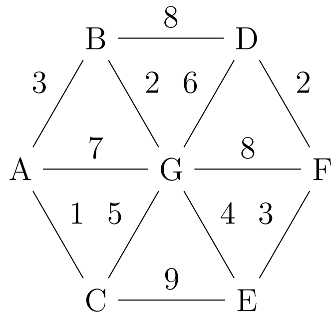
1.4 Algorithme de Dijkstra

Méthode (algorithme de Dijkstra)**.**
Pour trouver le plus court chemin reliant deux sommets s_i à s_j dans un graphe pondéré G :

1. Préparer un tableau dont les colonnes sont étiquetées par les sommets de G, plus une colonne supplémentaire (qui servira à mémoriser le parcours effectué).
2. Replir la première ligne du tableau en indiquant, sous le sommet de départ s_i, le poids 0, et un poids ∞ sous les autres. Dans la dernière colonne, indiquer que l'on est au sommet s_i, à distance 0.
3. Remplir les colonnes au fur et à mesure selon les règles suivantes :
   (a) ajouter, pour chaque sommet accessible depuis le sommet courant indiqué dans la dernière colonne, le poids de l'arête correspondante, plus la distance déjà parcourue pour atteindre le sommet courant. On y figurera aussi le sommet d'origine.
   (b) reporter les distances de la ligne précédente si elles sont inférieures.
   (c) griser la colonne du sommet courant.

(d) choisir pour sommet courant le sommet dont la distance est minimale.

Exemple.
Pour le graphe ci-dessous, la recherche du plus court chemin entre A et F peut s'effectuer ainsi :



A	B	C	D	E	F	G	
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$A(0)$
X	$3A$	$1A$	∞	∞	∞	$7A$	$C(1)$
X	$3A$	X	∞	$10C$	∞	$6C$	$B(3)$
X	X	X	$11B$	$10C$	∞	$5B$	$G(5)$
X	X	X	$11B$	$9G$	∞	X	$E(9)$
X	X	X	$11B$	X	$12E$	X	$D(11)$
X	X	X	X	X	$12E$	X	$F(12)$

On trouve finalement que F est à distance 12 de A, par le chemin A-B-G-E-F.

2 Matrices et Graphes

2.1 Matrice d'adjacence

Définition 2.1 (*longueur d'un chemin*)

On appelle longueur *d'un chemin, le nombre d'arêtes qui le composent.*

La distance *entre deux sommets est la longueur du plus court chemin les reliant. S'ils ne sont reliés par aucun chemin, leur distance est infinie.*

Le diamètre *d'un graphe est la plus longue distance (non infinie) au sein de ce graphe.*

Définition 2.2 (*matrice d'adjacence*)

La matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre n est la matrice carrée d'ordre n A pour laquelle le coefficient $a_{i,j}$ compte le nombre d'arêtes reliant (dans cet ordre) les sommets s_i et s_j.

Propriété 2.1

La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.

Théorème 2.2

Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe G, pour tout $d \in \mathbb{N}$, $M = A^d$ compte le nombre de chemins reliant les sommets du graphe. le coefficient $m_{i,j}$ compte ainsi le nombre de chemins reliant les sommets s_i à s_j (dans cet ordre si le graphe est orienté).

Théorème 2.3

Soit G un graphe orienté d'ordre n. G est connexe si, et seulement si, $I + M + \ldots + M^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.

Remarque. Dans le cas de graphes pondérés, il est possible de définir la matrice d'adjacence du graphe en faisant figurer dans la matrice les poids des différentes arêtes.

Dans ce cas, les puissances de la matrice ne comptent plus le nombre de chemins, mais la somme des poids des chemins possibles entre deux sommets.

2.2 Chaînes de Markov

Définition 2.3 (*Chaîne de Markov*)

On appelle chaîne de Markov toute expérience aléatoire où un système change aléatoirement d'états (les différents états formant un système complet d'événements $E_1, \ldots, E_n$), lors d'une sucession d'expérience, de sorte que l'état du système à l'issue de l'instant n ne dépende que de son état à l'instant $n-1$.

Définition 2.4 (*graphe probabiliste*)

Considérons une expérience de Markov, d'états $A, B, \ldots$. On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements $A_n, B_n, \ldots$ désignant « à l'instant n, le système est dans l'état $A, B, \ldots$ ».

On peut représenter cette expérience sous la forme d'un graphe orienté et pondéré, dont les sommets sont les états $A, B, \ldots$, et les arêtes entre deux états étant pondérées par la probabilité de transition entre ces états. L'arête entre l'état A et B, par exemple, sera pondérée par $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})$.

On appelle matrice de transition *de cette expérience la matrice d'adjacence (pondérée) du graphe associé.*

Théorème 2.4

Si $A, B, \ldots$ forment les états d'une chaîne de Markov, de matrice de transition K, le vecteur état

$$P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

vérifie la relation de récurrence

$$P_{n+1} = {}^t K P_n,$$

et on a donc, pour tout $n \in_N N$

$$P_n = {}^t K^n P_0.$$

3 Application aux réseaux sociaux

Il est souvent utile de représenter un réseau social par un graphe, chaque sommet étant un utilisateur, et chaque arête représentant un lien d'amitié, ou d'abonnement, par exemple. On remarquera que selon le réseau, le graphe peut être orienté ou non.

Définition 3.1 (*centralité*)

Soit G un graphe non orienté d'ordre n, de sommets $s_1, \ldots, s_n$, de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_n$.

On appelle degré de centralité *du sommet s_i la quantité* $\dfrac{d_i}{n-1}$.

Dans le cas d'un graphe orienté, la définition est similaire, mais il faut distinguer les arêtes entrantes et sortants, ce qui donne deux degrés de centralité (entrant et sortant).

Définition 3.2 (*intermédiarité*)

Soit G un graphe d'ordre n, de sommets $s_1, \ldots, s_n$. On appelle degré d'intermédiarité *du sommet s_k, le nombre de plus cours chemins entre deux sommets passant par s_k.*

Si $n_{i,j}$ désigne le nombre de plus court chemin entre les sommets s_i et s_j, et $n_{i,j}(s_k)$ le nombre de plus courts chemins entre s_i et s_j passant par s_k, le degré de centralité de s_k est ainsi

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i,j \neq k}} \frac{n_{i,j}(s_k)}{n_{i,j}}.$$

Remarque. Pour calculer le degré d'intermédiarité d'un sommet, le plus pratique est souvent de renseigner dans un tableau le rapport, pour chaque paire de sommets, entre le nombre de plus courts chemins entre ses deux sommets passant par s_k relativement au nombre total.

Sixième partie

Dérivabilité et intégration

Chapitre 13

Dérivabilité

1 Dérivabilité en un point

1.1 Définitions

Définition 1.1 (*taux d'accroissement*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On appelle taux d'accroissement *de f entre a et b le rapport $T_f(a, b) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Propriété 1.1 (*équation de corde*)

On appelle corde *du graphe d'une fonction f entre deux points a et b la droite reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Son équation est $y = T_f(a, b)(x - a) + f(a)$.*

Définition 1.2 (*dérivabilité en un point*)

Soit f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f est dérivable *en a lorsque le taux d'accroissement entre a et un point x $T_f(a, x)$ a une limite finie quand $x \to a$. Cette limite est appelée* nombre dérivé *de f en a, noté $f'(a)$.*

Remarques.

— Pour que cette limite soit finie, il faut que $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que f est continue en a. Une fonction dérivable en un point y est nécessairement continue.

— Il est souvent judicieux d'écrire le taux d'accroissement sous la forme suivante, et d'en prendre la limite en $h \to 0$:

$$T_f(a, a + h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

Exercice 13.1.
Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables en 1 : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$. Sont-elles dérivables en 0 ?

Exercice 13.2.
Montrer (enfin) les limites de la proposition 2.6 du chapitre 9.

Définition 1.3

Soit f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f est dérivable à droite (resp à gauche) *en a lorsque le taux d'accroissement de f entre a et un nombre x a une limite à gauche (resp. à droite) finie quand $x \to a$. Cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite (resp. à gauche) en a, noté $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).*

Théorème 1.2

Une fonction définie au voisinage d'un point a est dérivable en un point a ssi elle est dérivable à gauche et à droite en a, et que les dérivées coïncident.

Théorème 1.3 (*tangente à la courbe*)

1. *Si f est dérivable en a, la courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet une tangente au point $(a, f(a))$ d'équation*

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

   Le coefficient directeur de la tangente est donc $f'(a)$.
2. *Si f est simplement dérivable à droite (resp. à gauche) de a, sa courbe admet une demi-tangente, de la même équation (en remplaçant f' par f'_d ou f'_g).*
3. *Si f n'est pas dérivable en a, mais son taux d'accroissement y admet une limite infinie, la courbe de f admet une tangente verticale au point $(a, f(a))$.*

Remarque. Si f est dérivable à droite et à gauche en a, mais ces dérivées ne sont pas égales, le point $(a, f(a))$ de la courbe est dit "anguleux".

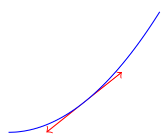


FIGURE 13.1 – tangente

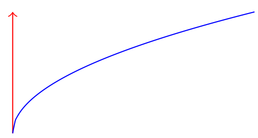


FIGURE 13.2 – tangente verticale

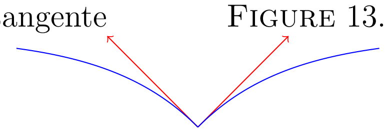


FIGURE 13.3 – point anguleux

Exercice 13.3.
Soit $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$. Est-elle dérivable en -1 ? 0 ? 1 ? Quelles y sont les tangentes de son graphe ? Reconnaissez-vous cette courbe ?

1.2 Développement limité à l'ordre 1

Théorème 1.4 (*développement limité à l'ordre* 1)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et un point $x_0 \in I$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$
$$\forall x \in I \;\; f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

On écrit souvent ce développement limité en x_0 en écrivant $x = x_0 + h$, avec h au voisinage de 0 :

$$\epsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$
$$\forall h \;\; f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\epsilon(h).$$

Remarque. Ce théorème est une extention du théorème des tangentes (on reconnaît l'équation de la tangente dans la partie droite de la formule). Ce théorème donne simplement un contrôle plus fin du terme d'erreur, qui est *négligeable*[*] devant $x - x_0$.

Théorème 1.5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et un point $x_0 \in I$. S'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ et un réel α vérifiant :

$$\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$
$$\forall x \in I \;\; f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x),$$

alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \alpha$.

2 Dérivabilité sur un intervalle

2.1 Définitions

Définition 2.1 (*fonction dérivée*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que f est dérivable *sur I si elle est dérivable en tous points de I. L'application*

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

est appelée fonction dérivée *de f.*

∗. cf. cours de seconde année.

Définition 2.2

L'ensemble des points où une fonction f est dérivable est appelé l'ensemble de dérivabilité de f.

Théorème 2.1

Les fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielles, logarithme, et puissance sont dérivables sur leurs ensembles de définition.

2.2 Dérivées usuelles et opérations

Théorème 2.2

Si u, v sont des fonctions dérivables sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u+v$, λu, uv sont dérivables sur I. Si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ le sont aussi.

On a les formules suivantes :

$u(x)$	$u'(x)$	$u(x)$	$u'(x)$	$u(x)$	$u'(x)$
a	0	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	e^x
a^x	$\ln(a)a^x$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

$(u+\lambda v)' = u' + \lambda v'$	$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$	$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

Exercice 13.4.
Étudier la dérivablilité de la fonction $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$.

2.3 Dérivation et composition

Théorème 2.3 (*dérivée d'une composée*)

Si f est dérivable sur I, à valeurs dans J, et si g est dérivable sur J, $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I \ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Théorème 2.4 (*dérivée de la réciproque*)

Soit f une fonction bijective de I sur J, et dérivable. Alors, pour tout $y \in J$, si f' ne s'annule pas en $f^{-1}(y)$, la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y, et

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Exercice 13.5.
Démontrer la formule du théorème 2.4 au moyen du théorème 2.3.

2.4 Dérivation et sens de variation

Théorème 2.5 (*variations et dérivée*)

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.*

Remarque. Ces résultats restent vrais lorsque les hypothèses sont vérifiées sauf en un nombre fini de points.

Théorème 2.6

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$. f admet un extremum local en a si, et seulement si, f' s'annule et change de signe en a.

2.5 Inégalités des accroissements finis

Théorème 2.7 (*inégalité des accroissements finis*)

Soit f une fonction dérivable sur un intervale I. S'il existe un réel k tel que

$$\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant k,$$

alors

$$\forall (a,b) \in I^2,\ |f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|.$$

Exercice 13.6.

L'accélération maximale (i.e. la dérivée de sa vitesse) qu'un corps humain (non entraîné) est capable de soutenir pendant une minute est d'environ 50m/s^2 (à condition qu'elle ne soit pas vers le haut). Quelle est la vitesse maximale qu'un individu peut donc atteindre en une minute s'il commence au repos ?

Les pilotes de chasseurs, très entraînés, peuvent subir près de 90m/s^2 d'accélération... quelle est la vitesse maximale qu'ils peuvent espérer atteindre en une minute ?

3 Dérivées successives

Définition 3.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable k fois sur I, on note $f^{(k)}$ la dérivée $k$ième de f. On a

$$\forall k \in \mathbb{N} f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'.$$

Par convention, $f^{(0)} = f$.

Définition 3.2 (*fonctions de classe C^k*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable k fois sur I, et si $f^{(k)}$ est continue sur I, on dit que f est de classe C^k sur I. On note $C^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I.

Une fonction qui est de classe C^k pour tout k est dite de classe C^∞. L'ensemble de ces fonctions est noté $C^\infty(I)$. Ce sont les fonctions infiniement dérivables sur I.

Remarque. Toute fonction de classe C^k est de classe C^h, $h \leqslant k$, et toutes ses dérivées (jusque la $k$ième) sont continues.

Théorème 3.1

Les fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielles, logarithme, et puissance sont de classe C^∞ sur leur domaine de définition.

Théorème 3.2

Sommes, combinaisons linéaires, produits, quotients (bien définis) et composées (bien définies) de fonctions de classe C^k, sont encore de classe C^k.

Théorème 3.3 (*prolongement de la dérivée - (HP)*)

Soit f une fonction continue sur I, dérivable, et de dérivée continue sur $I \setminus \{x_0\}$. Si $f'(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$), alors f est de classe C^1 sur I, et $f'(x_0) = \ell$.

Exercice 13.7.
Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Saurez-vous vous inspirer de cet exemple pour trouver une courbe infiniment lisse (càd C^∞) et nulle partout sauf sur un intervalle $]ab[$?

4 Convexité, concavité

4.1 Définitions

Définition 4.1 (*convexité*)

Soit une fonction f définie sur I. La fonction est dite convexe sur I si, pour tout segment $[a, b] \subset I$, et quelque soit $t \in [0, 1]$,

$$f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b).$$

La fonction est dite concave sur I si l'inégalité est dans l'autre sens, i.e., pour tout segment $[a, b] \subset I$, et quelque soit $t \in [0, 1]$,

$$f(ta + (1-t)b) \geqslant tf(a) + (1-t)f(b).$$

Propriété 4.1 (*interprétation graphique*)

Une fonction f est convexe si sa courbe est en-dessous de ses cordes. Elle est concave si elle est au-dessus.

Remarque. Un fonction f est convexe ssi $-f$ est concave.

Théorème 4.2 (*caractérisation pour les fonctions C^1*)

Soit f une fonction de classe C^1 sur I. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *f est convexe sur I,*
2. *f' est croissante sur I,*
3. *La courbe de f est au-dessus de ses tangentes.*

Théorème 4.3 (*caractérisation pour les fonctions C^2*)

Soit f une fonction de classe C^2 sur I. f est convexe sur I ssi $f'' \geqslant 0$ sur I.

Remarque. On a évidemment que f est concave ssi f' est décroissante, la courbe est sous ses tangentes, ou $f'' \leqslant 0$.

Proposition 4.4

On a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} &\quad \mathrm{e}^x \geqslant x+1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* &\quad \ln(x) \leqslant x-1 \end{aligned}$$

Exercice 13.8.
Montrer ces résultats.

4.2 Points d'inflexion

Définition 4.2 (*point d'inflexion*)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point a. On dit que $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe si f est concave au voisinage gauche de a et convexe au voisinage droit, ou l'inverse.

Remarque. Un point d'inflexion d'une fonction dérivable est un point où la courbe traverse sa tangente.

Théorème 4.5

Soit f une fonction de classe C^2 sur I. Les points d'inflexion de f sont exactement les points où f'' s'annule et change de signe.

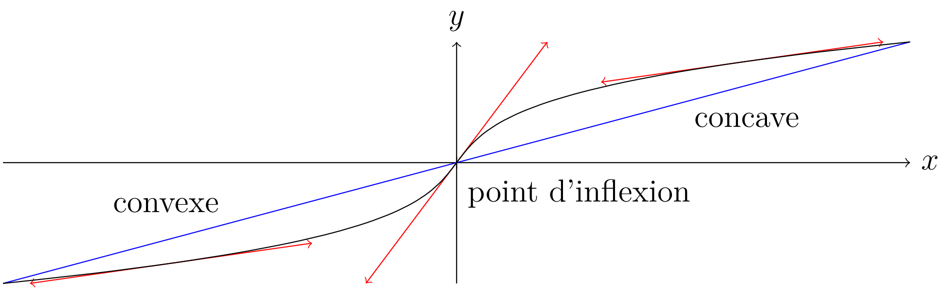


FIGURE 13.4 – point d'inflexion

Chapitre 14

Primitives et intégration sur un segment

1 Primitives

1.1 Définitions

Définition 1.1 (*primitives*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive *de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$,*

$$F'(x) = f(x).$$

Théorème 1.1

Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I.

Théorème 1.2

Si F est une primitive d'une fonction f sur I, toutes les primitives de f sur I sont données par la famille $F + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 14.1.
Démontrer le théorème précédent. On pourra étudier, si F et G sont deux primitives de la même fonction, la différence $F - G$.

Corollaire 1.3

- *Si f est une fonction continue sur I, il existe une unique primitive sur I de f prenant une certaine valeur $y_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, en un point $x_0 \in I$ quelconque.*
- *Si a et b sont deux points quelconques de I, la quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive considérée.*

1.2 Primitives usuelles

Propriété 1.4

Les primitives des fonctions usuelles sont indiquées dans les tableaux suivants :

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
a	$ax+c$	x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
e^x	e^x+c	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}+c$	$\ln(x)$	$x\ln(x)-x+c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$				

Si u et v sont des fonctions,

f	F	f	F
$\lambda u'+\mu v'$	$\lambda u+\mu v+c$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$
$u'u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+c$	$u'\mathrm{e}^u$	e^u+c

2 Intégration sur un segment

2.1 Définition

Définition 2.1 (*intégrale sur un segment*)

*Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I. On définit l'*intégrale de f entre a et b* comme la quantité*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b)-F(a).$$

Propriété 2.1

Pour toute fonction continue f,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

2.2 Fonction définie par une intégrale

Théorème 2.2

Soit f une fonction continue sur I. Ses primitives sont de classe C^1 sur I, et, pour tout $a\in I$, la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Théorème 2.3

Soient deux fonctions u et v dérivables sur I, à valeurs dans J, et f une fonction continue sur J. Alors la fonction

$$\varphi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

est bien définie, dérivable sur I, et de dérivée

$$\varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Démonstration. D'après la définition de l'intégrale, si F est une primitive de f, on a, pour tout x,

$$\varphi(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

φ est donc la somme de deux composées de fonctions de classe C^1 (F et v, et $-F$ et u). Elle est donc de classe C^1, et sa dérivée est

$$\varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

□

Remarque. Cette démonstration est tellement simple qu'il est en général conseillé de redémontrer ce théorème à chaque fois, adapté au cas courant. Cela évite des erreurs bêtes, et rend l'exposé plus lisible.

3 Propriétés de l'intégrale

Propriété 3.1 (*linéarité de l'intégrale*)

Soient deux fonctions f et g continues sur I, λ et μ deux réels, a et b deux points de I. Alors

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Propriété 3.2 (*relation de Chasles*)

Soit f une fonction continue sur I, et a, b et c trois points de I. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 14.2.
Calculer l'intégrale suivante, pour $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-a}^{a} \left| \frac{x}{1+x^2} \right| \mathrm{d}x.$$

Propriété 3.3 (*positivité de l'intégrale*)

Soit f une fonction continue et positive sur I, $a < b$ deux points de I. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

De plus, l'intégrale est nulle ssi $f = 0$.

Remarque. L'hypothèse que f est positive est bien évidemment cruciale !

Propriété 3.4 (*comparaison des intégrales*)

Soient deux fonctions f et g continues sur I, telles que $f \leqslant g$, a et b deux points de I, $a < b$. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Propriété 3.5 (*inégalité triangulaire*)

Soit f une fonction continue sur I, a et b deux points de I, $a < b$. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\max_{[a,b]} f.$$

4 Calcul d'intégrales

4.1 Intégration par partie

Théorème 4.1 (*intégration par partie*)

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

4.2 Changement de variable

Théorème 4.2 (*changement de variable*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et φ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$, telle que $\varphi([a,b]) \subset I$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque. Le théorème peut se réécrire, si φ est une bijection (ce qui sera très souvent le cas)

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Méthode (changement de variable)**.**

1. Calculons l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$$

   (a) *Changement de variable :* $(t = \varphi(x) = 2x+1)$

$$t = 2x+1 \iff x = \frac{t-1}{2}\cdot$$

   La fonction $\varphi : x \mapsto 2x+1$ est bien de classe C^1 sur $[0,1]$.

   (b) *Élément différentiel :*

$$\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x (= \varphi'(x)\mathrm{d}x) \iff \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t (= (\varphi^{-1})'(t)\mathrm{d}x).$$

   (c) *Nouvelle fonction à intégrer :*

$$\frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{\frac{t-1}{2}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right]\cdot$$

   (d) *Nouvelles bornes :*
   — si $x = 0$, $t = 1$,
   — si $x = 1$, $t = 3$.

   (e) On a donc

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{1}{2}\left[\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right]\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \cdots = \frac{1}{3}\cdot$$

2. Une autre, calculons l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{t^3}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

   au moyen du changement de variable $u = t^2$.

   (a) *Changement de variable :*

$$u = t^2 \iff t = \sqrt{u}\cdot$$

   La fonction $x \mapsto x^2$ est bien de classe C^1 sur $[1,2]$.

   (b) *Élément différentiel :*

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

(c) *Nouvelle fonction à intégrer :*

$$\frac{\sqrt{u}^3}{\sqrt{u}^2+1} = \frac{u\sqrt{u}}{u+1}.$$

(d) *Nouvelles bornes :*

— si $t = 1$, $u = 1$,

— si $t = 2$, $u = 4$.

(e) On a donc

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{t^3}{t^2+1}\mathrm{d}t &= \int_1^4 \frac{u\sqrt{u}}{u+1}\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{u}{u+1}\mathrm{d}u = \dots \\ &= \frac{1}{2}\left([u]_1^4 + [\ln(1+t)]_1^4\right) = \frac{3-\ln(5)+\ln(2)}{2}.\end{aligned}$$

Proposition 4.3

Si f est une fonction paire,

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t,$$

et si f est une fonction impaire,

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Chapitre 15

Equations différentielles

1 Généralités

1.1 Définition générale

Définition 1.1 (*équations différentielles*)

On appelle équation différentielle *toute équation dont l'inconnue est une fonction (généralement notée $y : t \mapsto y(t)$) définie sur un intervalle I, et faisant intervenir les dérivées successives de la fonction y.*

Toute fonction de classe suffisante sur I vérifiant l'équation est appelée solution *(particulière) de l'équation.*

Résoudre *une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions y définies sur I la vérifiant.*

Remarque. On ajoute souvent à une équation différentielle des critères supplémentaires, comme par exemple $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On parle de conditions initiales (ou de critère de Cauchy).

1.2 Équations différentielles linéaires

Définition 1.2

Une équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation s'écrivant

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = a_0 y + a_1 y' + \ldots = f,$$

où (a_i) est une suite de réels, et f une fonction numérique (appelé le second membre de l'équation). On prendra souvent $a_n = 1$ pour simplifier.

Si $f = 0$, l'équation est dite homogène.

Remarque. En pratique, on ne s'intéressera ici qu'aux équations différentielles d'ordre 1 ou 2.

1.3 Principe de superposition et structure des solutions

Théorème 1.1 (*principe de superposition*)

Si (E) est une équation différentielle linéaire homogène, et que y_1 et y_2 sont deux solutions de cette équation, et λ_1 et λ_2 sont deux réels, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est aussi solution de (E).

Si $E(y) = g_1$ et $E(y) = g_2$ sont deux équations différentielles linéaires différent uniquement par leur seconde membre g_1/g_2, et si y_1 est solution de $E(y) = g_1$ et y_2 est solution de $E(y) = g_2$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de $E(y) = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$.

Théorème 1.2 (*structure des solutions d'une EDL*)

Soit $E(y) = g$ une équation différentielle linéaire, et soit y_0 une solution particulière à cette équation.

L'ensemble des solutions à l'équation $E(y) = g$ est $y = h + y_0$, où h décrit n'importe quelle solution à l'équation homogène associée $E(y) = 0$.

2 Équations différentielles particulières

2.1 Équations d'ordre 1

Théorème 2.1

Les solutions à l'équation homogène $y' + ay = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{-at}$.

Remarque. Couplé au théorème 1.2, ce théorème ramène la résolution des équations d'ordre 1 à la recherche d'une solution particulière.

Propriété 2.2

Si $a, b \in \mathbb{R}^*$, la fonction constante $\frac{b}{a}$ est solution particulière de l'équation $y' + ay = b$.

2.2 Équations d'ordre 2

Théorème 2.3

Soit l'équation homogène $(E) : y'' + ay' + by = 0$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée.

— *Si l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions à l'équation (E) sont*

$$y : t \mapsto \lambda e^{-r_1 t} + \mu e^{-r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

— *Si l'équation caractéristique a une seule racine double r, les solutions à l'équation (E) sont*

$$y : t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{-rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Remarque. Tiens, ce théorème ressemble diablement à celui sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2... avec le même cas manquant. Coïncidence ?

Propriété 2.4

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ ($b \neq 0$), la fonction constante $\frac{c}{b}$ est solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = c$.

3 Trajectoires

3.1 Trajectoire et unicité de la solution

Définition 3.1

Soit (E) une équation différentielle. On appelle trajectoire *de (E) tout graphe d'une solution particulière de (E) (c'est-à-dire un ensemble $\{(t, y(t)), t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$).*

Théorème 3.1 (*corollaire restreint de Cauchy-Lipschitz*)

Soit $t_0 \in I$, y_0 et z_0 deux réels. Soit $g : t \mapsto g(t)$ une fonction continue sur I.

- *Il existe une unique solution à l'équation $y' + ay = g$ vérifiant $y(t_0) = y_0$.*
- *Il existe une unique solution à l'équation $y'' + ay' + by = g$ vérifiant $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$.*

3.2 Trajectoires d'équilibre

Définition 3.2 (*trajectoire*)

On appelle trajectoire d'équilibre *toute trajectoire d'une solution constante à une équation différentielle.*

Définition 3.3

On dit qu'une solution y à une équation différentielle sur un voisinage de $+\infty$ converge *si sa limite en $+\infty$ est finie.*

Théorème 3.2 (*convergence des trajectoires) (HP, mais utile pour vérifier ses calculs*)

Toute trajectoire convergente converge vers une trajectoire d'équilibre.

4 Systèmes d'équations différentielles

Les équations différentielles apparaissent souvent avec plusieurs fonctions inconnues, dont le comportement de chacune dépend des autres. Ces équations sont alors typiquement exprimées par un *système* d'équations, une pour chaque fonction.

Exemple.
Deux individus, Albertine et Barnabé, se cotoient souvent. On modélise l'opinion qu'ils ont l'un de l'autre au cours du temps par deux fonctions, y et z. Par exemple, si $y(0) = 3$ et $z(0) = -1$, c'est qu'Albertine apprécie beaucoup (3) Barnabé, alors que celui-ci trouve Albertine quelque peu agaçante (-1).

On suppose que l'évolution de leur opinion dépend de l'opinion de l'autre : en effet, Albertine, qui apprécie beaucoup Barnabé, sera sans doute gentille et agréable avec lui, ce qui ne peut qu'augmenter son opinion. En revanche, Barnabé se comporte sans doute comme un goujat envers Albertine, ce qui risque de lui faire réviser son opinion. On propose ainsi le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y. \end{cases}$$

Dans le cas d'équations linéaires, il peut être utile de les écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \iff Y' = AY(\text{ ou } Y - AY = 0),$$

où l'inconnue $Y = \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}$est ainsi une fonction matricielle.

Exercice 15.1.
Montrer que les deux fonctions $f = y + z$ et $g = y - z$ suivent chacune une équation différentielle très simple, et résoudre le système. Quel est l'avenir de la relation entre nos deux protagonistes ?

Remarque. Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 peut s'écrire sous la forme d'un système d'équation différentielle d'ordre 1 :

$$y'' = ay' + by \iff \begin{cases} z' = az + by \\ y' = z \end{cases} \iff Y' = AY,$$

avec $Y = \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Septième partie

Probabilités sur un univers dénombrable, variables aléatoires

Chapitre 16

Introduction aux séries

1 Définitions et convergence

1.1 Définitions

Définition 1.1 (*séries*)

Soit (u_n) *une suite réelle. On appelle* série *de terme général* u_n *la suite* (S_n) *définie par :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$*, le nième terme de cette suite,* S_n*, est appelé la nième* somme partielle *de la série.*

Cette série est notée $\sum_{k \geqslant 0} u_k$.

Définition 1.2 (*convergence des séries*)

Soit $\sum_{k \geqslant 0} u_k$ *une série. On dit que la série* converge *lorsque la suite des sommes partielles* (S_n) *converge. Dans le cas contraire, on dit que la série* diverge.

Si la série converge, on appelle ladite limite, somme de la série, notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Remarque. La suite peut n'être définie qu'à partir du rang 1, voire plus. Il convient alors de considérer $\sum_{k \geqslant 1} u_k$...

Attention à la différence de vocabulaire entre les suites et les séries : le terme général d'une série, par exemple, n'est pas la même chose que le terme général de cette série vue comme une suite (qui s'appelle la somme partielle).

Il convient aussi de bien distinguer la série $\sum_{k \geqslant 0} u_k$ (qui existe toujours) de sa somme éventuelle $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ (qui n'existe que si la série converge).

1.2 Convergence absolue

Définition 1.3 (*convergence absolue des séries*)

La série $\sum u_k$ est dite absolument convergente lorsque la série $\sum |u_k|$ est convergente.

Théorème 1.1

Une série absolument convergente est convergente.

Remarque. La réciproque est fausse.

Théorème 1.2

Si une série est absolument convergente, on ne change ni sa nature, ni sa somme, en permutant ses termes.

1.3 Série des accroissements

Définition 1.4

Si (u_n) est une suite, on appelle série de ses accroissements *de (u_n) la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k - u_{k-1}$.*

Proposition 1.3

Un suite (u_n) a la même nature de sa série des accroissements, et s'il y a convergence,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{+\infty}(u_k - u_{k-1}) + u_0.$$

Proposition 1.4

Si la série $\sum u_k$ converge, la suite (u_n) converge vers 0.

Remarque. La réciproque est fausse !

On utilise souvent la réciproque de ce résultat : si (u_n) ne converge pas vers 0, la série ne converge pas (on dit que la série est grossièrement divergente).

Exercice 16.1.
En quoi cette proposition est une conséquence du résultat sur les séries des accroissements ? On pourra considérer la suite des sommes partielles de la série...

1.4 Opérations sur les séries convergentes

Proposition 1.5

Soit λ un réel non nul. les séries $\sum u_k$ et $\sum \lambda u_k$ ont même nature, et si elles convergent, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Proposition 1.6

Si $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont deux séries convergentes, alors $\sum u_k + v_k$ l'est aussi, et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + v_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

Proposition 1.7

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives, telles que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant v_n$,

- *si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge,*
- *si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*

2 Séries usuelles

2.1 La série harmonique

Définition 2.1 (*série harmonique*)

On appelle série harmonique *la série* $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$.

Proposition 2.1

La série harmonique diverge.

2.2 La série harmonique alternée

Définition 2.2 (*série harmonique alternée*)

On appelle série harmonique alternée *la série* $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$.

Proposition 2.2

La série harmonique alternée converge, mais pas absolument.

2.3 Séries géométriques

Proposition 2.3 (*séries géométriques*)

La série $\sum q^k$ converge ssi $|q| < 1$. On a dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Proposition 2.4 (*séries géométriques dérivées*)

Les séries $\sum kq^{k-1}$ et $\sum k(k-1)q^{k-2}$ converge ssi $|q| < 1$. On a dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

2.4 Série exponentielle

Proposition 2.5 (*séries exponentielles*)

Pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ *est convergente, et* $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.

Chapitre 17

Probabilités sur un ensemble dénombrable

L'objet de ce chapitre est de généraliser le formalisme vu au chapitre 8 à des expériences dont l'univers n'est pas fini (mais tout de même dénombrable, le cas continu sera vu en seconde année). Pour ces expériences, le nombre d'événements dans $\mathscr{P}(\Omega)$ est bien plus grand que nécessaire en pratique. Il est donc de coutume d'introduire un ensemble d'événements, noté $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{T}$, appelé *tribu*, plus restreint que $\mathscr{P}(\Omega)$, contenant les événements utiles à l'étude du problème. Le seul critère demandé à ces tibus est d'être stable par les opérations courantes : intersection, réunion, et complémentaire.

Le couple $(\Omega, \mathscr{T})$, auquel il ne manque plus qu'une probabilité pour avoir une modélisation complète, est appelé un espace probabilisable. On supposera toujours avoir accès à un tel espace lors des exercices, sans chercher à expliciter la tribu.

1 Espaces probabilisés

1.1 Probabilité

Définition 1.1 (*probabilité sur un espace probabilisable*)

On appelle probabilité *définie sur l'espace probabilisable* $(\Omega, \mathscr{T})$ *toute application*

$$\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathscr{T} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$$

qui vérifie

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. *si* $I \subset \mathbb{N}$, *et* $(A_k)_{k\in I}$ *une suite d'événements deux à deux incompatibles*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in I} A_k\right) = \sum_{k\in I} \mathbb{P}(A_k).$$

On dit que $\mathbb{P}$ *est* σ*-additive.*

Le triplet $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ *est un* espace probabilisé.

Propriété 1.1

Les formules usuelles de calcul de probabilités restent valables avec cette définition : si A et B sont deux événements,

1. *Si A et B sont incompatibles,* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$,
2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
3. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
4. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
6. *si* $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

1.2 Quasi-certitude, quasi-impossibilité

Définition 1.2 (*quasi-certitude*)

*Un événement A tel que $\mathbb{P}(A) = 1$ est dit « *quasi-certain *», ou « *presque sûr *».*

*À l'inverse, un événement A tel que $\mathbb{P}(A) = 0$ est dit « *quasi-impossible *», ou « *négligeable *».*

Si P est une propriété sur Ω, et $\mathbb{P}(\{\omega, P(\omega)\}) = 1$ (resp. 0), on dit que P est vraie (resp. fausse) presque-sûrement.

Remarque. Un événement négligeable n'est pas forcément impossible, mais seulement extrèmement improbable. Par exemple, la probabilité, en lançant une fléchette, qu'elle tombe au centre exact de la cible (ou n'importe quel autre point précis), est nulle. L'événement n'est pas pour autant impossible.

1.3 Systèmes complets d'événements

Définition 1.3 (*système complet d'événements, v2*)

On appelle système complet d'événements toute famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et dont la réunion est égale à Ω.

Remarque. Il est souvent suffisant (et bien plus simple) de relâcher le critère de la réunion égale à l'univers pour demander simplement qu'elle soit quasi-certaine.

1.4 Théorèmes de la limite monotone

Corollaire 1.2 (*théorème de la limite monotone, probabilités*)

Si (A_k) est une suite d'événements,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant 0} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right),$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant 0} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

Exercice 17.1.
On lance indéfiniment une pièce de monnaie. Montrer qu'il est presque certain d'obtenir au moins une face, et qu'il est presque impossible de n'obtenir que des piles.

2 Conditionnement

Définition 2.1 (*probabilité conditionnelle*)

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle probabilité de B sachant/conditionnellement à A la quantité

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Théorème 2.1

L'application définie par $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$.

Théorème 2.2 (*formule des probabilités totales*)

Soit I une partie de $\mathbb{N}$, et $(A_k)_{k\in I}$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k\in I} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k\in I} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B).$$

Théorème 2.3 (*formule des probabilités composées*)

Soit $A_0, \dots, A_n, \dots$ une famille d'événements, tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \neq 0$ pour tout n.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \prod_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{\bigcap_{i=0}^{k-1} A_i}(A_k).$$

(comprendre bien sûr la limite des produits partiels dans cette notation !)

Théorème 2.4 (*formule de Bayes*)

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Théorème 2.5 (*formule de Bayes généralisée*)

Soit I une partie de $\mathbb{N}$, et $(A_k)_{k\in I}$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement B de probabilité non nulle,

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k\in I} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k)}.$$

3 Indépendance

3.1 Indépendance deux à deux

Définition 3.1 (*événements indépendants deux à deux*)

Deux événements A et B sont indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Définition 3.2

Soit $(A_k)_{k \in I}$ une famille d'événements. On dit qu'ils sont deux à deux indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque, pour tout couple $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.

Théorème 3.1

Si deux événements A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants.

3.2 Indépendance mutuelle

Définition 3.3 (*événements mutuellement indépendants*)

Soit $(A_k)_{k \in I}$ une famille d'événements. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque, pour tout sous-partie $\mathscr{N} \in \mathcal{P}(I)$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \mathscr{N}} A_k\right) = \prod_{k \in \mathscr{N}} \mathbb{P}(A_k).$$

Remarque. L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux, mais pas l'inverse.

Théorème 3.2

Si des événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même avec toute collection formée de ces événements ou de leurs complémentaires, i.e. tout collection (B_i), avec B_i, $B_i = A_i$ ou $\bar{A}_i$.

Théorème 3.3 (*des coalitions*)

Si des événements sont mutuellement indépendants, tout événement formé avec certains d'entre eux, est indépendant de tout événement formé à partir d'autres.

Chapitre 18

Variables aléatoires discrètes

Dans tout ce chapitre, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

1 Variables aléatoires, généralités

1.1 Définition

Définition 1.1 (*variables aléatoires*)

On appelle variable aléatoire *(v.a.) réelle toute application*

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array}$$

telle que, pour tout réel x l'ensemble

$$\{\omega, X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{T}$$

est un événement.

L'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire, $X(\Omega)$, est appelé son support.

Remarque. Dans beaucoup d'expériences aléatoires, le résultat de l'expérience peut être décrit en terme d'une seule variable aléatoire. Dans ce cas, son support joue le même rôle que l'univers de l'expérience.

Proposition 1.1

Si X est une variable aléatoire, et $x, y \in \mathbb{R}$, les ensembles

$$\begin{array}{llcll} [X \leqslant x] & = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant x\} & , & [X \geqslant x] & = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant x\}, \\ [X = x] & = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} & , & [X \neq x] & = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \neq x\}, \\ [X < x] & = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} & , & [X > x] & = \{\omega \in \Omega, X(\omega) > x\} \end{array}$$

sont des événements.

Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$,

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}$$

est un événement.

Proposition 1.2

Soient X, Y deux variables aléatoires, λ un réel. Alors

- $X+Y$, XY, λX *sont des variables aléatoires,*
- $\max(X,Y)$, *(parfois noté* $\sup(X,Y)$*),* $\min(X,Y)$, *(parfois noté* $\inf(X,Y)$*),* $|X|$ *sont des v.a..*
- *Si g est une fonction définie sur le support de X (continue si ce support contient des intervalles), $g(X)$ est une variable aléatoire.*

1.2 Fonction de répartition

Définition 1.2 (*fonction de répartition*)

Soit X une variable aléatoire, on appelle fonction de répartition *de X la fonction F_X définie pour tout réel x, par*

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leqslant x].$$

Propriété 1.3

Toute fonction de répartition est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite en tout point, et vérifie $F_X \underset{-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $F_X \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Proposition 1.4

Pour tout $a < b$, $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Définition

Définition 2.1 (*variables aléatoires discrètes*)

Une variable aléatoire est dite discrète si son support $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. Dans le premier cas, on dit que la v.a. est finie.

2.2 Loi d'une v.a. discrète

Définition 2.2 (*loi discrète*)

La loi d'une variable aléatoire X est la donnée de l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{L}: & X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \mathbb{P}(X=x) \end{array}$$

Remarque. — Déterminer la loi d'une v.a., c'est donc d'abord déterminer son support $X(\Omega)$, puis, pour tout $x \in X(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}(X=x)$.

— On prendra garde à ne pas confondre X, $[X = x]$ et $\mathbb{P}(X = x)$!

Proposition 2.1

Si X est une v.a. discrète, la famille $\{[X = x], x \in X(\Omega)\}$ est un système complet d'événements. En particulier, $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

Cette famille est appelée système complet d'événement associé à la v.a. X.

Proposition 2.2

Soit (u_n) une suite positive, telle que $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge vers 1. Alors cette suite définit une loi de probabilité, c'est-à-dire qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et une v.a. sur cet espace, tel que $X(\Omega) = \{n \in \mathbb{N}, u_n > 0\}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = u_n$.

2.3 Lien avec la fonction de répartition

Proposition 2.3

Si X est une v.a. discrète, sa fonction de répartition est donnée par la formule

$$F(x) = \sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \leqslant x}} \mathbb{P}(X = y).$$

Proposition 2.4

Si X est une v.a. discrète à valeurs entières, sa loi est donnée par la formule

$$\mathbb{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

Proposition 2.5

La loi d'une v.a. est uniquement déterminée par sa fonction de répartition, et inversement.

2.4 Transformation d'une v.a.

Théorème 2.6

Soit X une v.a. discrète, et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. L'application Y définie par $Y(\omega) = g(X(\omega))$, est aussi une v.a. discrète, que l'on note $g(X)$.

Propriété 2.7

Soit X une v.a., et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Posons $Y = g(X)$.

Alors $Y(\Omega) = \{g(x), x \in X(\Omega)\}$, et

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) = y}} \mathbb{P}(X = x).$$

2.5 Indépendance

Définition 2.3 (*indépendance de v.a.*)

On dit que deux v.a. X *et* Y *sont* indépendantes *si pour tout* $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$$\mathbb{P}\Big([X=i] \cap [Y=j]\Big) = \mathbb{P}\Big([X=i]\Big)\mathbb{P}\Big([Y=j]\Big).$$

Remarque. On a de même la notion d'indépendance mutuelle, etc.

Théorème 2.8

Si X *et* Y *sont indépendantes, pour toutes fonctions* f *et* g*,* $f(X)$ *et* $g(Y)$ *sont indépendantes.*

3 Moments d'une v.a. discrète

3.1 Espérance

Définition 3.1 (*espérance, cas d'une v.a. finie*)

Soit X *une variable aléatoire définie sur* $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$*, telle que* $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *soit fini. L'espérance de* X *est définie par*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Définition 3.2 (*espérance d'une v.a. discrète*)

Soit X *une variable aléatoire discrète, infinie, définie sur* $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$*, et telle que* $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$*. On dit que* X *admet une espérance si la série de terme général* $x_i\mathbb{P}(X = x_i)$ *est absolument convergente, auquel cas on définit*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

Propriété 3.1

Soient X, Y *deux v.a. admettant une espérance, et* λ *un réel.*

1. *Si* $X = \lambda$ *p.s.,* $\mathbb{E}(X) = \lambda$*,*
2. $\mathbb{E}(X + \lambda Y) = \mathbb{E}(X) + \lambda\mathbb{E}(Y)$*,*
3. *Si* $X \leqslant Y$ *p.s., alors* $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$*.*

Définition 3.3 (*variable aléatoire centrée*)

Un v.a. X *telle que* $\mathbb{E}(X) = 0$ *est dite centrée.*

Remarque. Si X admet une espérance, $Y = X - \mathbb{E}(X)$ admet aussi une espérance, et est centrée.

Théorème 3.2 (*théorème de transfert*)

Soit X une v.a. discrète, g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. La v.a. $g(X)$ possède une espérance ssi la série de terme général $g(x_k)\mathbb{P}(X = x_k)$ est absolument convergente, et on a alors

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x).$$

3.2 Variance

Définition 3.4 (*variance d'une v.a. discrète*)

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, admettant une espérance. On appelle variance de X la quantité, si elle existe,

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}(X))^2\Big] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x)$$

Remarque. La variance mesure la façon dont les valeurs se dispersent autour de la moyenne.

— La variance est toujours positive,

— On utilise aussi parfois l'écart-type, $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$ (et on note ainsi souvent la variance σ^2),

Propriété 3.3

Une variable aléatoire est constante p.s. ssi sa variance est nulle.

Définition 3.5 (*variable aléatoire réduite*)

Une v.a. de variance 1 est dite réduite.

Propriété 3.4 (*formule de König-Huygens*)

Soit X est une v.a. discrète. X admet une variance ssi $\mathbb{E}(X^2)$ existe, et on a alors

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Propriété 3.5

Soient a, b deux réels, et X une v.a.d. admettant une variance. Alors $aX + b$ admet une variance, et

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX + b) = a^2\, \mathbb{V}\mathrm{ar}(X).$$

Remarque. Attention, il est totalement faux de dire que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$ ou tout autre formule !

Exemple.
Si X admet une variance non nulle, la v.a. $\tilde{X} = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}}$ est une variable centrée réduite, appelée variable centrée réduite associée à X.

3.3 Moments d'ordre n

Définition 3.6

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$. On appelle moment d'ordre n de X la quantité, si elle existe,

$$\mathbb{E}\Big[X^n\Big] = \sum_{x \in X(\Omega)} x^n \mathbb{P}(X = x).$$

3.4 Moments et indépendance

Propriété 3.6

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Alors, si elles existent,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y).$$

Chapitre 19

Lois usuelles de variables aléatoires discrètes

1 Lois usuelles finies

1.1 Loi uniforme

Définition 1.1 (*loi uniforme discrète*)

On dit que la variable aléatoire X suit la loi uniforme *sur* $[\![1,n]\!]$ *si, pour tout* $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}\cdot$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

Exemples.
Cette loi est souvent trouvée lors de lancers de dés, de tirage de boules (toutes différentes), et plus généralement dans tous les cas d'équiprobabilité.

Propriété 1.1 (*propriétés des lois uniformes*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$. *Alors X admet une espérance et une variance, et*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{n^2-1}{12}\cdot$$

Exemple.
Lors d'une partie de dés, le prix d'entrée est de 4€, et le gain est égal au résultat du lancer. Le jeu est-il intéressant ?

Exercice 19.1.
On définit de même les lois uniformes sur les intervalles entiers $[\![a,b]\!]$. Quelle en est l'espérance et la variance ?

1.2 Loi de Bernoulli

Définition 1.2 (*loi de Bernoulli*)

On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli *de paramètre $p \in [0,1]$ si,*

$$X(\Omega) = \{0,1\} \text{ et } \mathbb{P}(X=1) = p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Remarque. On a bien sûr $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$.

Exemples.
Cette loi représente une expérience qui peut réussir ou non, la probabilité de succès étant p. Par exemple, lancer une pièce de monnaie et demander si elle tombe sur pile ($p = \frac{1}{2}$), ou tirer une boule d'une couleur particulière dans une urne ($p = \frac{k}{n}$).

Remarque. La loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ est aussi la loi uniforme sur $[\![0,1]\!]$.

Propriété 1.2 (*propriétés des lois de Bernoulli*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, $\mathscr{B}(p)$. Alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = p(1-p).$$

Exemple.
Au casino, une autre table propose de piocher une carte dans un jeu de 52 cartes, pour un prix d'entrée de 1€. Si vous piochez un as, le croupier vous verse 15€ (et rien dans le cas contraire). Le jeu en vaut-il la chandelle ?

1.3 Loi binomiale

Définition 1.3 (*loi binomiale*)

On dit que qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale *de paramètres $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$ si,*

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0,n]\!] \ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Théorème 1.3

Cette loi représente le nombre de succès obtenus lors d'une succession de n épreuves indépendantes, chacune ayant une probabilité p de réussir : si (X_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p,

$$\sum_{k=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p).$$

Remarque. La notation $\mathscr{B}(p)$ de la loi de Bernoulli correspond bien à $\mathscr{B}(1, p)$, la loi binomiale de paramètres $(1, p)$!

Exemples.
Le nombre de piles obtenus lors de n lancers d'une pièce suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$.

Propriété 1.4 (*propriétés des lois binomiales*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres (n, p), $\mathscr{B}(n, p)$. Alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = np(1-p).$$

Exemple.
Toujours au casino, une troisième table propose de piocher un jeton dans une urne contenant un jeton blanc et vingt jetons noirs. Si vous piochez le jeton blanc, vous repartez avec 1€, sinon, les poches vides. Le casino propose un forfait : dix tirages pour 1€, vingt pour 2€, cinquante pour 3€. On vous informe de plus que vous pouvez acheter la carte VIP pour 10€ (payé une seule fois), qui donne accès au tarif préférentiel de cent tirages pour 4€. Que faites-vous ?

Exercice 19.2.
On tire de façon répétée, avec remise, des boules d'une urne contenant a boules blanches et b boules noires. Retrouver le fait que le nombre de boules blanches tirées suit une loi binomiale de paramètres $(n, \dfrac{a}{a+b})$, et en utilisant le fait que $\sum \mathbb{P}(X = k) = 1$, retrouver la formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2 Lois usuelles discrètes infinies

2.1 Loi géométrique

Définition 2.1 (*loi géométrique*)

On dit qu'une v.a. X suit la loi géométrique *de paramètre $p \in [0, 1]$ si,*

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* \ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Théorème 2.1

Cette loi représente le temps d'attente du premier succès lors d'une succession d'épreuves indépendantes, chacune ayant une probabilité p de réussir.

Exemples.
Le temps d'attente du premier pile obtenus lors de lancers successifs d'une pièce suit une loi géométrique $\mathscr{G}(\frac{1}{2})$.

Propriété 2.2 (*propriétés des lois géométriques*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $\mathscr{G}(p)$. Alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

On a aussi la fonction de répartition associée à cette loi :

$$\mathbb{P}([X \leqslant k]) = 1 - (1-p)^k.$$

Exemple.
Vous sortez du casino avec vos gains en poche, et cherchez à rentrer en train... Hélas, la RATP est en grève, et seulement un train sur trois circule ! Les trains étant supposés passer tous les quarts d'heure, combien de temps vous préparez-vous à attendre ? Un ami propose de vous ramener en voiture, mais le trajet prendra une bonne heure de plus que le trajet en train (temps de grèves : les routes sont embouteillées). Que faites-vous ?

Il n'y a plus que 5 trains (officiellement) avant la nuit. Quelle est la probabilité que vous ne puissiez pas rentrer si vous déclinez l'offre de votre ami ?

Propriété 2.3 (*loi géométrique sans mémoire*)

La loi géométrique est une loi sans mémoire, c'est-à-dire que pour tous réels $s, t \in \mathbb{R}^+$, si $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$,

$$\mathbb{P}_{[T>s]}([T > t+s]) = \mathbb{P}([T > t]).$$

Exercice 19.3.
Montrer ce résultat.

2.2 Loi de Poisson

Définition 2.2 (*loi de Poisson*)

On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si,

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-k}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Exemples.
Il n'y a pas d'exemple classique (à votre niveau) de v.a. suivant ue loi de Poisson. Celle-ci est systématiquement donnée.

Pour la culture, cependant, cette loi fut publiée par Siméon Denis Poisson en 1837, dans son ouvrage *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, où il l'utilise pour mesurer le nombre de condamnations injustifiées dans un pays durant une certaine période.

Plus généralement, cette loi est utilisée pour compter le nombre d'occurences d'un certain événement lors d'un laps de temps donné, ces événements arrivant indépendemment les uns les autres. Typiquement, le nombre de clients qui se présentent à un guichet un jour donné est souvent modélisé par une loi de Poisson.

Propriété 2.4 (*propriétés des lois de Poisson*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, $\mathscr{P}(\lambda)$. Alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \lambda.$$

Remarque. Le paramètre λ désigne ainsi le nombre moyen d'arrivées lors de l'intervalle de temps considéré, avec l'interprétation précédente.

Exemple.
Toujours coincé à la gare, vous vous souvenez d'une étude indiquant que le nombre moyen d'arrivés à la gare en une heure était de 20 personnes. Un bus à la capacité de 55 personnes arrivant toutes les heures, majorer la probabilité que le bus soit plein en repartant ?

On donne $\frac{20^{55}}{55!} \approx 0.030$ (la réponse est fait 9.10^{-11}).

Théorème 2.5

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant deux loi de Poisson de paramètres λ et μ, alors la variable aléatoire $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Exercice 19.4.
Démontrer ce résultat.

Huitième partie

Espaces vectoriels et applications linéaires

Chapitre 20

Espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels

1.1 Généralités théoriques (HP)

Définition 1.1 (*espace vectoriel*)

On appelle espace vectoriel *(réel) toute structure* $(E, +, .)$ *où*

1. E *est un ensemble, dont les éléments sont appelés* vecteurs,
2. $+$ *est une loi interne sur* E,
   (a) *commutative :* $\forall (u, v) \in E^2,\ u + v = v + u$,
   (b) *associative :* $\forall (u, v, w) \in E^3,\ (u + v) + w = u + (v + w)$,
   (c) *possède un élément neutre,* 0 *tel que* $\forall u \in E,\ 0 + u = u + 0 = u$,
   (d) *tout élément de* E *possède un opposé :* $\forall u \in E,\ \exists v \in E,\ u + v = 0$.
3. $.$ *est une loi externe de* $\mathbb{R}$ *sur* E,
   (a) *compatible avec la multiplication réelle :* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u \in E,\ (\lambda \times \mu).u = \lambda.(\mu.u)$,
   (b) *distributive sur + (vectoriel) :* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in E^2,\ \lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$,
   (c) *distributive sur + (réel) :* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u \in E,\ (\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$,
   (d) $1 \in \mathbb{R}$ *est neutre pour . :* $\forall u \in E,\ 1.u = u$.

Les éléments de $\mathbb{R}$*, utilisées pour la loi externe, sont appelés* scalaires.

Remarque. L'opposé défini en 2d n'est autre que $(-1).u = -u$... saurez-vous le démontrer ? Et montrer qu'il est unique ?

Exemples.
La structure d'espace vectoriel (et plus généralement les autres structures algébriques) ne sont pas tant de nouveaux objets, qu'une autre façon de voir des objets déjà existants. Un espace vectoriel, ainsi, est n'importe quel ensemble dans lequel on peut additionner les éléments entre eux, et les multiplier par un réel.

Nous avons, au cours des chapitres précédents, manipulé sans le dire un très grand nombre d'espaces vectoriels :

— $(\mathbb{R}, +, \times)$ l'espace réel, évidemment,

— $(\mathbb{R}^2, +, .)$ le plan euclidien,

— $(\mathbb{R}^3, +, .)$ l'espace naturel,

— $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, .)$ l'espace des matrices de taille fixée,

— $(\mathbb{R}^n, +, .)$ vu comme l'espace des matrices colonnes,

— $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$ l'espace des fonctions numériques,

— $(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$,

— $(\mathbb{R}[X], +, .)$ l'espace des polynômes,

— $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$ l'espace des suites numériques...

Ainsi, tout ce qui sera dit dans ce chapitre, sera vrai dans tous les espaces précédents...

1.2 Combinaisons linéaires

Définition 1.2 (*combinaisons linéaires*)

Soit p un entier non nul. On appelle famille de vecteurs de E (à p éléments) tout p-uplet $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$.

On dit qu'un vecteur $u \in E$ est une combinaison linéaire *des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ s'il existe p réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tels que*

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p = u.$$

Les coefficients (λ_i) sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire.

Remarques. Les éléments d'une famille de vecteurs sont combinaisons linéaires des vecteurs de cette même famille, et le vecteur nul est c.l. de toute famille.

Par définition, l'ensemble $\mathbb{R}^3$ (par exemple) peut être vu comme l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Ceci fonctionne avec tous les espaces $\mathbb{R}^n$, et l'on verra que l'on peut trouver des structures analogues pour tout espace vectoriel...

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.3 (*sous-espace vectoriel*)

On appelle sous-espace vectoriel *(ssev) de E toute partie non vide F de E telle que*

1. *$\forall (x, y) \in F^2 \; x + y \in F$ (F est stable par addition),*
2. *$\forall x \in F \; \forall \lambda \in \mathbb{R} \; \lambda.x \in F$ (F est stable par multiplication scalaire).*

Théorème 1.1

Une partie F de E est un ssev ssi elle est non nulle, et stable par combinaisons linéaires.

Propriété 1.2

Tout sous-espace vectoriel, est lui-même un espace vectoriel, et continent 0.

Propriété 1.3

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels, est un sous-espace vectoriel.

Théorème 1.4 (*sous-espace engendré, famille génératrice*)

Soit $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de cette famille est un sous-espace vectoriel, appelé le sous-espace vectoriel engendré *par cette famille. Il est noté $F = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$.*

La famille $\mathscr{F}$ est alors appelée famille génératrice *de F.*

Tout espace vectoriel est l'espace engendré par une certaine famille de vecteurs (loin d'être unique !).

Remarque. L'ensemble des solutions d'un système linéaire est ainsi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, où n est le nombre d'inconnues.

Propriété 1.5

Soit $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ des réels non nuls, u un vecteur.

1. $\text{Vect}(\alpha_1 e_1, \ldots, \alpha_p e_p) = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$,
2. $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p, u) = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ *ssi* $u \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

Propriété 1.6

Les opérations suivantes transforment une famille génératrice, en une autre famille génératrice :

1. *Échanger l'ordre des éléments,*
2. *Enlever un élément nul, ou qui revient deux fois,*
3. *Enlever un élément qui est combinaison linéaire des autres,*
4. *Multiplier un élément par un scalaire non nul,*
5. *Ajouter à un élément une combinaison linéaire des autres.*

1.4 Familles libres, liées, bases

Définition 1.4 (*familles libres, familles liées*)

Une famille de vecteurs $(e_1, \ldots, e_p)$ est dite libre *si la seule combinaison linéaire donnant le vecteur nul est la combinaison triviale :*

$$\forall (\lambda_i)_i \in \mathbb{R}^p,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \iff \forall i \in [\![1, p]\!]\ \lambda_i = 0.$$

À l'inverse, une famille qui ne vérifie pas cette équivalence est dite liée.

Remarque. Une famille de plus de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est forcément liée.

Définition 1.5 (*base d'un (sous-)espace vectoriel*)

Une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ est une base d'un (sous-)espace vectoriel E *si c'est une famille libre, et génératrice de E, c'est-à-dire si pour tout vecteur u de E, il existe une unique collection de coefficients λ_i tels que*

$$u = \sum \lambda_i e_i.$$

Les λ_i sont les coefficients *de u dans cette base.*

Proposition 1.7 (*dimension*)

Toutes les bases d'un (sous-)espace vectoriel ont toujours le même nombre de vecteurs (si ce nombre est fini), appelé la dimension *de cet espace.*

Remarques. Soient n, m des entiers.

— $(\mathbb{R}^n, +, .)$ est un espace vectoriel de dimension n. La famille

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

en forme une base, appelée la *base canonique.*

— $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel de dimension nm. On définit de même sa base canonique.

— $(\mathbb{R}[X], +, .)$ est de dimension infinie, mais $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ est de dimension $n + 1$. La famille

$$1, X, \dots, X^n$$

en forme une base, appelée la *base canonique.*

Propriété 1.8

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

— *Une famille libre de n vecteurs de E forme une base de E,*

— *Une famille génératrice de n vecteurs de E forme une base de E.*

Définition 1.6

Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille de vecteurs, on appelle rang *de cette famille la dimension de l'espace vectoriel engendré :*

$$\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_n) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)).$$

Remarque. Le rang d'une famille de n vecteurs sera toujours inférieure à n, et égale à n ssi les vecteurs sont libres.

1.5 Représentations d'un sous-espace vectoriel

Un sous-espace vectoriel peut être décrit sous trois formes différentes :

— Une représentation par un système d'équations, par exemple :

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \right\}.$$

— Un représentation paramétrique, par exemple :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

— Une famille génératrice (idéalement une base), par exemple :

$$C = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right).$$

Il est important de pouvoir passer d'une représentation à une autre. Illustrons la méthode avec les exemples précédents :

1. **Passage d'un système d'équation à une représentation paramétrique.**

   Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Notons $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
u \in A &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in A \\
&\iff x+y+z=0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \exists \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \left\{ \begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 & \\ & & y & & & = & a & \\ & & & & z & = & & b \end{array} \right. \qquad \text{(résolution du système)} \\
&\iff \exists \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \left\{ \begin{array}{cccccc} x & & & = & -a & -b \\ & y & & = & a & \\ & & z & = & & b \end{array} \right. \\
&\iff \exists \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. **Passage d'une représentation paramétrique à une famille génératrice.**
   Soit $u \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in B &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 u = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \end{pmatrix} \\ &\iff \exists \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Ainsi

$$B = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

   Remarque. Il n'y a aucune garantie que la famille génératrice obtenue soit libre. Il faut donc étudier la liberté, et, si elle ne l'est pas, la rendre libre. Si la représentation paramétrique provient de la résolution d'un système (comme au point précédent), la famille sera toujours libre (même s'il faut le vérifier).

   Remonter à un système d'équation (comme illustré plus bas) avant de "redescendre" à une famille génératrice peut ainsi être une bonne stratégie.

3. **Passage d'une famille génératrice à une représentation paramétrique.**
   Soit $u \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in C &\iff u \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 u = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 u = \begin{pmatrix} a + b/2 \\ -b \\ b/2 - a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Ainsi

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a + b/2 \\ -b \\ b/2 - a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

   Remarque. La représentation paramétrique n'a en réalité guère d'intérêt, hormi servir de transition entre famille génératrice et système d'équation. Le point le plus technique est le suivant, où l'on cherche à "remonter" au système d'équation.

4. **Passage d'une représentation paramétrique à un système d'équation.**

   Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Notons $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
u \in B &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = a - b \\ y = b - c \\ z = -a + c \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = a - b \\ y = b - c \\ x + z = -b + c \end{cases} \qquad \text{(résolution du système } \textit{relativement à } a,b,c) \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = a - b \\ y = b - c \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff x + y + z = 0
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}.$$

Exercice 20.1.
On remarque finalement que $A = B$. Saurez-vous montrer que C est aussi le même espace ?

2 Applications linéaires

Dans tout ce qui suit, E et F sont deux espaces vectoriels.

2.1 Définition

Définition 2.1 (*applications linéaires*)

Une application $f : E \to F$ est dite linéaire *si*

$$\forall x, y \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Propriété 2.1

Si f est une application linéaire, l'image du vecteur nul, est le vecteur nul, et l'image d'une c.l. est la combinaison linéaire des images :

1. $f(0) = 0$,
2. $f(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i f(x_i)$.

Propriété 2.2

Une application linéaire f est uniquement déterminée par l'image d'une base de son ensemble de départ :

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si u est un vecteur de E, u s'écrit

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,$$

et donc

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i).$$

Propriété 2.3

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application

$$\begin{array}{rccc} f_M : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & X & \longmapsto & MX \end{array}$$

est une application linéaire.

Inversement, pour toute application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, il existe une matrice M telle que $f = f_M$. Cette matrice est appelée matrice de f dans la base canonique, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ (avec $\mathscr{B}$ la base canonique, évidemment). Les colonnes de cette matrice sont les images de la base canonique.

Propriété 2.4 (*structure des applications linéaires*)

L'ensemble des applications linéaires de E dans F, muni de l'addition usuelle est application et la multiplication scalaire réelle, forme un espace vectoriel.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.

Théorème 2.5

Soient $f \in \mathscr{L}(E, F), g \in \mathscr{L}(F, G)$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f$ est une application linéaire, et sa matrice dans la base canonique est le produit des matrices de f et g :

$$Mat(f \circ g) = Mat(f)Mat(g).$$

2.2 Noyau d'une application linéaire

Définition 2.2 (*noyau*)

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle noyau *de f,*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0\}.$$

On définit de même le noyau d'une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ comme le noyau de l'application linéaire associée $X \mapsto MX$.

$$\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathbb{R}^p, MX = 0\}.$$

Propriété 2.6

Ker(f) *est un sous-ev de* E*.*

Proposition 2.7

Une application linéaire est injective ssi son noyau est $\{0\}$*.*

Remarque. Le noyau d'une matrice peut être vu comme l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé $MX = 0$. Ainsi, une application linéaire ne peut être injective si la dimension de l'ensemble de départ est supérieure à celle de l'ensemble d'arrivée (le système homogène ayant alors plus d'inconnues que de lignes).

2.3 Image d'une application linéaire

Définition 2.3 (*image*)

Soit f *une application linéaire de* E *dans* F*. On appelle (ensemble) image de* f*,*

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in E\}.$$

On définit de même l'image d'une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *comme l'image de l'application linéaire associée* $X \mapsto MX$*.*

$$\mathrm{Im}(M) = \{MX, X \in \mathbb{R}^p\}.$$

Propriété 2.8

Im(f) *est un sous-espace vetoriel de* F*. C'est l'ensemble vectoriel engendré par l'image d'une base quelconque de* E*.*

En particulier, l'image d'une matrice est l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes.

Proposition 2.9

Une application linéaire est surjective ssi son image est F*.*

Remarque. Une application linéaire ne peut donc pas être surjective si la dimension de l'espace de départ est inférieure à celle de l'espace d'arrivée.

2.4 Rang

Définition 2.4

On appelle rang d'une application linéaire f *la dimension de son ensemble image :*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

On définit de même le rang d'une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *comme le rang de l'application linéaire associée* $X \mapsto MX$*.*

Propriété 2.10

Le rang d'une matrice est ainsi le rang de ses vecteurs colonnes.

Théorème 2.11

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, *alors*

$$\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E).$$

Si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

$$\dim(\ker(M)) + \mathrm{rg}(M) = p.$$

Propriété 2.12 (*admis*)

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$.

2.5 Applications linéaires bijectives

Définition 2.5 (*isomorphismes*)

Soit $f : E \to F$ *une application linéaire.*

1. *Si* f *est bijective, on dit que* f *est un isomorphisme.*
2. *Si* $E = F$, *on dit que* f *est un endomorphisme de* E.
3. *Un endomorphisme bijectif est un automorphisme.*

Propriété 2.13

Soit f *une application linéaire de* E *dans* F. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. f *est un isomorphisme,*
2. *son noyau est* $\{0\}$, *et son image* F,
3. *l'image d'une base de* E *par* f, *est une base de* F,
4. $\dim(E) = \dim(F)$ *et* $\ker(f) = \{0\}$ *ou* $\mathrm{Im}(f) = F$ *(l'un des deux suffit pour avoir l'autre).*

Remarque. En particulier, deux espaces vectoriels ne peuvent être isomorphes (càd qu'il existe une bijection entre les deux) que s'ils sont de même dimension... et c'est une condition suffisante.

(Bonus : saurez-vous trouver une bijection entre deux ev quelconques de même dimension ? Par exemple entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$?)

Neuvième partie

Informatique

Chapitre 21

Introduction à Python

Python

Python est un langage de programmation sous licence libre. Il peut ainsi être utilisé comme un logiciel de calcul, avec toutes les fonctionnalités d'une calculatrice, mais permet aussi d'aller plus loin dans la programmation et l'algorithmique.

Il est disponible gratuitement à l'adresse `http://www.python.org`, ou en version “pré-packagée” pour une utilisation plus scientifique, via l'environnement anaconda, disponible ici `https://www.anaconda.com/`

S'il est possible de programmer directement via l'interface de python, il est utile de passer par un IDE (Integrated Development Environment), qui regroupe plusieurs outils aidant à la programmation et facilite la communication entre le programmeur et python. De mombreux IDE sont disponibles pour python, parmi lesquels pyzo, que l'on peut trouver ici `https://pyzo.org/`.

1 L'interface de base

1.1 Ouverture d'une session python

Pour démarrer une session python, il suffit de lancer l'application, par exemple en double-cliquant sur son icône sur le bureau. Vous êtes alors accueillis par plusieurs fenêtres (parfois une seule...). Celle qui nous intéresse est la *console*, qui affiche, entre autre, un symbole, `>>>` (ou `In[#]:`, selon les versions). Ce symbole indique que python attend que vous entriez une commande.

1.2 La console

La console (ou *shell*) est la fenêtre de communication entre python et l'utilisateur. C'est ici que vous entrerez les diverses commandes, et que python affichera les réponses aux calculs demandés. Elle s'utilise comme une calculatrice scientifique : il faut taper tous les opérateurs, et bien parenthéser la formule. Une fois la formule correctement entrée, reste à appuyer sur la touche “entrée” et le résultat s'affiche. Par exemple :

```
>>> 1+1
2
```

Il est possible de rentrer plusieurs commandes en une seule ligne, en séparant celles-ci par le symbole `;`.

1.3 Variables et types

Définition 1.1 (*variables*)

Python permet de stocker, manipuler et récupérer des valeurs. Ces valeurs sont stockées dans des variables*, désignées par un* nom*, et qui possèdent un* contenu *(qui renfermera ainsi la valeur souhaitée). Le nom d'une variable peut être n'importe quelle chaîne de lettres et de chiffres, mais doit toujours commencer par une lettre.*

Syntaxe 1.1 (*assignation de variables*)

Pour créer et/ou donner une certaine valeur à une variable, on utilise l'opérateur `=` *:*

```
>>>nom = contenu
```

La commande `a=9`, par exemple, permet à python de créer une variable de nom `a` (si elle n'existe pas déjà), et de stocker dans celle-ci la valeur 9.

Définition 1.2 (*types*)

Python est un language typé, c'est-à-dire que le contenu de chaque variable correspond à un certain type*. Il faudra prendre garde à ne pas mélanger les différents types.*

Voici une liste des types que nous utiliserons cette année :

- `int` *(*integer*) : un entier,*
- `float` *(*floating point number*) : un réel (nombre décimal,*
- `str` *(*string*) : une chaîne de caractère (en général entourées de* `'...'` *ou de* `"..."`*),*
- `bool` *(*boolean*) : un* booléen *(vrai ou faux),*
- `list` *: une liste,*
- `array` *: un tableau.*

Remarque. Il est parfois utile de vider la mémoire de l'ordinateur. Pour ce faire, on utilise la commande `reset`. La commande `clear`, quant à elle, permet de vider la console.

1.4 Opérations usuelles

Syntaxe 1.2 (*opérateurs de calcul*)

Python connaît bien évidemment les opérations de calcul classiques sur les *entiers (*`int`*) et les réels (*`float`*) :*

addition	*soustraction*	*multiplication*	*division*	*puissance*
`a+b`	`a-b`	`a*b`	`a/b`	`a**b`

Remarque. Ne pas oublier le `*` pour les multiplications ! même si on ne l'écrit pas forcément sur papier.

Exercice 21.1.
Écrire une ligne de code (et une seule !) permettant de calculer la moyenne harmonique de deux nombres a, b, valant $h(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$, pour $a = 1, b = 1$, puis $a = 3$ et $b = 6$. On n'aura besoin de ne changer que 2 symboles entre les deux calculs.

Bonus : montrer que cette "moyenne" mérite son nom, à savoir que $h(a,a) = a$ et que $h(a,b) \in [a,b]$.

Syntaxe 1.3 (*tests logiques*)

Python utilise les commandes suivantes, qui renvoient un booléen *(vrai ou faux)*

`a==b`	*(égalité de contenu)*	`a!=b`	*(différence de contenu)*
`a<b`	*(inférieur strict)*	`a>b`	*(supérieur strict)*
`a<=b`	*(inférieur ou égal)*	`a>=b`	*(supérieur ou égal)*

Il est aussi possible d'effectuer les opérations suivantes sur les booléens :

— `...and...` *pour savoir si les deux booléens sont vrais,*

— `...or...` *pour savoir si l'un des deux booléens est vrai (voire les deux),*

— `not...` *pour savoir si le booléen est faux.*

Exercice 21.2.
Utiliser python pour vérifier, pour deux valeurs particulières de a et b, que leur moyenne géométrique est bien comprise entre les deux : $a \leqslant h(a,b) \leqslant b$ ou $b \leqslant h(a,b) \leqslant a$.

2 L'éditeur : fonctions et scripts

2.1 L'éditeur

Il est souvent utile de lancer plusieurs instructions d'un bloc dans python. Ceci peux être fait à partir d'un *programme informatique*, via un éditeur de texte. La plupart des installations de python fournissent un éditeur intégré, mais n'importe quel logiciel fait l'affaire (à condition de savoir dire à python d'exécuter le fichier après !).

Le fichier contenant les différentes instructions pourra ainsi être enregistré sur la machine (ou une clef usb) dans un fichier `.py`, et partagé avec d'autres personnes, machines, etc.

Attention, les instructions écrites dans un tel fichier ne sont pas connues par python. Pour demander à l'ordinateur de faire les calculs demandés, il faut *exécuter* le script.

Quelques remarques :

— revenez souvent à la ligne entre les instructions, plutôt que d'utiliser des virgules,

— nommez vos fichiers en rapport avec leur contenu (et pas `code1`, `code2`, etc.),

— n'hésitez pas à commenter votre code au moyen de la commande `#`,

— d'une manière générale, rendez votre code **lisible**, par vous et par autrui.

2.2 Programmes

Définition 2.1 (*programme*)

Un programme *est une succession d'instructions permettant d'obtenir un résultat particulier, la* sortie*, à partir de certaines informations fournies par l'utilisateur du programme, les* entrées.

Remarque. Lorsque l'on souhaite écrire un programme, il importe de se poser trois questions fondamentales, avant toute réflexion :

1. Quelle est ma *sortie* ? Quel est le but de mon programme ?
2. Quelles sont mes *entrées* ? De quelles informations le programme va-t-il avoir besoin pour mener à bien ce but, mais que je ne connais pas encore ?
3. Et enfin (c'est la question principale !), quelles sont les différentes *étapes* à réaliser pour obtenir le résultat escompté ?

Exemple.
Si je veux construire un programme calculant le carré d'un nombre,

1. ma sortie est ainsi le carré c que je veux calculer,
2. mon entrée est le nombre de départ x,
3. pour calculer son carré, il faut donc calculer $c = x^2$.

Cette étude dégage ainsi la structure du programme, en *pseudo-code* pour l'instant :

1. Demander une valeur pour x,
2. Calculer la quantité $c = x^2$,
3. Répondre finalement par la quantité c calculée.

Nous allons voir à présent comment construire des programmes en python.

Deux méthodes principales sont disponibles,les *scripts* et les *fonctions*, chacune avec ses avantages et ses inconvénients.

Scripts

Les *scripts* sont des programmes contenus dans un fichier `.py`, qui devront être exécutés à chaque fois que l'on veut avoir une réponse.

Syntaxe 2.1 (*gestion des entrées : input*)

Pour demander à l'utilisateur une information, on utilise la commande

```
nom_variable=type(input('message'))
```

Le `message` *(purement cosmétique) sera alors affiché dans la console, et l'exé-*

cution du programme sera mise en pause jusqu'à ce que l'utilisateur y rentre une réponse, et appuie sur entrée*.*

Par défaut, la réponse de l'utilisateur sera comprise comme une chaîne de caractères (de type `str`*). Si l'on veut que python le comprenne sous forme d'un autre type, il faut le préciser : par exemple, si l'on veut que la réponse soit interprétée comme un entier, il faudra écrire* `int(input(...))`.

Syntaxe 2.2 (*gestion de la sortie : print*)

Pour afficher quelque chose (la sortie, typiquement), on utilise la commande

```
print(message)
```

Le contenu du `message` *peut être n'importe quelle suite de variables ou de quantités, de n'importe quel type, séparés par des* `,`.

Exemple.
Voici, en python, un programme calculant le carré d'un nombre réel :

```
x=float(input('x=? '))
c=x**2
print('le carré de ',x,' vaut ',c,'.')
```

Exercice 21.3.
Quel est l'effet du script suivant ?

```
print("Bonjour!")
nom=input("comment vous appelez-vous? ")
print("Ravi de faire votre connaissance, ",nom,".")
print("Je suis un simple petit programme python!")
```

Exercice 21.4.
Écrire un script calculant la moyenne géométrique de deux nombres a et b.

Fonctions

Il est aussi possible de définir des *fonctions*, qui sont des programmes intégrés dans python une fois définies. Elles peuvent être définies directement dans la console, ou dans un fichier texte (comme un script), qui devra alors être exécuté une fois. Une fois exécuté, la fonction sera alors connue de python, et réutilisée librement, dans la console, ou dans d'autres programmes.

Syntaxe 2.3 (*fonction*)

Pour définir une fonction, on utilise la syntaxe suivante :

```
def fonction(entrées):
    [instructions permettant le calcul du résultat]
    return sortie
```

`fonction` *étant le nom que l'on veut donner à la fonction.*

Remarque. Attention ! python est sensible aux *indentations* (des espaces, typiquement 4, en début de ligne), qui lui permettent de savoir où commence et termine un bloc d'instructions. Pour la définition d'une fonction, par exemple, les instructions jusqu'au `return` inclu doivent être indenté par rapport au `def`.

Exemple.
Voici la fonction carrée définie dans python :

```
def carre(x):
    c=x**2
    return c
```

Exercice 21.5.
Définir une fonction python calculant la moyenne géométrique de deux nombres.

3 Programmation

3.1 Blocs conditionnels

Syntaxe 3.1 (*bloc de condition*)

La commande

```
if condition :
    instructions
```

effectue les `instructions` *identées si la* `condition` *est vraie, et les ignore si elle est fausse.*

Il est possible d'indiquer des instructions à réaliser si la condition est fausse :

```
if condition :
    instructions si VRAI
else :
    instructions si FAUX
```

Les blocs conditionnels peuvent être librement imbriqués les uns dans les autres, et il y a même une commande particulière pour simplifier la syntaxe : les deux codes suivants ont le même effet

```
if condition 1 :
    instructions A
else :
    if condition 2 :
        instructions B
    else :
        instructions C
```

```
if condition 1 :
    instructions A
elif condition 2 :
    instructions B
else :
    instructions C
```

Il est même possible d'enchaîner plusieurs blocs `elif`*.*

Exercice 21.6.
Quel est l'effet du code suivant ?

```
date=input("En quelle année est-on? ")
n=input("Quel âge a python? ")
if date-n<1939 :
    print("N'exagérons pas!")
    print("les ordinateurs n'existaient même pas à l'époque!")
elif date-n>1991 :
    print("Ouhlà! bien plus ancien!")
elif date-n<1989 :
    print("Non, ce n'est pas si vieux...")
else :
    print("C'est juste!")
print("Le développement de python a commencé en 1989,")
print("et la première version a été publiée en 1991.")
```

Exercice 21.7.
Proposer une fonction python, nommée `maxi`, calculant le maximum entre deux nombres.

3.2 Boucles

Syntaxe 3.2 (***boucle* `for`**)

La boucle `for` *:*

```
for k in liste :
    instructions
```

permet de répéter les instructions indentées, une fois pour chaque entier `k` *énuméré dans la liste.*

La liste sera très souvent définie par la syntaxe suivante :

Syntaxe 3.3 (***commande* `range`**)

La commande

```
range(a,b,p)
```

énumère les nombres commençant à a, augmentant de p en p, et s'arrêtant juste avant b (qui est donc exclu).

Les paramètres p et a sont optionnels : s'ils ne sont pas renseignés, python considère par défaut que $p = 1$, puis que $a = 0$.

Exercice 21.8.
Quel est l'effet du script suivant ?

```
n=input("n=? ")
s=0
for i in range(1,n+1)
    s=s+i
print(s)
```

Syntaxe 3.4 (*boucle* while)

La boucle `while` *:*

```
while condition :
    instructions
```

permet de répéter les instructions indentées tant que la condition reste vérifiée.

Remarque. Attention ! il est crucial, lorsque l'on utilise une boucle `while`, de s'assurer que la condition finira forcément par être fausse à un moment (en incrémentant une variable à chaque étape, qui doit rester inférieure à un certain seuil, par exemple). Dans le cas contraire, le programme ne s'arrêtera jamais...

Exercice 21.9.
Quel est l'effet du script suivant ?

```
n=input("n=? ")
s=0
i=1
while i<=n
    s=s+i
print(s)
```

4 Listes

4.1 Déclaration de listes

Définition 4.1 (*listes*)

Une liste est une série de valeurs, non nécessairement de même type. Elles peuvent être définies de façon exhaustive *en listant leurs éléments entre crochets, séparés par des virgules.*

Syntaxe 4.1 (*liste et* range)

La commande `range` *n'est techniquement pas une liste, mais peut très aisément être convertie en ce type d'objet par la commande* `list(range(...))`*, évidemment.*

Syntaxe 4.2 (*autres déclaration de listes*)

Les deux syntaxes suivantes permettent de définir des listes :

```
[f(x) for x in liste]
[x for x in liste if condition]
```

La première syntaxe correspond à une représentation paramétrique*, correspondant à la notation mathématique $\{f(x), x \in E\}$ (avec f une fonction, donc), et la seconde, par un système de condition : seuls les éléments x vérifiant la condition spécifiée seront dans la liste.*

Exercice 21.10.
Quelles sont les listes définies par les commandes suivantes ?

```
u=list(range(10))
v=[x for x in u if x>0]
w=[y**2 for y in v]
```

4.2 Manipulation de listes

Syntaxe 4.3 (*concaténation*)

Les commandes

```
u+v
u.append(a)
```

permettent respectivement de concaténer *(i.e. mettre bout à bout) les listes* `u` *et* `v`*, et d'ajouter la valeur* `a` *à la liste* `u`*.*

Pour concaténer une même liste n fois avec elle-même, ont peut utiliser la syntaxe

```
u*n
```

Syntaxe 4.4 (*accès aux valeurs*)

Une liste est indexée, la première valeur possédant l'index 0 et la dernière, −1. Ainsi, `u[0]` *renvoie le premier terme de la liste* `u`*,* `u[1]`*, le second,* `u[-1]`*, le dernier,* `u[-2]`*, l'avant-dernier, etc.*

Ces notations sont considérées comme des variables à part entière, et peuvent être librement modifiées.

La commande

```
del u[i]
```

permet de retirer l'élément d'indice `i` *de la liste* `u`*.*

Syntaxe 4.5 (*autres commandes sur les listes*)

Les commandes

- `len(u)` *renvoie le nombre d'éléments de* `u`*,*
- `x in u` *teste si la valeur* `x` *est dans la liste* `u`*,*
- `u.count(x)` *compte combien de fois la valeur* `x` *est dans la liste* `u`*.*

5 Import de librairies

Python, par défaut, est uniquement un langage de programmation, et n'est pas spécialisé. Ainsi, beaucoup d'outils spécialisés ne sont pas directement accessibles, mais sont regroupés en *librairies* qu'il faudra importer dans le code au préalable.

Ces librairies ne sont pas installées par défaut dans python, mais auront été installées si l'on a installé anaconda, par exemple.

Syntaxe 5.1 (*import de librairie*)

La syntaxe pour importer une librairie est

```
from librairie import *
```

Il est souvent utile de donner un nom raccourci aux objets définis dans une librairie :

```
import librairie as raccourci
```

Une fois importée, les objets seront disponibles en écrivant

```
raccourci.objet
```

Une librairie qui sera bien pratique pour les mathématiques sera la librairie `numpy`, qui permet de définir les commandes suivantes :

Syntaxe 5.2 (*commandes* `numpy`)

Après avoir importé la librairie

```
import numpy as np
```

les commandes suivantes sont disponibles :

`np.pi`	π	`np.e`	e
`np.log`	ln	`np.exp`	exp
`np.abs`	$x \mapsto \|x\|$	`np.floor`	$x \mapsto \lfloor x \rfloor$
`np.sqrt`	$x \mapsto \sqrt{x}$	`np.sum`	*somme d'une liste*
`np.min`	*minimum d'une liste*	`np.max`	*maximum d'une liste*

Chapitre 22

Données statistiques

1 Tableaux de données

1.1 Le type `array`

Syntaxe 1.1 (*arrays*)

La librairie `numpy` *permet de manipuler des tableaux de nombres, de type* `array`*. Après avoir importé la librairie*

```
import numpy as np
```

on peut ainsi construire des tableaux, avec une syntaxe très proche de celle pour les listes (la commande `np.array` *convertissant simplement une liste en tableau) :*

```
np.array([a,b,...]) #déclaration explicite
np.array([f(x) for x in array]) #déclaration paramétrique
np.array([x for x in array if condition]) #déclaration implicite
```

Pour rentrer un tableau à plusieurs entrées (par exemple, avec plusieurs lignes et colonnes), il suffit de rentrer au départ une liste de liste :

```
np.array([[a11,a12,...],[a21,a22,...],...])
```

La commande `range` *a sa propre version, ainsi qu'une nouvelle commande,* `linspace`

```
np.arange(début,fin,pas) #plage de données: écart entre les valeurs
np.linspace(début,fin,nb) #plage de données: nombre de terme
```

Les deux renvoient un tableau de valeurs entre `début` *et* `fin` *(exclus dans le cas de* `range`*), mais le* `pas` *de* `range` *désigne l'écart entre les valeurs, alors que le* `nb` *de* `linspace`*, le nombre total de valeurs dans le tableau.*

Exercice 22.1. 1. Quel sera la taille, et le contenu, de

```
np.array([[x+y for y in np.arange(6)] for x in np.arange(6)])
```

2. Proposer une ligne de code définissant un tableau `tab` à 11 lignes et 11 colonnes comportant les valeurs de $\frac{x}{y}$ pour x et y dans $[1, 2]$.

1.2 Opérations sur les `array`

Syntaxe 1.2 (***opérations sur*** **`array`**)

Les commandes `+`, `-`, `*`, `/`, `**`, *sont bien définies sur les* `array`, *et effectuent les opérations correspondantes* termes à termes *sur des tableaux de même taille.*

De même, si `f` *est une fonction de la librairie* `numpy`, `np.f(A)` *applique la fonction à chaque terme de* `A`.

Les opérateurs de comparaison `==`, `!=`, `<=`, `>=`, `<`, `>`, *fonctionnent de la même façon, et renvoient un tableau de booléens, en effectuant les comparaisons termes à termes.*

Syntaxe 1.3 (***accès aux données dans*** **`array`**)

L'accès aux données dans un tableau s'effectue comme pour une liste (et le premier indice est toujours 0 !), mais dans le cas d'un tableau à plusieurs entrées, il est aussi possible de donner les indices séparés par des virgules. Les deux commandes `A[i][j]` *et* `A[i,j]` *ont ainsi le même effet.*

Il est aussi possible d'accéder à des sous-parties d'un tableau :

```
A[i,:]  #i-ieme ligne
A[:,j]  #j-ieme colonne
A[i1:i2,j1:j2]#sous-matrice
```

2 Séries statistiques

2.1 `array` vus comme séries statistiques

Syntaxe 2.1 (***calculs statistiques sur*** **`array`**)

Si `A` *est un* `array`, *les commandes suivantes sont disponibles :*

`np.sum(A)`	*somme*	`np.cumsum(A)`	*somme cumulée*
`np.min(A)`	*minimum*	`np.max(A)`	*maximum*
`np.mean(A)`	*moyenne empirique*	`np.median(A)`	*médiane empirique*
`np.var(A)`	*variance empirique*	`np.std(A)`	*écart-type empirique*

Il est possible d'ajouter une option à ces commandes, permettant de faire le calcul colonne par colonne (avec `(A,0)`*), et ligne par ligne (avec* `(A,1)`*), comme par exemple* `np.sum(A,0)` *pour la somme colonne par colonne.*

2.2 Diagrammes

Syntaxe 2.2 (***graphes : librairie*** **`matplotlib.pyplot`**)

La librairie permettant de tracer des graphiques est `matplotlib.pyplot`*, que l'on pourra importer via*

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Syntaxe 2.3 (***diagrammes en barres***)

Pour tracer le diagramme en barre correspondant à une série statistique de modalités `x`$= (x_i)$ *et d'effectifs* `e`$= (n_i)$*, on peut utiliser la commande*

```
plt.bar(x,e)
```

Syntaxe 2.4 (***histogramme***)

Pour tracer l'histogramme d'une série statistique donnée par la liste `d`$= (x_i)$ *des données d'un échantillon, on peut utiliser les commandes*

```
plt.hist(x,n) #classes automatiques
plt.hist(x,c) #classes manuelles
```

Les classes utilisées peuvent soit être indiquées par la liste `c`$= (c_1, c_2, \ldots, cn + 1)$ *contenant les "bords" des classes* $[c_i, c_{i+1}[$*, ou bien par un simple entier* `n`*, auquel cas les classes sont automatiquement crées en découpant l'amplitude de l'échantillon (entre son maximum et son minimum) en* n *classes de taille égale.*

Remarque. On remarquera que ces deux commandes ne prennent pas la série statistique sous la même forme : pour `plt.bar`, il faut avoir calculé les effectifs de chaque classe, alors que pour `plt.hist`, l'échantillon complet, avant toute analyse, est requis.

Syntaxe 2.5 (***fréquences cumulées***)

Astuce : pour tracer la courbe des fréquences cumulées d'une série statistique donnée par la liste `Data`$= (x_i)$ *des données d'un échantillon, on peut tracer les valeurs* $1, 2, \ldots, N$ *(où* N *est la taille de l'échantillon) contre celles des données dans l'ordre croissant au moyen de la commande* `plt.plot` *(cf* **??***) :*

```
plt.plot(range(1,N+1),Data.sort())
```

Syntaxe 2.6 (***boîte à moustache***)

Pour tracer la boîte à moustache d'une série statistique donnée par la liste `d`$= (x_i)$ *des données d'un échantillon, on peut utiliser la commande*

```
plt.boxplot(x)
```

2.3 Import et gestion de base de données

Syntaxe 2.7 (***import de donnée : librairie*** **`pandas`**)

La librairie permettant d'importer de fichiers extérieurs des banques de données est la librairie `pandas`*, que l'on pourra importer via la commande*

```
import pandas as pd
```

Syntaxe 2.8 (***importation d'une banque de donnée***)

Pour importer dans python une banque de donnée à partir d'un `fichier.csv` *(*csv : comma-separated-values*), présent dans le répertoire de travail de python, on utilisera la commande*

```
df=pd.read_csv(fichier.csv)
```

La variable `df`*, de type* `data frame`*, contiendra l'ensemble des données contenues dans le fichier, sous forme d'un tableau dont les lignes correspondent aux différents individus, et les colonnes, aux différents caractères.*

Remarque. Cette commande ne permet de lire que des fichiers `.csv`, avec une virgule pour séparateur. Il est possible de changer le séparateur lors de l'import en passant en option `sep=';'` (par exemple, pour citer un séparateur courant).

Les fichiers tableurs `.xls`, `.ods` etc. ne sont pas lisibles par cette commande, mais il est aisé de les convertir à partir de votre logiciel de tableur préféré lors de l'enregistrement du fichier (en choisissant de l'enregistrer... sous format .csv !).

Syntaxe 2.9 (***affichage d'un*** **`data frame`**)

On suppose la variable `df` *définie via l'import d'un fichier comme précédemment. Les commandes suivantes permettent sa manipulation :*

```
print(df) #affiche l'intégralité de la table (déconseillé)
df.head() #affiche les 5 premières lignes.
```

Il est aussi possible d'obtenir le nombre de lignes et de colonnes par la commande

```
df.shape
```

La taille de l'échantillon peut ainsi être obtenue par la commande `df.shape[0]`

Syntaxe 2.10 (***indicateurs statistiques d'un*** **`data frame`**)

Les indicateurs statistiques classiques sont disponibles via la commande

```
df.describe()
```

qui renverra, dans l'ordre, pour chaque colonne, la moyenne (`mean`*), l'écart-type (*`std`*), le minimum (*`min`*), les premiers, second (médiane) et troisièmes quartiles (*`25%, 50%, 75%`*), et le maximum (*`max`*).*

Syntaxe 2.11 (*accès aux données d'un* `data frame`)

Il est possible d'accéder directement à un certain caractère `caractère` *(correspondant à l'en-tête d'une colonne) par la commande*

```
df['caractère']
```

L'objet correspondant est en tout point semblable à un `array numpy`*, et pourra être utilisé comme tel (pour tracer des histogrammes, par exemple).*

Syntaxe 2.12 (*tri et sélection dans un* `data frame`)

Pour afficher la table triée suivant un certain `caractère`*, on peut utiliser la commande*

```
df.sort_values('caractère')
```

L'option `ascending==False` *permet de faire le tri dans le sens décroissant.*

On peut aussi sélectionner les lignes vérifiant une certaine `condition` *(un booléen portant sur un caractère* `df['caractère']`*) par la commande*

```
  df[condition]
```

Chapitre 23

Matrices

0.1 Matrices et `array`

Syntaxe 0.1 (*matrices prédéfinies*)

La librairie `numpy` *donne accès au type* `array`*, qui peut être très facilement utilisé pour des matrices. Certaines matrices communes sont d'ailleurs déjà prédéfinies :*

```
np.ones(n)       #vecteur-ligne rempli de 1
np.ones(n,p)     #matrice (n,p) remplie de 1
np.zeros(n)      #vecteur-ligne rempli de 0
np.zeros((n,p))  #matrice (n,p) remplie de 0
np.eyes(n,p)     #matrice ``identité'' (n,p)
```

Syntaxe 0.2 (*opérations* `numpy` *sur les matrices*)

Les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division terme à terme de tableaux sont définis par la librairie `numpy`*. Pour l'addition et la soustraction, les opérations sont identiques à celles sur les matrices, et peuvent être utilisées telles qu'elles.*

La multiplication, en revanche, nécessite une commande spéciale.

```
A+B            #addition
A-B            #soustraction
c*A            #multiplication par un réel
np.dot(A,B)    #multiplication matricielle
np.transpose(A)      #transposée
```

0.2 Librairie `linalg`

Définition 0.1 (*librairie l'algèbre linéaire :* `numpy.linalg`)

Pour avoir accès aux opérations plus spécifiques de manipulation de matrice, il faut charger de plus la librairie `numpy.linalg` *:*

```
import numpy.linalg as al
```

Syntaxe 0.3 (*opérations* `linalg` *sur les matrices*)

La librairie `numpy.linalg` *fournit les commandes pour la puissance et l'inverse (s'il existe) d'une matrice :*

```
al.matrix_power(A,n)    #puissance
al.inv(A)                     #inverse
al.solve(A,b)           #résolution de AX=b
```

Attention, la commande `solve` *ne fonctionne que si la matrice est inversible...*

Syntaxe 0.4 (*rang d'une matrice*)

On peut aussi obtenir le rang d'une matrice par la commande

```
al.matrix_rank(A)
```

Chapitre 24

Représentations graphiques

On a déjà vu les commandes de la libraire `matplotlib.pyplot` pour tracer des histogrammes et diagrammes. Cette librairie permet aussi de tracer des graphes :

Syntaxe 0.1 (*représentations graphiques*)

Si `X`$= (x_0, x_1, \dots, x_n)$ *et* `Y`$= (y_0, y_1, \dots, y_n)$ *sont deux listes (ou* `array`*) de même taille, correspondant à une liste d'abscisses et d'ordonnées respectivement, la commande*

```
plt.plot(X,Y);plt.show()
```

permet de tracer la ligne brisée reliant les points (x_i, y_i)*.*

Par exemple, si `np.f` *définit une fonction* f*, les trois commandes*

```
X=np.linspace(a,b,n)
Y=np.f(X)
plt.plot(X,Y);plt.show()
```

permettra de tracer le graphe de f *entre* a *et* b *(à condition de prendre* `n` *assez grand).*

Remarques. L'instruction `plt.show()`, qui permet d'afficher le graphique, n'est pas toujours nécessaire en fonction des distributions de python.

La commande-sœur, permettant quant à elle d'effecer le contenu de la fenêtre graphique, est `plt.clf()`.

Il existe une ribambelle d'options qui peuvent être données à python pour modifier les axes, la couleur ou le style des graphes, etc... toutes ces options sortent du programme d'ECG. Le lecteur intéressé est renvoyé vers la documentation de la librairie pour les découvrir.

Chapitre 25

Simulations aléatoires

Syntaxe 0.1 (***simulation aléatoires : libraire* `numpy.random`**)

La librairie `numpy.random` *permet d'effectuer des simulations aléatoires. Elle pourra être importée par la commande*

```
import numpy.random as rd
```

Syntaxe 0.2 (***simulation de lois usuelles***)

Les lois usuelles sont définies dans la librairie `numpy.random` *par les commandes suivantes :*

```
rd.random()        #uniforme sur [0,1[
rd.randint(n)      #uniforme sur [[0,n-1]] (entiers)
rd.binomial(n,p)   #binomiale
rd.geometric(p)      #géométrique
rd.poisson(l)      #Poisson
```

Liste des Définitions

Liste des Théorèmes