

Première partie

Exercices divers

1 Des suites, des séries

Exercice 1 (Inspiré d'EDHEC 2010)

Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

- 1) Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2 .
- 2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.
b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .
- 3) a) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a : $\ln(1+x) \leq x$.
b) Écrire $\ln(u_n)$ sous forme d'une somme et en déduire que, pour tout entier naturel n , $\ln(u_n) \leq 2$.
- 4) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.

Correction

Exercice 2 (Inspiré d'Écricome 1999)

- 1) Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n , la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n.$$

- a) Donner la forme du terme général de la suite (x_n) .
- b) Montrer que la suite (x_n) converge vers 0 (quelques soient ses premiers termes). On donne $\frac{1+\sqrt{13}}{6} \approx 0.77$ et $\frac{1-\sqrt{13}}{6} \approx -0.44$.

Soient a et b deux réels supérieurs ou égaux à 1. On veut étudier la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}. \end{cases}$$

- 2) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$.
b) Montrer que si la suite (u_n) converge, la seule limite possible est 4.

On se propose à présent d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1.$$

- 3) a) Montrer que si (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 4.
b) Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}.$$

On pourra commencer par calculer $2(2 + v_{n+2})v_{n+2}$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq \frac{1}{2(2+v_{n+2})} \leq \frac{1}{3}.$$

d) En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|).$$

e) On note (x_n) la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 = |v_0| \\ x_1 = |v_1| \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n. \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n , $|v_n| \leq x_n$, et en conclure sur la convergence de la suite (u_n) .

Correction

Exercice 3 (Inspiré d'ECRICOME 2007)

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par

$$f_a(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{a^2}{t} \right)$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_a(u_n)$.

1) **Étude des variations de la fonction f_a .**

- Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.
- Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
- Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser le tableau de variation de f_a .
- En déduire que

$$\forall t > 0 \quad f_a(t) \geq a.$$

2) **Étude de la convergence de la suite (u_n) .**

- Que dire de la suite (u_n) dans le cas particulier où $u_0 = a$?
- Dans la suite on revient au cas général où $u_0 > 0$. Démontrer que

$$\forall t > a \quad 0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}.$$

- Montrer que pour tout entier n non nul, $u_n \geq a$.
- Prouver alors que, pour tout entier n non nul,

$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a),$$

puis que

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} |u_1 - a|.$$

- En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.

- f) En utilisant ce qui précède, écrire un programme **python** permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n) , de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

Correction

Exercice 4 (Inspiré d'Écrisome 2001)

On s'intéresse, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, à l'équation en $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(E_n) : \quad \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2n} = a.$$

On introduit ainsi la fonction

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - a = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2n} - a.$$

1) **Un cas particulier**

On prend ici $n = 1$ et $a = \frac{11}{6}$.

- Donner le domaine de définition de f_1 , sa dérivée et ses variations.
- Tracer l'allure du graphe de f_1 .
- Montrer que résoudre l'équation (E_1) revient à trouver les racines du polynôme $11X^3 + 15X^2 - 14X - 12$.
- Calculer $f_1(1)$, et résoudre l'équation (E_1) .

2) **Dénombrement des solutions de (E_n)**

- Dresser le tableau de variations de f_n (attention à son domaine de définition!).
- En déduire le nombre de solutions à l'équation (E_n) .

3) **Étude d'une suite**

On note x_n la plus grande racine de (E_n) .

- Justifier que pour tout entier n , $x_n > 0$.
- On admet la formule suivante, pour tout réel $y > 1$:

$$\frac{1}{y} < \ln \left(\frac{y}{y-1} \right) < \frac{1}{y-1}.$$

En sommant cet encadrement pour certaines valeurs bien choisies de y , en déduire que pour tout réel $x > 0$, on a

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + a < \ln \left(1 + \frac{2n}{x} \right) < f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a.$$

- En déduire que, pour tout entier n ,

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln \left(1 + \frac{2n}{x_n} \right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$

- Montrer que pour tout entier n ,

$$x_n > \frac{2n}{e^a - 1}.$$

- Quelle sont les limites de x_n et de $\ln \left(1 + \frac{2n}{x_n} \right)$ quand $n \rightarrow \infty$?
- En déduire la limite de $\frac{x_n}{n}$ quand $n \rightarrow \infty$.

Correction

Exercice 5 (Inspiré d'E.M. LYON 1998)

- Soit $x \in [-1, 1[$.

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [-1, 1[$, $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$.
- b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [-1, x]$, $\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$.
- c) En intégrant les inégalités précédentes, établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que

$$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}.$$

(On montrera cette inégalité en distinguant les cas $x \geq 0$ et $x < 0$)

- d) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

En particulier, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$.

- 2) Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

Montrer que la probabilité que le joueur gagne est de $\ln(2)$.

Correction

Exercice 6 (Inspiré d'ESC 2009)

- 1) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^4 - 4x + 1.$$

- a) Donner la dérivée de h et la factoriser.
- b) En déduire les variations de h . On admettra que h admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$.
- c) En déduire que l'équation (E) : $x^4 - 4x + 1 = 0$ admet exactement deux solutions réelles α et β (on notant α la plus petite).
- d) Justifier que $\alpha \in]0, 1[$ et que $\beta > 1$.
- e) Écrire une fonction **python** qui calcule $h(x)$, pour x un réel donné.
- 2) On considère la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \frac{x^4 + 1}{4}$.

On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 0$ et la relation, valable pour tout entier n , $u_{n+1} = g(u_n)$.

- a) Étudier les variations de g (on précisera les valeurs aux bornes).
- b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

- c) En déduire que la suite (u_n) converge.
- d) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$, puis justifier que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$.

Correction

Exercice 7 (inspiré d'ECRICOME 2019)

Pour tout entier naturel non nul n , on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0 \quad h_n(x) = x^n + \frac{1}{x^n} + 1.$$

- 1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

- 2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n , et vérifiant $0 < u_n < 1 < v_n$.

- 3) a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}.$$

- b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4$.

- c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

- 4) a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel $\ell \geq 1$.

- b) En supposant que $\ell > 1$, montrer que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et en déduire une contradiction.

- c) Déterminer la limite de (v_n) .

- 5) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq 3$.

- b) Écrire une fonction **python** d'en-tête `def h(n,x):` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel non nul n et un réel $x \in \mathbb{R}_+$ en entrée.

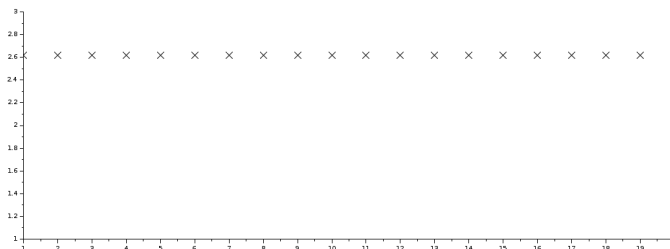
- c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n , par la méthode de dichotomie, lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée.

```
def v(n):
    a=1
    b=3
    while (b-a)>10**(-5):
        c=(a+b)/2
        if h(n,c)<4:
            ---
        else:
            ---
    return ---
```

- 6) À la suite de la fonction `v`, on écrit le code suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X=1:20
Y=np.zeros(1,20)
for k in range(1,21):
    Y(k)=v(k)**k
plt.plot(X,Y)
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus. Que peut-on conjecturer ?

- 7) Montrer que $\forall n \geq 1 \quad (v_n)^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

- 8) Retrouver ainsi le résultat de la question 4c

Correction

Exercice 8 (inspiré d'EM Lyon 2019)

On considère ici la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall t > 0 \quad f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

1) **Étude d'une fonction**

- Étudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.
- Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ vers $]2, +\infty[$.
- On note $g :]2, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$ la réciproque de la restriction de f à $]1, +\infty[$.
 - Dresser le tableau de variations de g .
 - Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$.
 - Soit $y \in]2, +\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]1, +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y .

2) **Étude d'une suite**

On introduit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n). \end{cases}$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et est supérieur à 1.
- Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **python** suivante afin que, prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n .

```
1 def suite(n):
2     u=1
3     for k in range(____):
4         u=____
5     return u
```

- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$.
 - En déduire la nature de la série $\sum v_n$.
 - Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.
En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , que l'on ne cherchera pas à déterminer.
- Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt.$$

- Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p < n$, calculer $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire que

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

- En déduire, pour tout entier $n \geq 3$, que $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$. Montrer alors que $\ell \in [2, 3]$.
- Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, que

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$

- En déduire une fonction **python** qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Correction

2 Des fonctions

Exercice 9 (Inspiré d'EML 2012)

On considère l'application $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in]0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
- 2) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.
- 3) Dresser le tableau de variations de f . On précisera la limite de f en $+\infty$.
- 4) Montrer que f est convexe sur $]0, +\infty[$.
- 5) On note Γ la courbe représentative de f dans une repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en 0 et préciser celle-ci.
 - b) Déterminer les points d'intersection de Γ et de l'axe des abscisses.
 - c) Préciser la nature de la branche infinie de Γ .
 - d) Tracer l'allure de Γ . On admet que $0,36 < e^{-1} < 0,37$.

Correction

Exercice 10 (Inspiré d'EDHEC 2002)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x \ln(x)}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- 1) a) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- b) Étudier le signe de $f(x)$.
- 2) a) Montrer que l'on définit bien une fonction F , dérivable sur $\mathbb{R}_+$, en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

et en donner sa dérivée.

- b) Justifier que pour tout réel $t \geq e$, $f(t) \leq \frac{-t}{1+t^2}$.
- c) En intégrant l'inégalité précédente, montrer que, pour $x \geq e$,

$$F(x) \leq F(e) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \frac{\ln(1+e^2)}{2}$$

et en déduire la limite de F en $+\infty$.

- d) Donner le tableau de variations de F , avec sa limite en $+\infty$, et tracer l'allure de sa courbe représentative.
- 3) Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on pose $g(x) = F(x) - x$.
 - a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout x strictement positif, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme $g'(x) = \frac{-xh(x)}{1+x^2}$.
 - b) Étudier les variations de h , puis en déduire son signe.
(on donne la valeur approchée : $\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx -0.48$)
 - c) En déduire le signe de $g'(x)$, puis que g est négative.
- 4) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence ; valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$.
 - a) Établir par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0, 1]$.

- b) Montrer, en utilisant le résultat de la question 3, que (u_n) est décroissante.
 c) En déduire que la suite (u_n) converge et donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Correction

Exercice 11 (Inspiré d'ESCP 1999)

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, soit f_k la fonction définie par

$$f_k : x \mapsto \frac{\ln^k(x)}{x-1}.$$

1) **Étude des fonctions f_k .**

- a) Soit $k \geq 2$. Donner le domaine de définition de f_k , et justifier la continuité de f_k sur les intervalles où elle est définie.
 b) Justifier que la fonction f_k est prolongeable par continuité en 1, en posant $f_k(1) = 0$.
 c) On considère, pour tout $k \geq 2$, la fonction auxiliaire φ_k définie, pour tout $x > 0$ par

$$\varphi_k : x \mapsto k(x-1) - x \ln(x).$$

Étudier les variations de φ_k .

- d) Montrer que, pour tout $k \geq 2$, l'équation $\varphi_k(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $]1, +\infty[$. On note a_k cette racine.
 e) Justifier que pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$,

$$f'_k(x) = \frac{\ln^{k-1}(x)}{x(x-1)^2} \varphi_k(x).$$

- f) En distinguant les cas $k = 2$, k pair supérieur ou égal à 4, et k impair, donner le tableau de variation de la fonction f_k , en précisant les limites aux bornes.

2) **Étude asymptotique de la suite $(a_k)_{k \geq 2}$.**

- a) Montrer que pour tout $k \geq 2$,

$$e^{k-1} \leq a_k \leq e^k.$$

- b) En déduire la limite de la suite (a_k) .

- c) On veut étudier plus précisément le comportement de la suite, en introduisant δ_k le réel tel que $a_k = (1 + \delta_k)e^k$.

Montrer que le réel δ_k vérifie l'équation

$$-ke^{-k} = (1 + \delta_k) \ln(1 + \delta_k)$$

(On justifiera au préalable que $1 + \delta_k > 0$).

- d) Montrer que $|\ln(1 + \delta_k)| = \frac{ke^{-k}}{1 + \delta_k}$, et en déduire que

$$|\ln(1 + \delta_k)| \leq ke^{1-k}.$$

- e) En déduire que la suite (δ_k) tend vers 0.

3) **Calcul approché de a_4 .**

Écrire un programme **python** calculant une valeur approchée à 10^{-4} de a_4 . (On pourra utiliser une méthode par dichotomie, en se souvenant que a_4 est l'unique zéro de φ_4 , et qu'il est compris entre e^3 et e^4 .)

Correction

Exercice 12 (inspiré d'EDHEC08)

On considère, pour tout entier naturel n , la fonction f_n définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$.

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

- 1) a) Justifier que la fonction f_n est C^2 sur $\mathbb{R}$.
 b) Déterminer, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
 c) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) a) Calculer les limites éventuelles de f_n en $+\infty$ et $-\infty$.
 b) Montrer que les droites (D_n) et (D'_n) d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n) .
 c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n , de (C_n) . Donner la convexité de la fonction f_n .
 d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1 , puis tracer sur un même dessin les droites (D_1) , (D'_1) et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1) .
- 3) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .
 b) Montrer que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\frac{1}{n} < u_n < 0$.
 c) En déduire la limite de la suite (u_n) .
 d) En revenant à la définition de u_n , montrer que $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}$.
- 4) Proposer un programme **python** calculant, au moyen d'une méthode par dichotomie, une valeur approchée à une précision ε , de u_n , pour n et ε donnés par l'utilisateur.

Correction

Exercice 13 (Inspiré d'EDHEC 2009)

Dans cet exercice, on considère les fonctions f et g définies sur $D =]-\infty, 1[$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in D \setminus \{0\} \quad f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)},$$

$$g(0) = -1 \text{ et } \forall x \in D \setminus \{0\} \quad g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

- 1) On s'intéresse tout d'abord à la fonction g .
 - a) Montrer que g est continue sur D .
 - b) Montrer que $h : x \mapsto \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}$ est dérivable sur D , et que, pour tout $x \in D$, $|h'(x)| \leq \frac{x^2}{1-x}$.
 - c) En déduire que, pour tout $x \in D$, $|h(x)| \leq \frac{|x|^3}{1-x}$.
 - d) En déduire la limite de $\frac{\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{x^2}$ quand $x \rightarrow 0$, et que la fonction g est dérivable en 0, avec $g'(0) = -\frac{1}{2}$.
 - e) Montrer que g est dérivable sur $D \setminus \{0\}$.
- 2) Passons à f :
 - a) Déduire de la question précédente que la fonction f est continue et dérivable sur D , avec

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ -\frac{\ln(1-x)+x}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$
 - b) Déterminer le signe de $\ln(1-x) + x$ pour $x \in D$, et en déduire les variations de f .
 - c) Déterminer les limites de f aux bornes de D , puis dresser le tableau de variation de f .
- 3) a) Montrer que, pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel de $[0, 1[$, que l'on notera u_n , tel que $f(u_n) = n$. Que vaut u_1 ?
 b) Montrer que la suite (u_n) ainsi définie converge vers 1.

Correction

3 Des intégrales

Exercice 14 (Inspiré d'ESC 1997)

Pour tout entier naturel, on note

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln(x))^n dx.$$

1) Calculer I_1 (on pourra utiliser une intégration par partie).

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [1, e]$, on a

$$[\ln(x)]^{n+1} \leq [\ln(x)]^n.$$

b) En déduire la monotonie de la suite (I_n) . Est-elle convergente ?

c) Donner l'équation de la tangente à la courbe $x \mapsto \ln(x)$ au point d'abscisse e .

d) Montrer que pour tout $x \in [1, e]$, $0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}$. (on pourra penser à une inégalité de convexité)

e) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'encadrement $0 \leq I_n \leq \frac{e^3 - e^{-n}}{n - 3}$.

f) En déduire la limite de (I_n) .

3) a) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout entier naturel $n > 0$,

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$

b) À l'aide de la relation de récurrence précédente, écrire un programme en `python` demandant à l'utilisateur un réel strictement positif ε est renvoyant la plus petite valeur de n telle que $I_n \leq \varepsilon$.

c) Déduire de la question 3a la limite, quand n tend vers $+\infty$, de nI_n .

d) Déterminer la limite de $n(nI_n - e^3)$ quand n tend vers $+\infty$.

e) En déduire que

$$I_n = \frac{e^3}{n} - \frac{4e^3}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon_n,$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Correction

Exercice 15 (Inspiré d'ECRIME05)

On considère, pour tout entier naturel n , l'intégrale $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$.

1) Calculer I_0 et I_1 , et montrer que $I_1 = \frac{1}{2}(1 - I_0)$.

2) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Montrer que la suite (I_n) est toujours positive.

c) En déduire que la suite (I_n) converge.

3) a) Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0, 1]$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire la limite de la suite (I_n) .

4) a) À l'aide d'une intégration par parties, établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n.$$

b) En déduire la limite de la suite (nI_n) .

Correction

4 Des probabilités

4.1 Probabilités classiques

Exercice 16 (Inspiré d'ESG 1988)

Deux joueurs A et B jouent à une suite de parties indépendantes. La probabilité de gagner une partie pour A (et donc de perdre pour B) est de $\frac{2}{3}$. Il n'y a pas de matchs nuls.

Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs a gagné deux parties de plus que l'autre. Pour tout entier naturel non nul n , on note q_n, r_n, s_n, t_n et u_n les probabilités des événements

- Q_n : « La n^{e} partie est jouée, et à l'issue de celle-ci, le joueur A a gagné deux parties de plus que le joueur B . »
- R_n : « La n^{e} partie est jouée, et à l'issue de celle-ci, le joueur A a gagné une partie de plus que le joueur B . »
- S_n : « La n^{e} partie est jouée, et à l'issue de celle-ci, les deux joueurs ont chacun gagné le même nombre de parties. »
- T_n : « La n^{e} partie est jouée, et à l'issue de celle-ci, le joueur B a gagné une partie de plus que le joueur A . »
- U_n : « La n^{e} partie est jouée, et à l'issue de celle-ci, le joueur B a gagné deux parties de plus que le joueur A . »

- 1) a) Pour chaque entier non nul n , la famille $(Q_n, R_n, S_n, T_n, U_n)$ forme-t-elle un système complet d'événements ?
- b) Donner, pour $n > 1$, les probabilités conditionnelles des différents événements considérés $(Q_n, R_n, S_n, T_n, U_n)$ sachant les mêmes événements à l'issue de la partie précédente $(Q_{n-1}, R_{n-1}, S_{n-1}, T_{n-1}, U_{n-1})$
- c) Calculer les valeurs suivantes :

$$q_1, r_1, s_1, t_1, u_1, q_2, r_2, s_2, t_2, u_2.$$

On justifiera proprement les raisonnements effectués.

- d) Pour n un entier supérieur à 3, montrer que $r_n = \frac{2}{3}s_{n-1}$ et exprimer également s_n et t_n en fonction de r_{n-1} , s_{n-1} et t_{n-1} .
- e) En déduire que les suites (s_{2k}) et (s_{2k+1}) sont géométriques de raison $\frac{4}{9}$, et en déduire, pour tout entier naturel non nul n , une formule pour r_n , s_n et t_n en fonction de n . On pourra distinguer les cas selon la parité de n .
- 2) Pour tout entier n supérieur à 2, déterminer q_n et u_n en fonction de r_{n-1} et t_{n-1} .
- 3) Pour tout entier n supérieur à 2, déterminer la probabilité que le jeu s'arrête à l'issue de la n^{e} partie avec la victoire du joueur A . Même question avec une victoire du joueur B . En déduire la probabilité que le jeu s'arrête à l'issue de la n^{e} partie (sans faire attention au vainqueur).
- 4) Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête avant la $2n^{\text{e}}$ partie ? Avec la victoire du joueur A ? du joueur B ?
- 5) Quelle est la limite de ces quantités quand n tend vers $+\infty$? Quelle interprétation peut-on en donner ?

Correction

Exercice 17 (inspiré d'HEC 1998)

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont mutuellement indépendants, et que, à chaque lancer, la pièce donne face avec probabilité $p \in]0, 1[$, et pile avec probabilité $q = 1 - p$. L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires à l'obtention de deux faces consécutives.

On suppose donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience. Pour tout entier $n \geq 1$, on note

- U_n l'événement « On obtient 2 faces de suite, pour la première fois, aux lancers n et $n + 1$ », et on note $u_n = \mathbb{P}(U_n)$,
- A_n l'événement « Les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite, et le $n^{\text{ième}}$ lancer donne face », et on note $x_n = \mathbb{P}(A_n)$,

- B_n l'événement « Les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite, et le n ème lancer donne pile », et on note $y_n = \mathbb{P}(B_n)$.
- 1) a) Déterminer $u_1; x_2, y_2, u_2; x_3, y_3, u_3$.
 - b) Trouver, pour $n \geq 2$, une relation simple entre x_n et u_n .
 - c) Pour tout $n \geq 2$, déterminer les probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}), \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}), \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}), \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}).$$

- d) En déduire les relations de récurrence suivantes, pour $n \geq 2$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = py_n \\ y_{n+1} = q(x_n + y_n) \end{cases}$$

- 2) Dans cette question, on suppose $p = \frac{1}{2}$.
- a) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ \forall n \geq 2 \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n. \end{cases}$$

Proposer un programme en `python` qui calcule, pour n un entier donné par l'utilisateur, f_n , le n ème terme de la suite. On pourra stocker dans un tableau les valeurs $[f_k, f_{k+1}]$ et utiliser une boucle `for`. On *n'utilisera pas* le terme général de la suite calculé à la question 2c.

- b) Montrer que l'on a, pour tout $n \geq 2$, $2^n y_n = f_n$.

- c) On pose $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

- d) En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, une expression de x_n , puis de u_n , en fonction de α, β et n .

- e) En déduire que la suite de terme général $\sum_{k=1}^n u_k$ converge vers 1.

- f) Quelle est la probabilité d'obtenir deux faces consécutives avant le n ème lancer ? Quelle est la probabilité d'obtenir deux faces consécutives en attendant assez longtemps ?

Correction

Exercice 18 (Inspiré d'EDHEC 2013)

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel.

On dispose d'une urne contenant au départ n boules blanches et $(n + 2)$ boules noires. On dispose également d'une réserve infinie de boules blanches et de boules noires.

Pour tout entier naturel j , on dit que l'urne est dans l'état j lorsqu'elle contient j boules blanches et $(j + 2)$ boules noires. Au départ, l'urne est donc dans l'état n .

On réalise une succession d'épreuves, chaque épreuve se déroulant selon le protocole suivant :

Pour tout entier naturel j non nul, si l'urne est dans l'état j , on extrait une boule au hasard de l'urne.

- Si l'on obtient une boule blanche, alors cette boule n'est pas remise dans l'urne, et on enlève de plus une boule noire de l'urne, qui est alors dans l'état $j - 1$.
- Si l'on obtient une boule noire, alors cette boule est remise dans l'urne, et on ajoute en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne, qui est alors dans l'état $j + 1$.

- 1) Dans cette question, on suppose que $n = 1$ (l'urne contient donc une boule blanche et trois boules noires), et on note X_1 la variable aléatoire au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la première épreuve, et X_2 la variable aléatoire au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la deuxième épreuve.

On admet que X_1 et X_2 sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

a) Donner la loi de X_1 .

b) Utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_2 .

On revient au cas général (n est donc un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1) et on décide que les tirages s'arrêtent dès que l'urne ne contient plus de boules blanches.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note E_j l'événement « l'urne est dans l'état j et les tirages s'arrêtent au bout d'un temps fini ». On pose $e_j = \mathbb{P}(E_j)$, et on a bien sûr $e_0 = 1$ *.

- 2) Montrer, en considérant les deux résultats possibles du premier tirage (c'est-à-dire au début du jeu lorsque l'urne est dans l'état n) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e_n = \frac{n}{2n+2} e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} e_{n+1}.$$

- 3) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad e_n \geq e_{n+1}$.

b) En déduire que la suite (e_n) est convergente.

On admet pour la suite que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = 0$.

- 4) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = (n+1)e_n$.

a) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, écrire u_{n+1} en fonction de u_n et u_{n-1} .

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et e_1 .

c) Montrer enfin que l'on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad e_n = (2e_1 - 1) \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}$.

Déterminer la valeur de e_1 , puis en déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de e_n en fonction de n .

Correction

Exercice 19 (une rencontre difficile)

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de 5 sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 , disposés en pentagone comme illustré par la figure ci-dessus. Ils arrivent à l'heure au rendez-vous, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2 . Ils décident de partir à la recherche l'un de l'autre, et le font selon les règles suivantes :

- Les deux personnes se déplacent en même temps,
- Chaque personne, si elle ne se trouve pas déjà sur le même site que l'autre, choisit de façon uniforme un site voisin de celui où elle se trouve, et s'y rend.
- Tous les déplacements se font de façon indépendante.

Les deux protagonistes ne peuvent pas se retrouver sur les chemins menant d'un site à un autre.

Pour tout entier naturel n , on définit les trois événements A_n, B_n, C_n :

- A_n : « Les deux personnes sont sur le même site après n déplacements »,
- B_n : « Les deux personnes sont sur des sites adjacents après n déplacements »,
- C_n : « Les deux personnes sont à deux routes de distance après n déplacements ».

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives de ces événements.

- 1) Justifier que A_n, B_n, C_n forme, pour tout entier n , un système complet d'événements.
- 2) Déterminer les valeurs de a_0, b_0, c_0 .
- 3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}.$$

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1.$$

c) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues.

- 4) Établir les relations suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n. \end{cases}$$

*. L'énoncé est peu clair : il faut bien sûr lire « les tirages s'arrêtent au bout d'un temps fini, sachant que l'on commence dans l'état j ».

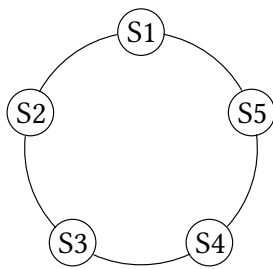


FIGURE 1 – organisation du site

- 5) a) En déduire la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n.$$

- b) En déduire une expression de b_n en fonction de n (qui pourra faire intervenir les deux réels $\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$).
- c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n).$$

- 6) a) Exprimer a_n en fonction de n , α et β (on pourra considérer la somme $a_n + b_n + c_n$).
- b) Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- c) Quelle interprétation peut-t-on donner à cette limite ?

Correction

Exercice 20 (inspiré d'ECRICOME05)

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec probabilité p , et face avec probabilité $q = (1 - p)$.

On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.

Pour tout entier naturel non nul n , on note A_n l'événement « deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéros n et $n + 1$ ».

On définit alors la suite (a_n) des probabilités des événements A_n : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \mathbb{P}(A_n)$ (avec pour convention $a_0 = 0$).

1) étude d'une fonction

On considère la fonction polynomiale f définie par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - qx - pq.$$

- a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes, r_1 et r_2 (avec $r_1 < r_2$). Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$ en fonction de p et q (la formule est très simple!).
- b) Calculer $f(1)$, $f(-1)$ et $f(0)$.
- c) En déduire l'encadrement suivant : $|r_1| < |r_2| < 1$.

2) étude des probabilités

- a) Déterminer a_1 , a_2 et a_3 en fonction de p et q .
- b) En remarquant que l'événement A_{n+2} est réalisé si, et seulement si,
- on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième, et deux piles consécutifs arrivent alors n tirages après,
 - ou on a obtenu face au premier tirage, et deux piles consécutifs arrivent alors $n + 1$ tirages après,

montrer (attention à la rédaction!) que, pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0.$$

3) une question d'informatique...

Compléter le programme `python` suivant, pour qu'il permette de calculer, pour un entier naturel n , et le paramètre p , donnés, la probabilité a_n .

```
def deuxpires(p,n):
    q=___
    x=0
    y=p^2
    for ___:
        z=___
        x=y
        y=z
    return ___
```

4) étude asymptotique de (a_n)

- Montrer que pour tout entier naturel n , $a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^n - r_1^n)$.
- En déduire la limite de (a_n) .
- Montrer que $\frac{a_n}{r_2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{p^2}{r_2 - r_1}$.

Correction

4.2 Variables aléatoires

Exercice 21 (Inspiré d'EMLYON 1999)

La lettre c désigne un entier naturel non nul fixé.

Une urne contient initialement des boules blanches et des boules rouges, toutes indiscernables au toucher.

On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne, avec c boules supplémentaires de la même couleur.

- Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges.
 - Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage?
 - Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage? On cherchera à simplifier au maximum la formule.
 - Si la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche?
- Pour tous les entiers naturels non nuls n, x, y , on note $u_n(x, y)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche au n^{e} tirage, lorsque l'urne contient initialement x boules blanches et y boules rouges.
 - Montrer soigneusement, en utilisant un système complet d'événement associé au premier tirage, que pour tout entiers naturels non nuls n, x, y , on a

$$u_{n+1}(x, y) = u_n(x + c, y) \frac{x}{x + y} + u_n(x, y + c) \frac{y}{x + y}.$$

- En déduire par récurrence que, pour tous entiers naturels non nuls n, x, y , que

$$u_n(x, y) = \frac{x}{x + y}.$$

- Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement exactement une boule blanche et une boule rouge, et que $c = 1$. Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

- a) Donner la loi de X_1 .
- b) Donner la loi de X_2 .
- c) (*) Montrer par récurrence que X_n suit une loi uniforme dont on donnera l'espérance et la variance.

Correction

Exercice 22

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Un joueur dispose de deux dés à six faces. Le premier, noté A , est équilibré, le second, noté B , est tel que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro correspondant, c'est à dire qu'il existe un réel λ tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \mathbb{P}(B = k) = \lambda k.$$

(on note A et B les variables aléatoires correspondant au résultat du dé A et B respectivement)

- 1) a) Montrer que $\lambda = \frac{1}{21}$, et complétez le tableau de loi suivant :

$B =$	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(B = \bullet) =$						

- b) Le joueur lance le dé B . Déterminer la probabilité des événements I : « obtenir un chiffre impair », et E : « obtenir un chiffre pair[†] ».
- 2) Dans cette question le joueur dispose d'une pièce qui amène pile avec probabilité $\frac{2}{3}$ (événement P) et face avec probabilité $\frac{1}{3}$ (événement F).
Soit n un entier naturel, $n \geq 4$, le joueur lance en premier la pièce. Si elle amène pile, il lance alors n fois le dé A , sinon, n fois le dé B .

- a) i. Montrer que la probabilité de l'événement U : « obtenir, à tous les lancers du dé, le chiffre 1 » vaut

$$\mathbb{P}(U) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{6^n} + \frac{1}{21^n} \right).$$

On pensera bien au fait qu'il y a deux cas de figure, selon le résultat de la pièce...

- ii. On sait que cet événement U est réalisé. Quelle est la probabilité que le lancer de pièce ait donné pile?
- b) (*) Soit k un entier tel que $2k \leq n$.
- i. On considère l'événement S_k : « les $2k$ premiers lancers amènent alternativement les chiffres 1 et 6 dans cet ordre ». (Le premier donne 1, le second 6, puis 1, 6, etc.) Calculer $\mathbb{P}(S_k)$.
- ii. On sait que cet événement S_k est réalisé. Quelle est la probabilité que le lancer de pièce ait donné pile?
- 3) Dans cette question le joueur lance toujours le dé B et on s'intéresse à l'apparition pour la première fois de la séquence IE (un résultat impair suivi d'un résultat pair).
On notera I_k : « le chiffre obtenu au k^{e} lancer est impair » et E_k : « le chiffre obtenu au k^{e} lancer est pair ».
On définit la variable aléatoire X égale au numéro du lancer amenant le chiffre pair lors de l'apparition pour la première fois de la séquence IE . Si par exemple au cours des lancers on obtient $E_1 \cap E_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap E_5 \cap I_6 \cap E_7$, alors $X = 5$.
- a) Quel est le support de X ?
- b) Déterminer $\mathbb{P}(X = 2), \mathbb{P}(X = 3), \mathbb{P}(X = 4)$.
- c) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Exprimer l'événement $(X = n)$ à l'aide d'événements du type E_i et I_i , et montrer que

$$\forall n \geq 2 \quad \mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{4}{7} \right)^{k+1} \left(\frac{3}{7} \right)^{n-k-1}.$$

†. "even", en anglais, pour ne pas confondre avec un pièce qui tombe sur "pile"

- d) En déduire que $\forall n \geq 2 \mathbb{P}(X = n) = 3 \left(\frac{4}{7}\right)^n - 4 \left(\frac{3}{7}\right)^n$.
 e) Vérifier que $\sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
 f) Montrer que X a une espérance, valant $\mathbb{E}(X) = \frac{49}{12}$.

Correction

Exercice 23 (Inspiré d'EDHEC 2009)

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0, 1[$, et on note $p = 1 - q$. On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indépendantes, suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p .

- 1) On pose $Z = \min(X, Y)$, et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
 - a) Pour tout entier naturel k , calculer $\mathbb{P}[Z > k]$.
 - b) Établir que pour tout entier naturel k , $\mathbb{P}[Z = k] = \mathbb{P}[Z > k - 1] - \mathbb{P}[Z > k]$.
 - c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
- 2) On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
 - Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega)$ est un entier pair, on pose :

$$T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2},$$

— Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega)$ est un entier impair, on pose :

$$T(\omega) = \frac{1 + X(\omega)}{2}.$$

On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- a) Montrer que T prend des valeurs entières strictement positives.
 - b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
 - c) Exprimer l'événement $[T = k]$ en termes d'événements de type $[X = i]$, puis montrer que T suit la même loi que Z .
- 3) On rappelle que la fonction `np.random()` renvoie de façon uniforme un réel aléatoire de $[0, 1[$, et que la fonction `np.mod(n, 2)` renvoie 0 si n est pair, et 1 s'il est impair. Compléter le programme `python` suivant de façon à ce qu'il :
 - simule les lancers d'une pièce donnant « pile » avec probabilité p (qui sera donné par l'utilisateur), et
 - calcule la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers,
 - calcule et affiche la valeur prise par T , définie comme précédemment.

```

___=input(...)
x=0
while np.random()<=p:
    x=___
    if (np.mod(x,2)=0):
        ___
    else:
        ___
print(T)

```

Correction

Exercice 24 (Inspiré d'ECRICOME 2017)

Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue lors du k^{e} tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros obtenus soit supérieure ou égale à n .

Exemple : avec $n = 10$, si on tire successivement les numéros 2, 4, 1, 5, 9, on obtient $S_1 = 2, S_2 = 6, S_3 = 7, S_4 = 12, S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

I. Échauffement

- 1) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi et l'espérance de X_k .
- 2) a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
b) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$.
c) Montrer que

$$\mathbb{P}(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

- 3) Dans cette question, $n = 2$. Calculer la loi de T_2 .
- 4) Dans cette question, $n = 3$. Calculer la loi de T_3 , et vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}$.

II. Étude générale de T_n

- 1) Déterminer $S_k(\Omega)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1} .
b) En utilisant un système complet d'événement lié à la variable aléatoire S_k , démontrer alors que

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j).$$

- 3) a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$,

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

- c) Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition

$$\ll \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \gg$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

- 4) a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
b) En déduire que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$.
5) Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k)$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
6) En déduire la limite de $\mathbb{E}(T_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

III. Convergence de T_n

- 1) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{k-1}{k!}.$$

- a) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 1$.
- b) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
- 2) Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que

$$\mathbb{P}(T_n > k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!}.$$

- 3) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y = k)$. On dit que T_n converge en loi vers Y .
- 4) En python, la commande `rd.randint(n)+1` renvoie un entier aléatoire choisi uniformément sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules de l'urne, pour qu'elle simule la variable aléatoire T_n .

```
import numpy as np
```

```
def T(n):
    S=___
    y=___
    while ___:
        tirage=np.randint(n)+1
        S=S+tirage
        y=___
    return ___
```

- 5) On suppose déclarée la fonction précédente, et on écrit le script ci-dessous (on rappelle que la commande `plt.bar(range(1,6),X)`, avec X un vecteur ligne ou colonne de taille 5, trace le diagramme en bâtons correspondant aux valeurs de X)

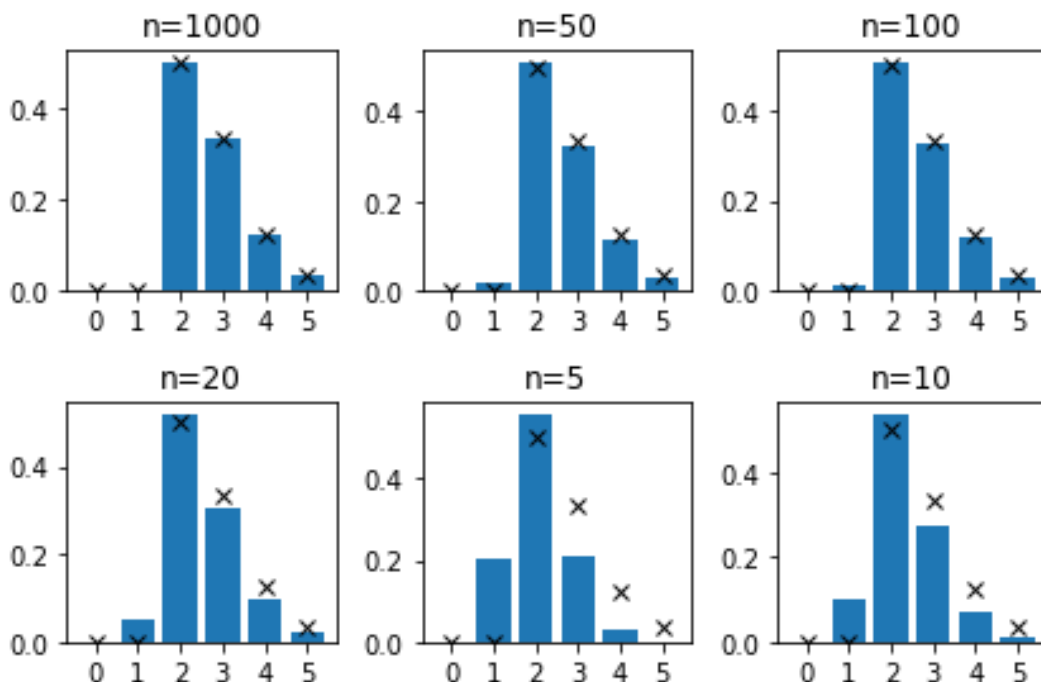
```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def freqT(n):
    y=np.zeros(n+1)
    for i in range(100000):
        k=T(n)
        y[k]=y[k]+1
    return y/100000

def loitheoY(stop):
    y=np.zeros(stop+1)
    for k in range(1,stop+1):
        y[k]=(k-1)/np.prod(range(1,k+1))
    return y
```

```
plt.clf()
n=int(input("n=? "))
x=freqT(n)
plt.bar(range(6),x[range(6)])
plt.plot(loitheoY(5),'x',color='black')
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées donne les graphes suivants :



- Rappeler ce que renvoie la commande `range(1,k+1)`, et en déduire ce que calcule `np.prod(range(1,k+1))` (on rappelle que la commande `np.prod` fait simplement le produit des termes d'une liste).
- En déduire le contenu de la liste renvoyée par la commande `loitheoY(6)`.
- Que contient la liste renvoyées par la commande `freqT(n)` ?
- Comment ces deux listes sont-elles représentées graphiquement dans les figures ci-dessus ?
- Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question III3.

Correction

5 De l'algèbre

5.1 Probabilités matricielles

Exercice 25 (Inspiré d'EDHEC 2010, long)

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \\ f(e_2) &= \frac{2}{3}e_1 \\ f(e_3) &= \frac{2}{3}e_1. \end{aligned}$$

1) Étude d'un ensemble de matrices

- Écrire la matrice M de f dans la base canonique.
 - Déterminer une base et la dimension de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$.
 - Déterminer de plus que $\text{Ker}(f - \frac{2}{3}\text{Id})$, $\text{Ker}(f + \frac{2}{3}\text{Id})$ et $\text{Ker}(f)$ sont trois sous-espaces vectoriels de dimension 1, et que les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

constituent respectivement une base des ces trois sous-espaces.

iv. Montrer que la famille (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

b) On pose

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i. Justifier, sans calcul, que la matrice P est inversible. En calculant PQ , déterminer P^{-1} .

ii. Montrer que $M = PDP^{-1}$.

iii. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel j , on a $M^j = PD^jP^{-1}$.

iv. Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de M^j . Vérifier que ce résultat reste valable pour $j = 0$.

2) **Étude d'une suite de variables aléatoires** Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à tirer au hasard une boule de l'urne, puis l'y remettre pour le tirage suivant. On définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel non nul n , X_n est définie *après* le n^{e} tirage.
- On procède au premier tirage, et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le n^{e} tirage ($n \in \mathbb{N}^*$) :
 - Soit X_n a pris la valeur 1, auquel cas on procède au $(n+1)^{\text{e}}$ tirage et X_{n+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(n+1)^{\text{e}}$ tirage.
 - Soit X_n a pris une valeur j différente de 1, auquel cas on procède au $(n+1)^{\text{e}}$ tirage et X_{n+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j , et la valeur 1 sinon.

a) Reconnaître la loi de X_1 .

b) La commande `rd.randint(3)+1` renvoie un entier entre 1 et 3 de manière uniforme. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite précédemment, et affiche la valeur prise par X_n , l'entier n étant fourni par l'utilisateur.

```
n=int(input("entrer le nombre de lancers à effectuer"))
X=rd.randint(3)+1
for i in range(2,n+1):
    T=rd.randint(3)+1
    if X==1:
        X=___
    elif T<>X:
        X=___
print(X)
```

c) On note U_n la matrice à trois lignes et une colonne dont l'élément de la i^{e} ligne est $\mathbb{P}[X_k = i]$.

- i. Déterminer les probabilités $k_{i,j} = \mathbb{P}[X_n=j][X_{n+1} = i]$ pour $(i,j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.
- ii. Donner la matrice de transition $K = (k_{i,j})$ telle que, pour tout entier naturel non nul n , $U_{n+1} = KU_n$.

iii. Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a, pour tout entier naturel n , $U_n = K^n U_0$.

d) i. Vérifier que $K = M + \frac{1}{3}I$ (I désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$), puis établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$K^n = \sum_{j=0}^n C_n^j \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} M^j.$$

ii. En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice K^n , puis vérifier que la loi de X_n est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right), \\ \mathbb{P}[X_n = 2] = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right), \\ \mathbb{P}[X_n = 3] = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right). \end{cases}$$

- iii. Donner la limite de ces probabilités lorsque n tend vers $+\infty$.
 e) Calculer l'espérance de X_n .

Correction

Exercice 26 (inspiré d'Ecrilome 2017, ECT)

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1) **Première partie : étude matricielle**

- a) Calculer PQ , et en déduire que P est inversible. Identifier P^{-1} .
 b) On pose

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $MV_i = a_i V_i$, avec $a_1, a_2, a_3 = 5, 1, 2$.

- c) Vérifier que $\frac{1}{6}QMP$ est une matrice diagonale D , dont les coefficients diagonaux sont 5, 1 et 2. En déduire que $M = \frac{1}{6}PDQ$.
 d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$.
 e) Montrer que la première colonne de M^n est

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1} - 2) \end{pmatrix}.$$

2) **Application à un entraînement sportif**

L'épreuve athlétique du triathlon comporte 3 épreuves : la natation, le cyclisme et la course à pied.

Un athlète décide de s'entraîner chaque jour à une épreuve spécifique, en commençant par la natation au jour 0, et suivant les règles suivantes :

- S'il a pratiqué la natation un jour donné, il continuera la natation le lendemain une fois sur 5, le cyclisme une fois sur 5, et la course à pied 3 fois sur 5, aléatoirement.
 - S'il a pratiqué le cyclisme un jour donné, il pratiquera le lendemain la natation 2 fois sur 5 et le cyclisme 3 fois sur 5,
 - Si enfin il a pratiqué la course, il pratiquera le cyclisme une fois sur 5, et la course 4 fois sur 5.
- On note, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n, B_n et C_n les événements « l'athlète pratique le jour n la natation/le cyclisme/la course à pied », et a_n, b_n et c_n leurs probabilités.

- a) Déterminer les valeurs de $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$.
 b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$

Exprimer de même les probabilités b_{n+1} et c_{n+1} .

- c) Déterminer (et reconnaître!) la matrice A telle que

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

- d) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- e) En déduire le terme général des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) .
 f) Quelle proportion du temps l'athlète va-t-il pratiquer les différentes disciplines?

Correction

5.2 Matrices “pures”

Exercice 27 (Inspiré d'ESCP 1998)

Dans tout l'exercice, n désignera un entier supérieur ou égal à 2.

- 1) a) Étudier, suivant la parité de n , le tableau de variations de la fonction f_n , définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n : x \mapsto x^{n+1} + x^n$.
- b) Montrer que dans tous les cas, $f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$.
- c) En déduire, suivant la parité de n , le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x :

$$x^{n+1} + x^n = 2.$$

- 2) On note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Les matrices A et P sont-elles inversibles ? Si oui, donner leur inverse.
- b) Vérifier que $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$.
- c) En déduire que pour tout $n > 0$, $A^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$.

- 3) On considère l'équation matricielle d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(E_n) \quad X^{n+1} + X^n = A.$$

- a) Montrer que la résolution de cette équation peut se ramener à la résolution de l'équation d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(E'_n) \quad Y^{n+1} + Y^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Soit Y une solution de (E'_n) . On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- i. Montrer que $YD = DY$.
- ii. En déduire que $b = c = 0$.
- iii. Quelles sont les valeurs possibles de a ?
- iv. Discuter, suivant les valeurs de l'entier n , le nombre de solutions à l'équation (E_n) .
- c) On note μ la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$. Déterminer les solutions (E_3) à l'aide de μ .

Correction

Exercice 28 (inspiré d'ESCP01)

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que les matrices colonnes :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

- 1) Vérifier que $AV_i = \lambda_i V_i$, pour $i = 1, 2, 3$, et λ_i des réels.
- 2) a) Montrer que la matrice P est inversible, et en calculer l'inverse.
- b) Vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, que l'on notera D .
- c) Montrer de même que $\Delta = P^{-1}BP$ est aussi une matrice diagonale.

3) On cherche à calculer la suite de vecteurs (X_n) , définis de la manière suivante :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n.$$

À cet effet, on pose $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, et que $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

c) Montrer alors que, pour tout entier n ,

$$\begin{cases} u_{n+2} &= u_{n+1} \\ v_{n+2} &= 4v_n \\ w_{n+2} &= -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$$

En déduire les expressions de u_n , v_n et w_n .

d) Donner finalement la matrice X_n en fonction de n .

Correction

Exercice 29 (inspiré d'ECRICOME04)

1) **Matrices 3x3**

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que P est inversible et en donner l'inverse.

b) Calculer $T = PAP^{-1}$, et en déduire T^2 , T^3 , et toutes les puissances T^n pour $n \geq 3$. La matrice T est-elle inversible ?

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}T^nP$, et en déduire que $A^n = 0$ pour $n \geq 3$. La matrice A est-elle inversible ?

d) On pose, pour tout réel t , la matrice

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$

i. Montrer que pour tout réels t, t' , $E(t)E(t') = E(t + t')$.

ii. Calculer, pour tout réel t , $E(t)E(-t)$, et en déduire que la matrice $E(t)$ est inversible. Donner son inverse.

iii. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $E(t)^n = E(nt)$.

2) **Matrices 2x2**

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n , on pose

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} B^k = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que Q est inversible, et en donner l'inverse.
 b) Montrer que $D = Q^{-1}BQ$. La matrice D est-elle inversible? Et la matrice B ?
 c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = QD^nQ^{-1}$.
 d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

- e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$, et donner des formules similaires pour $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$.
 f) En utilisant la formule suivante, valable pour tout réel x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$, montrer que la suite de matrices $(E_n(t))_n$ converge, pour tout t , vers une matrice $E(t)$, et que

$$E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

- g) Déterminer les deux matrices E_1 et E_2 telles que $E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$.
 h) Calculer E_1^2 , E_2^2 , $E_1 E_2$ et $E_2 E_1$.
 i) En déduire que $E(t)$ est inversible, et en donner l'inverse.

Correction

5.3 Équations différentielles et algèbre

Exercice 30 (inspiré d'ECRICOME, sujet zéro (2022))

1) Préliminaires : un peu d'algèbre

On note la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ainsi que f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A .

- a) Déterminer le rang de $A - 6I$. En déduire la dimension de $\ker(A - 6I)$.
 b) On pose

$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V = AU - 2U \text{ et } W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- i. Montrer que (U, V, W) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
 ii. En déduire que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible, et donner son inverse.

- iii. Donner la matrice de f dans cette base.
 iv. Vérifier que $A = PBP^{-1}$.
 v. L'endomorphisme f est-il bijectif?

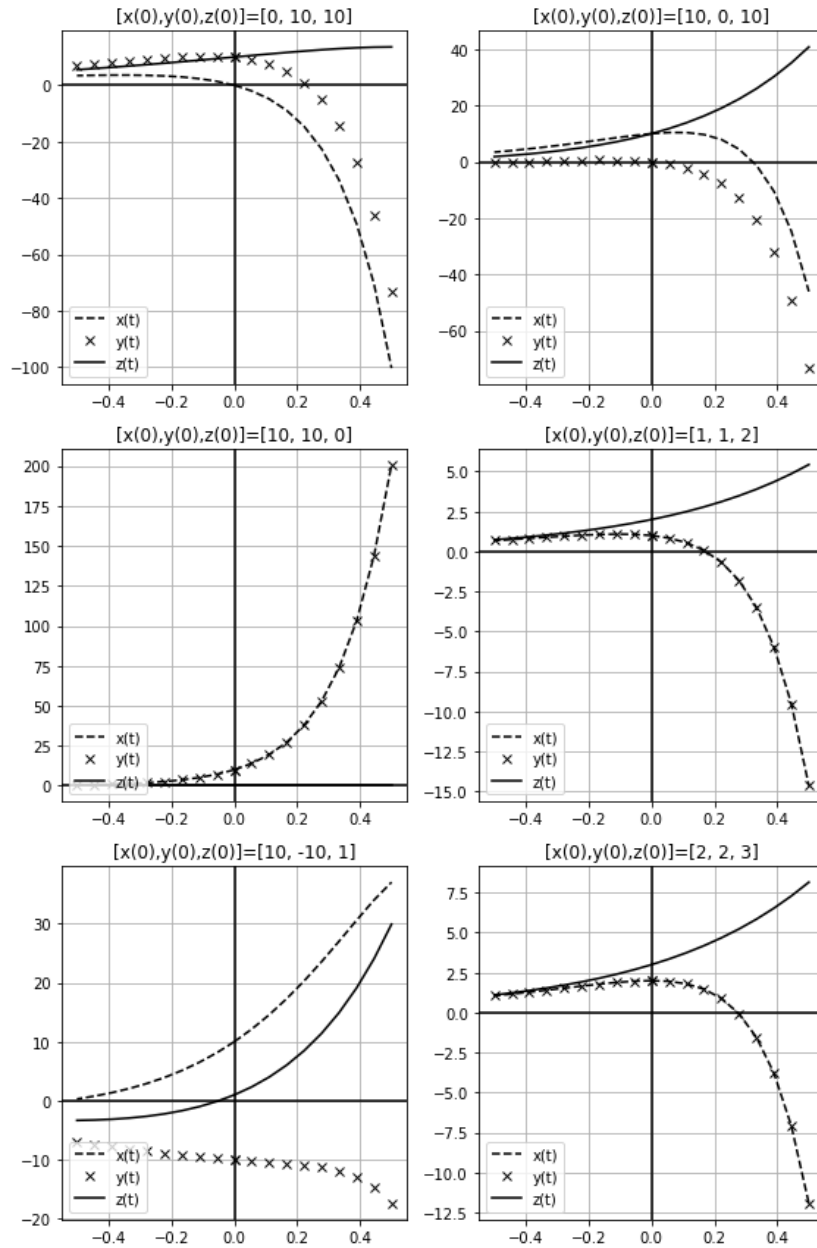
2) Étude d'une équation différentielle

On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x'(t) = 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On note, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

- a) Voici le tracé des trajectoires de cette équation différentielle pour diverses valeurs de $x(0), y(0), z(0)$:
Que peut-on conjecturer lorsque $x(0) = y(0)$?



- b) Montrer que pour tout réel t , on a $X'(t) = AX(t)$.
c) On note, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = P^{-1}X(t)$. On admet que $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = BY(t)$.
d) i. Donner l'ensemble des solutions à l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 6\varphi(t). \quad (1)$$

- ii. Donner l'ensemble des solutions à l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 2\varphi(t). \quad (2)$$

iii. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que $t \mapsto cte^{2t}$ est une solution particulière de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}. \quad (3)$$

iv. Déterminer l'ensemble des solutions à l'équation (6).

- e) En notant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, montrer que γ est solution de (4), β est solution de (5), et α est solution de (6) pour un réel c bien choisi.
- f) Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{cases}$$

g) En déduire, en notant $x_0 = x(0), y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0)$, que

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) &= ((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0))e^{2t} + (\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0)e^{6t} \\ y(t) &= ((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0))e^{2t} + (\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0)e^{6t} \\ z(t) &= ((x_0 - y_0)t + z_0)e^{2t} \end{cases}$$

h) Justifier la conjecture de la question 2a

Correction

6 Des gros problèmes

Exercice 31 (Inspiré d'EDHEC 2008)

I. Préliminaires

1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

- a) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq M$. En déduire que pour tout couple (x, y) d'éléments de $[0, 1]$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M \left(t - \frac{k}{n} \right).$$

c) Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}.$$

d) En sommant la relation précédente, établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}.$$

e) Conclure finalement que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt.$$

2) Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose

$$I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx.$$

a) Montrer que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$

b) En déduire que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0).$$

c) Déterminer $I(p+q, 0)$, et montrer finalement que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

d) Compléter le programme python suivant pour qu'il calcule la valeur de $I(p, q)$:

```
def I(p,q)
    if q=0:
        i=___
    else:
        i=___
    return i
```

II. Étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.

On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit une loi uniforme sur $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$.

On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$, elles aussi définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $[U_n = \frac{k}{n}]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$.

1) On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$. Rappeler la valeur de l'espérance de Y puis montrer que

$$\mathbb{E}(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2.$$

2) Donner la loi de X_1 .

Dans toute la suite, on suppose $n \geq 2$.

3) a) Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout $i \in X_n(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

b) Utiliser la première question de cette partie pour donner, sans calculs, la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^m i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

Montrer alors que l'espérance de X_n est égale à $\frac{m(n-1)}{2n}$.

c) En utilisant toujours la première question de cette partie, donner sans calculs la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^m i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}.$$

Montrer alors que l'espérance de $X_n(X_n - 1)$ est égale à $\frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

d) En déduire finalement que

$$\text{Var}(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2+1)}{12n^2}.$$

- 4) a) En utilisant les résultats obtenus aux deux premières questions de la première partie, montrer que, pour tout $i \in X_n(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_n = i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{m+1}.$$

b) Reconnaître la loi limite obtenue. Soit X une v.a. suivant cette loi.

$$\text{Vérifier que } \mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X) \text{ et } \text{Var}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(X).$$

Correction

Exercice 32 (Inspiré d'ESSEC 1998)

On considère dans ce problème un guichet auquel se présentent aléatoirement des clients. L'objectif est d'étudier la file d'attente se formant à ce guichet au cours du temps, ce qui est traité dans la partie II. Dans la partie I, on étudie une suite récurrente utilisée ultérieurement.

1) **Partie I**

On considère un nombre réel strictement positif a et le fonction f définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \exp[a(x-1)].$$

On définit alors une suite (u_k) par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation

$$u_{k+1} = f(u_k).$$

a) **Convergence de la suite (u_k) .**

- Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$ et que f est croissante sur $[0, 1]$.
- Établir par récurrence que pour tout entier naturel k ,

$$0 \leq u_k \leq 1 \text{ et } u_k \leq u_{k+1}.$$

- En déduire la convergence de la suite (u_k) , dont on notera $L(a)$ la limite.
- Justifier que cette limite est racine de l'équation $f(x) = x$.

b) **Limite de la suite lorsque $a < 1$.**

- À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que

$$0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k).$$

- En déduire l'inégalité $0 \leq 1 - u_k \leq a^k$, pour tout entier naturel k , puis la limite $L(a)$ de la suite (u_k) pour $0 < a < 1$.

c) **Limite de la suite lorsque $a \geq 1$.**

- On étudie ici les racines de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geq 1$.

Prouver que $0 \leq 1 - \frac{\ln(a)}{a} \leq 1$ pour $a \geq 1$ (on étudiera la fonction $x \mapsto 1 - \frac{\ln(x)}{x}$).

Exprimer l'unique racine de l'équation $f'(x) = 1$ en fonction de a .

En déduire la variation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ pour $a = 1$, puis pour $a > 1$. Préciser dans ces deux cas le nombre de racines de l'équation $f(x) = x$.

On convient désormais de noter $r(a)$ la plus petite racine de l'équation $f(x) = x$. On vérifiera en particulier que $0 < r(a) < 1$ pour $a > 1$ et que $r(1) = 1$.

- On étudie ici la plus petite racine $r(a)$ de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geq 1$.

Étudier et représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto xe^{-x}$. Comparer les images des nombres a et $ar(a)$ par cette fonction.

En déduire que la fonction φ , définie pour $0 \leq x \leq 1$ par $\varphi(x) = xe^{-x}$, réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, \frac{1}{e}]$ et montrer que la fonction φ^{-1} est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{e}]$ (on citera le théorème utilisé). Dresser le tableau de variation de φ^{-1} .

Prouver que $r(a) = \frac{1}{a}\varphi^{-1}(ae^{-a})$, puis déterminer la limite de $r(a)$ en $+\infty$.

iii. On étudie maintenant la limite de la suite (u_k) pour $a \geq 1$.

Établir l'inégalité $0 \leq u_k \leq r(a)$ pour tout nombre entier naturel k .

En déduire la limite $L(a)$ de la suite (u_k) pour $a \geq 1$.

Écrire un programme `python` permettant de déterminer une valeur approchée de $L(a)$ à 10^{-2} près. On obtient ainsi $L(2) \approx 0.20$ et $L(4) \approx 0.02$, etc.

d) **Courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.** Déduire de ces résultats l'allure de la courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.

2) Partie II

Dans cette partie, le temps est supposé discrétisé et se présente donc comme une succession d'instants $0, 1, \dots, n, \dots$, et on considère un guichet auquel peut se présenter au plus un client dans un intervalle de temps $[n-1, n[$, c'est-à-dire entre deux instants consécutifs $n-1$ et n .

On suppose qu'un premier client se présente au guichet à l'instant 0 et, pour tout nombre entier $n \geq 1$, on désigne par B_n la variable prenant la valeur 1 si un client se présente au guichet entre les instants $n-1$ et n , et 0 sinon. Si un client arrive (et que le guichet est occupé), il se place au bout de la file d'attente devant le guichet.

Ces variables $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$, sont supposées indépendantes et prennent la valeur 1 avec la probabilité p .

On appelle durée de service d'un client au guichet le temps passé par l'employé à le servir (une fois son attente dans la file achevée). Pour préciser, si la durée de service du premier client est de n , le guichet est libre pour le client suivant à partir de l'instant n .

Les variables aléatoires indiquant les durées de service au guichet des clients successifs sont supposées indépendantes et suivent la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. En particulier, on notera D la variable aléatoire indiquant la durée de service au guichet du client initial.

On convient d'appeler première vague de clients l'ensemble de ceux arrivés au guichet pendant la durée de service du client initial, puis, de façon générale, on appelle $(k+1)$ ème vague l'ensemble de clients arrivés pendant la durée de service des clients de la k ème vague. On désigne alors par N_k les nombre aléatoire des clients de la k ème vague (étant entendu que l'on pose $N_k = 0$ s'il n'y a pas de clients de k ème vague). Par convention, on pose $N_0 = 1$.

a) **Loi de la variable aléatoire N_1**

i. Étant donné un nombre entier naturel n , reconnaître la loi de la variable aléatoire N_1 , conditionnée par l'événement $D = n$. On précisera les expressions des probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}_{[D=n]}(N_1 = k).$$

ii. En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, que N_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre et l'espérance.

b) **Probabilité que la file d'attente au guichet s'achève.**

Dans toute la suite du problème, on convient de poser $p_k = \mathbb{P}(N_k = 0)$.

i. Prouver que l'événement « la file d'attente au guichet s'arrête au bout d'un temps fini » (autrement dit : « il n'y a plus personne au guichet au bout d'un temps fini ») est la réunion des événements $[N_k = 0]$ pour $k \geq 1$.

Montrer que cette suite d'événements $[N_k = 0]_{k \geq 1}$ est croissante, et en déduire :

- que la suite $(p_k)_{k \geq 1}$ est convergente, vers une limite $L \leq 1$;
- que la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini est égale à L .

ii. Justifier, pour tout couple (j, k) de nombres entiers naturels, les formules :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{[N_1=1]}(N_{k+1} = 0) = \mathbb{P}(N_k = 0) \\ \mathbb{P}_{[N_1=j]}(N_{k+1} = 0) = [\mathbb{P}(N_k = 0)]^j. \end{cases}$$

(Question très difficile : on pourra remarquer que l'on peut « séparer » les clients en j classes : ceux qui sont arrivés pendant que le i ème ($i \in \llbracket 1, j \rrbracket$), se faisait servir, ou tout autre client de cette même classe.)

- iii. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que

$$p_{k+1} = e^{\lambda p(p_k - 1)},$$

et préciser p_0 .

- iv. À l'aide des résultats de la partie I, préciser la limite de la suite (p_k) et la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini.

On discutera et interprétera le résultat obtenu en fonction des valeurs de λp .

- v. Déterminer les valeurs exactes ou approchées à 10^{-2} près des probabilités pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini lorsque la durée moyenne de service d'un client au guichet est égale à 1, 2, 4 ou 8, tandis que la probabilité pour qu'un client se présente au guichet entre deux instants consécutifs donnés est 0.5 ou 0.25. On placera ces valeurs dans un tableau.

- c) **Calcul de l'espérance $\mathbb{E}(N_k)$ de la variable aléatoire N_k .** On convient d'appeler « espérance de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'événement $N_k = i$ », et de noter $\mathbb{E}_{[N_k=i]}(N_{k+1})$, l'espérance de N_{k+1} lorsque la probabilité est la probabilité conditionnelle sachant l'événement $N_k = i$, autrement dit

$$\mathbb{E}_{[N_k=i]}(N_{k+1}) = \sum_{j=0}^{+\infty} j \mathbb{P}_{[N_k=i]}(N_{k+1} = j).$$

- i. On suppose l'événement $N_k = i$ réalisé. Reconnaitre alors la loi de la durée de service de ces i clients de la k ème vague en distinguant les cas $i = 0$ et $i \geq 1$. En déduire que la loi de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'événement $N_k = i$ est une loi de Poisson, et vérifier que $\mathbb{E}_{[N_k=i]}(N_{k+1}) = i\lambda p$.
- ii. On suppose que l'espérance $\mathbb{E}(N_k)$ existe. Établir que

$$\mathbb{E}(N_k) = \frac{1}{\lambda p} \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_k = i) \mathbb{E}_{[N_k=i]}(N_{k+1}).$$

En admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ dans le calcul, établir l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(N_{k+1})$ et en déduire que

$$\mathbb{E}(N_{k+1}) = \lambda p \mathbb{E}(N_k)$$

- iii. En déduire l'existence et l'expression de $\mathbb{E}(N_k)$.
- iv. Déterminer l'espérance du nombre de clients qui se présentent au guichet jusqu'à ceux de la n ème vague incluse.
- v. Discuter et interpréter la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$, pour $\lambda p < 1$. Qu'obtient-on numériquement dans les cas évoqués au 2(b)v ?

Correction

Exercice 33 (Inspiré d'EML09)

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

I. Première partie : Étude d'une fonction

- 1) a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
- c) On introduit la fonction $g : x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$.
- i. Justifier que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et donner g' et g'' . Que valent $g'(0)$ et $g''(0)$?

ii. Soit $x > 0$. Montrer que, pour tout $t \in [-x, x]$, $|g''(t)| \leq g''(x)$, et en déduire que

$$|g'(t)| \leq g''(x)x.$$

iii. En déduire que, pour tout $t \in [-x, x]$

$$|g(t)| \leq g''(x)x^2,$$

et qu'en particulier, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|g(x)| \leq g''(|x|)x^2.$$

iv. En faisant tendre x vers 0, montrer finalement que

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

v. f est-elle dérivable en 0? en déduire que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

- 2) a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $u(x) = (1-x)e^x - 1$.
- b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$.
- c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Dresser le tableau de variations de f .
- d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote en $-\infty$.
- e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

II. Deuxième partie : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- 1) Montrer que f admet un unique point fixe (solution de $f(x) = x$), noté α , que l'on calculera.
- 2) a) Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$ (on pourra étudier la fonction associée).
- b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.
- c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
- d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
- e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

f) Montrer finalement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha).$$

- 3) En déduire que la suite (u_n) converge vers α .
- 4) Proposer un programme python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

III. Troisième partie : Étude d'une fonction intégrale

On note $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)dt.$$

- 1) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- 2) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq G(x) \leq xf(x)$. En déduire la limite de G en $+\infty$.
 b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $G(x) \leq xf(x)$. En déduire la limite de G en $-\infty$.
 3) Dresser le tableau des variations de G . On n'essayera pas de calculer $G(\ln(3))$.

Correction

Exercice 34 (Inspiré d'HEC 2004)

Dans tout le problème, on considère une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de « pile » et de « face » sont équiprobables. On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par P_n l'événement « la pièce tombe sur pile au n^{e} lancer » et F_n son complémentaire « la pièce tombe sur face au n^{e} lancer ».

1) **Un résultat préliminaire**

On considère une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et on pose, pour tout entier naturel non nul n , $a_n = \mathbb{P}[X = n]$.

- a) i. Justifier que la suite $(a_n)_n$ est une suite de nombres positifs ou nuls vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.
 ii. Montrer que, pour tout nombre réel $x \in [0, 1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est convergente.
 b) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose que cette fonction est dérivable en 1, c'est-à-dire que

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} f'(1).$$

- i. Établir, pour tout nombre réel $x \in [0, 1[$, l'égalité

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$$

(On fera attention à bien tout justifier !)

- ii. En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est croissante sur $[0, 1[$, et qu'elle vérifie, pour tout nombre réel $x \in [0, 1[$ les inégalités suivantes :

$$0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq f'(1).$$

- iii. Montrer que pour tout entier naturel non nul N , on a

$$0 \leq \sum_{n=1}^N n a_n \leq f'(1).$$

En déduire que la série de terme général $n a_n$ est convergente.

- iv. À l'aide des questions 1(b)i et 1(b)iii, justifier, pour tout nombre réel $x \in [0, 1[$, que

$$0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1).$$

v. En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance, et que $\mathbb{E}(X) = f'(1)$.

2) **Loi du temps d'attente de la première configuration « pile, pile, face ».**

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du premier lancer où apparaît pour la première fois un face précédé de deux piles. Si cette configuration n'apparaît jamais, la variable aléatoire prend la valeur 0. Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont pile, face, pile, face, face, pile, pile, pile, face, ..., Y vaut 9.

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 3$, $c_n = \mathbb{P}[Y = n]$.

Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on pose $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$, et $U_n = \bigcup_{i=3}^n B_i$.

- a) On pose $u_1 = u_2 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 3$, $u_n = \mathbb{P}(U_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone et convergente.
- b)
 - i. Calculer, pour tout entier naturel $n \geq 3$, $\mathbb{P}(B_n)$.
 - ii. Vérifier que, pour tout entier naturel $n \geq 3$, les événements B_n , B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.
 - iii. En déduire les valeurs de u_3 , u_4 et u_5 .
- c) Soit n un entier supérieur ou égal à 5.
 - i. Justifier que $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et préciser leur probabilité.
 - ii. Exprimer l'événement U_{n+1} en fonction des événements U_n et B_{n+1} , en déduire que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.
 - iii. Vérifier l'égalité précédente pour $n = 2$ et $n = 3$.
 - iv. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ et en déduire $\mathbb{P}[Y = 0]$.
- d) Pour tout entier naturel non nul n , on pose $v_n = 1 - u_n$.
 - i. Donner les valeurs de v_1 , v_2 , v_3 et v_4 .
 - ii. Exprimer pour tout entier naturel $n \geq 3$, v_{n+1} en fonction de v_n et v_{n-2} , et en déduire que $v_{n-2} = 8(v_n - v_{n+1})$.
 - iii. En déduire pour tout entier $N \geq 1$ que

$$\frac{7}{8} - v_{N+3} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^N v_k.$$

- iv. Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer sa somme.
- e) Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$\forall x \in [0, 1] \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \text{ et } h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n.$$

- i. Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Exprimer l'événement $[Y = n]$ en fonction des événements $\overline{U_{n-1}}$ et U_n . En déduire que $c_n = v_{n-1} - v_n$.
- ii. Valider l'égalité pour $n = 2$ et $n = 3$.
- iii. Établir pour tout réel $x \in [0, 1]$ que $g(x) = (x - 1)h(x) + x$.
- iv. En déduire pour tout réel $x \in [0, 1]$ que

$$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = h(x) + 1.$$

- v. Justifier que la fonction h est croissante et que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=1}^N v_k x^k \leq h(x) \leq h(1).$$

En déduire que $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} h(1)$.

- vi. Montrer que g est dérivable en 1 et, au moyen de la partie 1, que Y a une espérance valant 8.

3) Paradoxe de Walter Penney (1969)

Deux joueurs, A et B s'affrontent dans le jeu suivant : comme pour l'expérience précédente, ils lancent une pièce de monnaie équilibrée, avec la règle suivante : le joueur A gagne si la configuration « pile, pile, face » apparaît avant la configuration « face, pile, pile ». Sinon, c'est le joueur B qui l'emporte.

On se propose de montrer que, dans ce jeu, le joueur B a un net avantage.

- a) Soit Y' la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un pile précédé d'un pile, lui-même précédé d'un face. Si cette configuration n'apparaît jamais, Y' prend la valeur 0. Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont pile, face, pile, face, face, pile, pile, pile, face, ..., Y' vaut 7.
- Pour tout entier $n \geq 3$, on pose $B'_n = F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n$, et $U'_n = \bigcup_{i=3}^n B'_i$. On note $u'_n = \mathbb{P}[U'_n]$.
- Soit $n \geq 3$. Les événements B'_n , B'_{n+1} et B'_{n+2} sont-ils deux à deux incompatibles ?
 - En déduire que, si on pose $u'_1 = u'_2 = 0$, le même raisonnement que dans la partie 2, conduit à l'égalité $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$ pour tout $n \geq 3$.
 - En déduire l'égalité des suites (u_n) et (u'_n) .
 - Prouver donc que les variables aléatoires Y et Y' ont la même loi, et la même espérance.
- b) Pour tout entier $n \geq 3$, on note G_n l'événement « le joueur A est déclaré gagnant à l'issue du n^{e} lancer », et g_n sa probabilité.
- Calculer g_3 et g_4 et établir, pour tout entier $n \geq 3$, que $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
 - En déduire que la probabilité que A soit déclaré gagnant est de $\frac{1}{4}$.
- c) Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par d_n la probabilité que n'apparaissent jamais deux piles consécutifs lors des n premiers lancers.
- Donner la valeur de d_1 et d_2 .
 - En considérant le premier et le deuxième lancer, justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'égalité $d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$.
 - Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β (que l'on ne cherchera pas à calculer) telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on aie

$$d_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^n$$

- En déduire que la série de terme général d_n converge, et, en utilisant le résultat de la question 3(c)ii, prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.
- d) On désigne par T la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer où un des deux joueurs est déclaré gagnant s'il existe, et 0 sinon.
- Justifier, pour tout entier $n \geq 2$, que

$$\mathbb{P}([T > n] \cup [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n.$$

- En déduire que pour tout entier $n \geq 3$,

$$\mathbb{P}([T = n]) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n.$$

- Montrer que l'un des joueurs sera presque sûrement déclaré gagnant.
- e) En déduire la probabilité que le joueur B soit déclaré gagnant, et conclure. *Bonus* : en quoi ce résultat est-il compatible avec le résultat trouvé à la question 3(a)iv ?
- f) Si la configuration gagnante du joueur A avait été « pile, pile, face » et celle du joueur B , « face, face, pile », quelle aurait été la conclusion ?

g) Soient d et t les fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$\forall x \in [0, 1] \quad d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n \text{ et } t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[T = n] x^n.$$

i. Établir que pour tout réel $x \in [0, 1[$,

$$t(x) = (x - 1) \left(d(x) + \frac{x^2}{2(2 - x)} \right) + x.$$

ii. Montrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$

$$\frac{t(x) - t(1)}{x - 1} = \frac{x^2}{2(2 - x)} + d(x) + 1.$$

iii. En s'inspirant de la question 2(e)v, justifier que $d(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} d(1)$.

iv. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance, valant $\frac{13}{2}$.

```

1  import numpy.random as rd
2  x=0;y=0;k=0
3  while (x<3)and(y<3):
4      r=rd.binomial(1,1/2)
5      if r==1: print("pile")
6      else: print("face")
7      k=k+1
8      if r==1:
9          if x>=1:
10             x=2
11          else:
12             x=1
13          if y>=1:
14             y=y+1
15      else:
16          y=1
17          if x==2:
18             x=3
19          else:
20             x=0
21  if x==3:
22      print("___")
23  else:
24      print("___")

```

4) Simulation informatique

On considère le script python ci-contre :

a) Donner, sous forme d'un tableau, les valeurs successives prises par les variables k, x, y lors de l'exécution du script `gagnant.py`, si les valeurs prises par la variable r sont successivement :

i. 1, 1, 1, 1, 1, 0.

ii. 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1.

iii. 1, 0, 1, 0, 1, 1.

b) Que représente les valeurs successivement prises par la variable k lors de l'exécution du script ?

c) Observer le contexte des lignes 10, 12 et 18 : quand est-ce que la variable x passe-t-elle à 2, puis à 3 ?

d) Observer le contexte des lignes 16 et 14 : quand est-ce que la variable y est-elle mise à 1, et quand augmente-t-elle ?

e) Quels textes pourrait-on substituer aux "___" ? Qu'afficherait alors l'ordinateur dans les trois cas précédents ?

Correction

Deuxième partie

Correction

7 Des suites, des séries

Exercice 1 (Inspiré d'EDHEC 2010)

(Voir l'énoncé)

1) On calcule que

$$\begin{aligned}u_0 &= 1 + 1 = 2, \\u_1 &= (1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3, \\u_2 &= (1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}.\end{aligned}$$

2) a) On va montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.

En effet,

— $u_0 = 2 \geq 2$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n \geq 2$.

$$u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \geq 2.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Comme $\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \geq 1$, on en déduit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, et donc que (u_n) est croissante.

3) a) Posons la fonction

$$\begin{aligned}f :]-1, \infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longmapsto \ln(1+x) - x.\end{aligned}$$

Sa dérivée vaut, pour tout $x \in]-1, \infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$

On en déduit le tableau de variations :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0 $-$	
$f(x)$		0	

Il suit donc que pour tout réel x strictement supérieur à -1 , $f(x) \leq 0$, i.e. $\ln(1+x) \leq x$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) = \ln \left(\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \right) = \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

D'après la question précédente, $\ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$, donc

$$\ln(u_n) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 2.$$

- 4) On a donc montré que la suite (u_n) était croissante, et bornée par 2 et e^2 . Par théorème de la limite monotone, elle converge donc vers une limite $\ell \in [2, e^2]$.

Exercice 2 (Inspiré d'Éricome 1999)

(Voir l'énoncé)

- 1) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, son équation associée est

$$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0,$$

de discriminant $\Delta = \frac{13}{9}$, ses racines sont donc au nombre de deux et valent

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \text{ et } r_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}.$$

Il existe donc deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right)^n + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{6} \right)^n.$$

- 2) Comme r_1 et r_2 sont compris entre -1 et 1 , r_1^n et r_2^n tendent tous deux vers 0, et donc x_n aussi, quelque soient les valeurs de λ et μ .
- 3) a) On montre par récurrence double que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$.
 — Par hypothèse, $u_0 = a \geq 1$ et $u_1 = b \geq 1$.
 — Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$. Alors

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} \geq \sqrt{1} + \sqrt{1} \geq 1.$$

- b) Supposons que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ . En passant à la limite dans l'expression $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$, on obtient que

$$\ell = 2\sqrt{\ell},$$

ce qui n'est possible que pour $\ell = 0$ ou $\ell = 4$. Comme $u_n \geq 1$, $\ell \geq 1$, donc $\ell = 4$.

- 4) a) Supposons que (v_n) converge vers 0. Dans ce cas, comme $u_n = (2v_n + 2)^2$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (2 \times 0 + 2)^2 = 4$.
 b) Calculons

$$\begin{aligned} 2(2 + v_{n+2})v_{n+2} &= 2 \left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1 \right) \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1 \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} + 1 \right) \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1 \right) \\ &= 2 \left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} \right)^2 - 1^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}u_{n+2} - 2 \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}) - 2 \\ &= v_{n+1} + v_n, \end{aligned}$$

ce qui donne bien que pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}.$$

c) On a vu que pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} u_n &\geq 1 \\ v_n &\geq \frac{1}{2}\sqrt{1} - 1 \\ 2 + v_n &\geq 2 - \frac{1}{2} \\ 2(2 + v_n) &\geq 2\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2(2 + v_n)} &\leq \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$0 \leq \frac{1}{2(2 + v_{n+2})} \leq \frac{1}{3}.$$

d) Pour tout entier naturel n ,

$$|v_{n+2}| = \left| \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})} \right| = \frac{|v_{n+1} + v_n|}{|2(2 + v_{n+2})|} \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|).$$

e) Commençons par montrer par récurrence double que pour tout entier naturel n , $|v_n| \leq x_n$:

- $|v_0| = x_0 \leq x_0$ et $|v_1| = x_1 \leq x_1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $|v_n| \leq x_n$ et $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$. D'après la question précédente,

$$|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|) \leq \frac{1}{3}(x_{n+1} + x_n) = x_{n+2}.$$

Comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d'après la question 2, on obtient bien que la suite (v_n) converge vers 0, et donc, d'après la question 4a, la suite (u_n) converge vers 4.

Exercice 3 (Inspiré d'ECRICOME 2007)

(Voir l'énoncé) Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par

$$f_a(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{a^2}{t} \right)$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_a(u_n).$$

1) **Étude des variations de la fonction f_a .**

a) $\frac{1}{2} \left(t + \frac{a^2}{t} \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(+\infty + 0) = +\infty.$

On calcule à présent

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{t^2} \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

et enfin

$$f(t) - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} \frac{a^2}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

on a donc une asymptote oblique en $+\infty$, d'équation $y = \frac{1}{2}x$, et comme la formule précédente est positive, on en déduit que la courbe est au-dessus de l'asymptote.

b) On a aussi, puisque $\frac{a^2}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty$, que

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty.$$

On a donc une asymptote verticale en 0.

c) f_a est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$ comme fraction rationnelle, et

$$f'_a(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{t^2} \right).$$

Cette dérivée est négative sur $]0, a]$ et positive sur $[a, +\infty[$: f_a est décroissante sur $]0, a]$ et croissante sur $[a, +\infty[$. On en déduit le tableau de variation :

t	0	e	$+\infty$
$f'(t)$		- 0 +	
$f(t)$	$+\infty$	a	$+\infty$

d) On déduit du raisonnement précédent que f_a admet un minimum local en a , qui vaut a :

$$\forall t > 0 \quad f_a(t) \geq a.$$

2) Étude de la convergence de la suite (u_n) .

a) Puisque $f_a(a) = a$, on montre par une récurrence immédiate que, si $u_0 = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$, la suite est constante.

b) On reprend la formule de f'_a :

$$f'_a(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{t^2} \right) \leq \frac{1}{2} (1 - 0) \leq \frac{1}{2}.$$

Enfin, si $t > a$, $\frac{a^2}{t^2} < 1$ et $f'_a(t) > 0$.

c) Quelque soit l'entier n non nul, $u_n = f_a(u_{n-1}) \geq a$ puisque f_a est minorée par a !

d) On applique le théorème des accroissements finis entre u_n et a à la fonction f_a , qui est bien C^1 sur $[a, u_n]$: comme, pour tout $t \in [a, u_n]$

$$f'_a(t) \leq \frac{1}{2},$$

$$u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a),$$

et comme $u_{n+1} \geq a$, on a bien le résultat.

Montrons à présent par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n |u_0 - a|.$$

— La formule des accroissements finis donne exactement

$$|u_2 - a| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^1 |u_1 - a|.$$

— Soit $n \geq 1$, supposons que $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} |u_1 - a|$. Alors

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{n+1} - a &\leq \frac{1}{2}(u_n - a), \\ |u_{n+1} - a| &\leq \frac{1}{2}|u_n - a| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} |u_1 - a| \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \right)^n |u_1 - a|. \end{aligned}$$

e) Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et donc, par théorème des gendarmes, $|u_{n+1} - a| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui signifie bien que la suite (u_n) converge vers a .

f) On a donc vu que la suite (u_n) ainsi définie, pour $f_{\sqrt{2}} : x \mapsto \frac{1}{2} \left(t + \frac{2}{t}\right)$, et $u_0 = 1$ converge vers $\sqrt{2}$. On peut donc proposer le programme suivant :

```
import numpy as np

U=np.zeros(100);
U[0]=1
for i in range(1,100):
    U[i]=(U[i-1]+2/U[i-1])/2
print(U)
```

Exercice 4 (Inspiré d'Écrisome 2001)

(Voir l'énoncé) On s'intéresse, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, à l'équation en $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(E_n) : \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2n} = a.$$

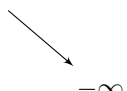
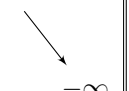
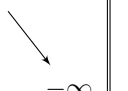
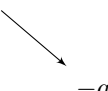
On introduit ainsi la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2n} - a.$$

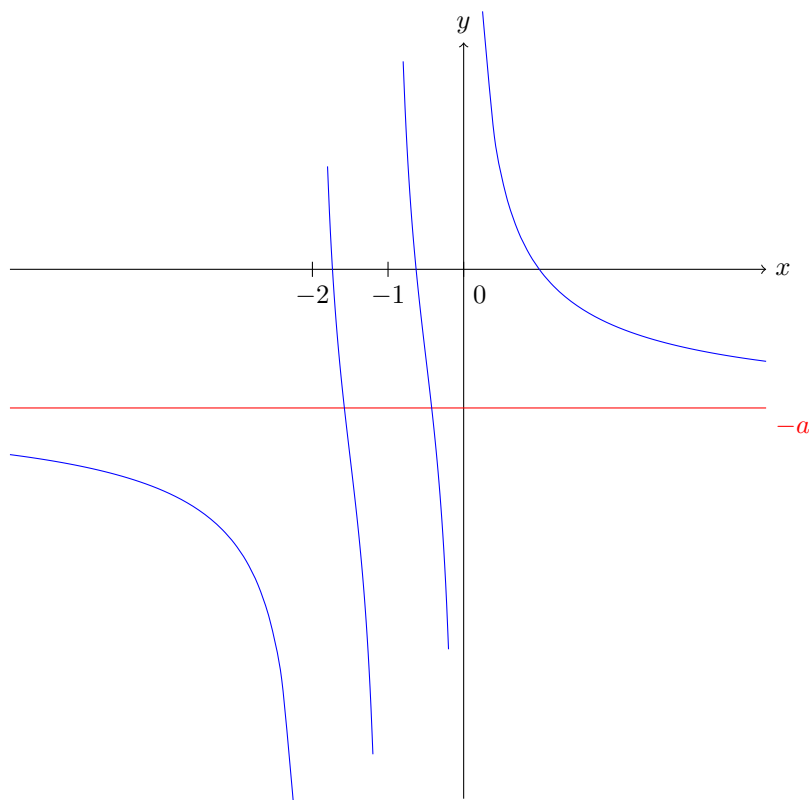
- 1) a) On commence par identifier le domaine de définition de f_1 . Les valeurs interdites sont $x = 0, -1, -2$. f_1 est donc définie sur les intervalles $] -\infty, -2[,] -2, -1[,] -1, 0[$ et $]0, +\infty[$. On calcule alors sa dérivée : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'_1(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} < 0,$$

La fonction f_n est ainsi décroissante sur chaque intervalle de son ensemble de définition. Un calcul simple des limites donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	$-a$  $-\infty$	$+\infty$  $-\infty$	$+\infty$  $-\infty$	$+\infty$  $-a$	

- b) On a donc le graphe suivant



c) Il suffit de mettre sous même dénominateur :

$$\begin{aligned}
 (E_1) &\iff \frac{(x+1)(x+2) + x(x+2) + x(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{11}{6} \\
 &\iff \frac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{11}{6} \\
 &\iff 6(3x^2 + 6x + 2) - 11(x^3 + 3x^2 + 2x) = 0 \\
 &\iff 11x^3 + 15x^2 - 14x - 12 = 0.
 \end{aligned}$$

d) On remarque que $f_1(1) = 0$, on a donc une première racine du polynôme, que l'on peut donc factoriser sous la forme

$$P = (X - 1)(11X^2 + 26X + 12),$$

factorisation que l'on complète en calculant le discriminant du nouveau polynôme de degré 2 obtenu, $\Delta = 148 = 4 \times 37$, pour trouver finalement que

$$(E_1) \iff x = 1, \frac{13 \pm \sqrt{37}}{11}.$$

- 2) a) On commence par identifier le domaine de définition de f_n . Les valeurs interdites sont $x = k$, $k \in \llbracket -2n, 0 \rrbracket$. f_n est donc définie sur les intervalles $] -\infty, -2n[$, $]0, +\infty[$ et $]k, k+1[$, $k \in \llbracket -2n, 1 \rrbracket$.

On calcule alors sa dérivée : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'_n(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \dots - \frac{1}{(x+2n)^2} < 0,$$

La fonction f_n est ainsi décroissante sur chaque intervalle de son ensemble de définition. Un calcul simple des limites donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-2n$	$-2n+1$	$\dots$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-a$ 	$+\infty$ 	$+\infty$ 	$\dots$ 	$+\infty$ 	$-a$

- b) D'après le théorème de la bijection monotone, on voit que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur chaque intervalle du domaine de définition, sauf $] -\infty, -2n[$, ce qui donne au total $2n + 1$ solutions.
- 3) a) La plus grande solution est la solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$, elle est donc strictement positive.
- b) Si l'on somme la formule pour $y = x + k$, $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, on obtient

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + a < \sum_{k=1}^{2n} \ln \left(\frac{x+k}{x+k-1} \right) < f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a.$$

On remarque que le terme central est une somme télescopique, ainsi

$$\sum_{k=1}^{2n} \ln \left(\frac{x+k}{x+k-1} \right) = \sum_{k=1}^{2n} \ln(x+k) - \ln(x+k-1) = -\ln(x) + \ln(x+2n) = \ln \left(1 + \frac{2n}{x} \right).$$

- c) Si l'on prend la formule suivante en $x = x_n$ (qui est bien strictement positif), on obtient, comme $f_n(x_n) = 0$,

$$a - \frac{1}{x_n} < \ln \left(1 + \frac{2n}{x_n} \right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.$$

- d) En prenant la seconde inégalité, on trouve que

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{2n}{x_n} \right) &< a - \frac{1}{x_n + 2n} < a \\ 1 + \frac{2n}{x_n} &< e^a \\ \frac{2n}{x_n} &< e^a - 1 \\ \frac{2n}{e^a - 1} &< x_n. \end{aligned}$$

- e) Comme $\frac{2n}{e^a - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, d'après le théorème de minoration, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On en déduit que $a - \frac{1}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ et $a - \frac{1}{x_n + 2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, et donc, d'après le théorème des gendarmes, que $\ln \left(1 + \frac{2n}{x_n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

- f) On en déduit que $1 + \frac{2n}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^a$, et donc que $\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^a - 1}$.

Exercice 5 (Inspiré d'E.M. LYON 1998)

(Voir l'énoncé)

- 1) Soit $x \in [-1, 1[$.

- a) On utilise la formule de la somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t},$$

ce qui donne le résultat demandé.

b) On en déduit, pour $t \in [-1, x]$, comme $0 \leq 1 - x \leq 1 - t \leq 2$, que

$$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-t} \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}.$$

c) Commençons par $x \geq 0$. On intègre l'encadrement précédent entre 0 et x , qui donne que

$$\begin{aligned} - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x} dt &\leq \int_0^x \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k dt \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x} dt \\ - \left[\frac{t^{n+2}}{(n+2)(1-x)} \right]_0^x &\leq \left[-\ln(1-t) - \sum_{k=0}^n \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x \leq \left[\frac{t^{n+2}}{(n+2)(1-x)} \right]_0^x \\ - \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)} &\leq -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne l'inégalité voulue puisque $x = |x| \leq 1$.

Les calculs pour $x < 0$ sont très similaires : on intègre l'encadrement précédent entre 0 et x , qui donne que

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1-x} dt &\leq \int_0^x \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k dt \leq - \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1-x} dt \\ \left[\frac{(-t)^{n+2}}{(n+2)(1-x)} \right]_0^x &\leq \left[-\ln(1-t) - \sum_{k=0}^n \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x \leq - \left[\frac{(-t)^{n+2}}{(n+2)(1-x)} \right]_0^x \\ \frac{(-x)^{n+2}}{(n+2)(1-x)} &\leq -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \leq - \frac{(-x)^{n+2}}{(n+2)(1-x)}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne l'inégalité voulue puisque $-x = |x| \leq 1$.

d) On déduit de l'inégalité précédente, puisque $\frac{1}{(n+2)(1-x)}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, que

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(1-x),$$

c'est-à-dire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

On peut appliquer ce résultat à $x = \frac{1}{2}$, qui donne que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln(2).$$

2) Introduisons les événements suivants associés à l'expérience précédente :

— P_n : « le n ième lancer donne pile. »

— G : « le joueur gagne la loterie. »

D'après l'énoncé, les événements (P_n) sont mutuellement indépendants, et chacun de probabilité

$\frac{1}{2}$. De plus, si on note $L_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{P_k} \cap P_n$ l'événement « la loterie contient n billets » (ou le premier pile est obtenu au n ième lancer), on a que $\mathbb{P}_{L_n}(G) = \frac{1}{n}$.

On a bien sûr que $G = \bigcup_{n \geq 1} L_n \cap G$, et $\mathbb{P}(L_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, par indépendance des lancers. Ceci nous

donne, d'après le théorème de la limite monotone, que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(G) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^N L_n \cap G \right) \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(L_n \cap G) \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(L_n) \mathbb{P}_{L_n}(G) \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n2^n} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2).
 \end{aligned}$$

Exercice 6

(Voir l'énoncé) Inspiré d'ESC 2009

- 1) a) La dérivée de h est donnée par la formule, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x-1)(x^2 + x + 1).$$

Le polynôme $X^2 + X + 1$ ayant un discriminant négatif ($\Delta = -3$), la forme est bien factorisée.

- b) On en déduit le signe de h' et les variations de h :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	-2	$+\infty$

- c) h est donc continue, strictement monotone, sur les intervalles $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$, donc y définit une bijection sur les ensembles image correspondants (ici, $] -2, +\infty[$ dans les deux cas). Comme $0 \in] -2, +\infty[$, on a bien un unique antécédent à 0 par h dans chaque intervalle de départ.
- d) On a bien vu que l'une des solution est dans $] -\infty, 1[$ et l'autre dans $]1, +\infty[$. Comme $h(0) = 1 > 0$, on en déduit aussi que la première solution est bien positive.
- e) On peut proposer le code suivant :
- ```
def h(x):
 y=x**4-4*x+1
 return y
```

- 2) a) On peut calculer la dérivée de  $g$  : pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$g'(x) = \frac{4x^3}{4} = x^3,$$

qui est positif pour  $x \in [0, 1]$ , la fonction est donc croissante, de  $g(0) = \frac{1}{4}$  à  $g(1) = \frac{1}{2}$ .

- b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

— Initialisation : on a bien que

$$0 \leq u_0 = 0 \leq u_1 = \frac{1}{4} \leq 1.$$

— Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ . Puisque  $g$  est croissante sur  $[0, 1]$ , on trouve que

$$\begin{aligned} g(0) &\leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1). \\ 0 &\leq g(0) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq g(1) \leq 1. \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

c) La suite  $(u_n)$  est donc croissante et bornée, elle converge donc.

d) On a bien sûr que

$$g(\alpha) = \alpha \iff \frac{\alpha^4 + 1}{4} = \alpha \iff \alpha^4 - 4\alpha + 1 = 0$$

ce qui est vrai par définition de  $\alpha$ .

Pour conclure, notons  $\ell$  la limite de  $(u_n)$ . Comme  $g$  est continue, on peut passer à la limite dans la formule  $g(u_n) = u_{n+1}$  (vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ) pour obtenir que

$$g(\ell) = \ell \iff \frac{\ell^4 + 1}{4} = \ell \iff \ell^4 - 4\ell + 1 = 0.$$

$\ell$  est donc racine de  $h$ , donc  $\ell = \alpha$  ou  $\ell = \beta$ . Or  $\ell \leq 1$ , et  $\beta > 1$ , donc  $\ell = \alpha$ .

*Exercice 7 (inspiré d'ÉCRICOME 2019)*

(Voir l'énoncé) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $h_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$\forall x > 0 \quad h_n(x) = x^n + \frac{1}{x^n} + 1.$$

- 1) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction  $h_n$  est une somme de polynôme et d'inverse de polynôme, et est donc de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, pour tout  $x > 0$ ,

$$h'_n(x) = nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} = n \frac{x^{2n} - 1}{x^{n+1}}.$$

$h'_n$  est donc négative sur  $]0, 1[$ , où la fonction  $h_n$  est donc décroissante, et positive sur  $[1, +\infty[$ , où la fonction  $h_n$  est donc croissante.

- 2) D'après la monotonie et la continuité de  $h_n$ , on déduit du théorème de la bijection monotone que  $h_n$  définit une bijection de  $]0, 1[$  sur  $]3, +\infty[$  et de  $[1, +\infty[$  sur  $[3, +\infty[$  (les calculs des limites aux bords sont immédiats). Comme 4 est bien dans ces deux domaines, on en déduit que l'équation  $h_n(x) = 4$  admet exactement deux solutions, notées  $u_n$  et  $v_n$ , et vérifiant  $0 < u_n < 1 < v_n$ .
- 3) a) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + 1 - x^n - \frac{1}{x^n} - 1 \\ &= \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x}{x^{n+1}} \\ &= \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

(la dernière égalité pouvant être obtenue par la division euclidienne du polynôme  $X^{2n+2} - X^{2n+1} - X + 1$  par  $X - 1$ )

- b) La formule précédente montre bien que  $h_{n+1}(x) - h_n(x) > 0$  pour tout  $x \neq 1$ . En évaluant en  $x = v_n$ , on trouve que  $h_{n+1}(v_n) - 4 > 0$ , c'est-à-dire  $h_{n+1}(v_n) \geq 4$ .

- c) On a vu que  $h_{n+1}$  était croissante sur  $[1, +\infty[$ , et que  $h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1}) (= 4)$ . Donc  $v_n \geq v_{n+1}$ , la suite  $(v_n)$  est bien décroissante.
- 4) a) La suite  $(v_n)$  est donc décroissante, et minorée par 1. Elle converge donc vers un réel  $\ell \geq 1$ .  
 b) Supposons que  $\ell > 1$ . La suite  $(v_n)$ , étant décroissante, est nécessairement supérieure à  $\ell$ , et donc  $v_n \geq \ell^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . On aurait donc  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , ce qui est impossible puisque  $(v_n)$  converge.  
 c) La suite  $(v_n)$  converge donc vers 1, seule valeur non contradictoire.
- 5) a) Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} h_n(3) &= 3^n + \frac{1}{3^n} + 1 \\ &\geq 3^n + 1 \\ &\geq 4 = h_n(v_n) \\ \implies 3 &\geq v_n. \end{aligned}$$

- b) On peut proposer le programme suivant :

```
def h(n,x):
 y=x**n+1/x**n+1
 return y
```

- c) On propose la complétion suivante :

```
def v(n):
 a=1
 b=3
 while (b-a)>10**(-5):
 c=(a+b)/2
 if h(n,c)<4:
 a=c
 else:
 b=c
 return c
```

- 6) Le programme trace une valeur approchée à  $10^{-5}$  près des 20 premiers termes de la suite  $(v_n^n)$ . Cette suite semble constante.
- 7) On sait que  $v_n^n + \frac{1}{v_n^n} + 1 = 4$ ,  $v_n^n$  est donc solution de l'équation

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} + 1 = 4 &\iff x^2 + x + 1 = 4x \\ &\iff x^2 - 3x + 1 = 0. \end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré, de discriminant  $\Delta = 9 - 4 = 5$ , dont les deux solutions sont

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Seule  $x_2$  est supérieure à 1 (que doit être  $v_n^n$ ), on a donc  $\forall n \geq 1$   $(v_n)^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ . (N.B.  $x_1$  est très vraisemblablement la valeur de  $u_n^n$  !)

- 8) Puisque  $v_n^n = x_2$ , on a une formule explicite pour  $v_n = (x_2)^{\frac{1}{n}}$ , qui converge bien vers 1.

*Exercice 8 (inspiré d'EM Lyon 2019)*  
 (Voir l'énoncé) **À rédiger !**

### 1) Étude d'une fonction

- a) Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$ . Dresser le tableau des variations de  $f$  en précisant les limites en 0 et en  $+\infty$ .

- b) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  vers  $]2, +\infty[$ .
- c) On note  $g : ]2, +\infty[ \rightarrow ]1, +\infty[$  la réciproque de la restriction de  $f$  à  $]1, +\infty[$ .
- Dresser le tableau de variations de  $g$ .
  - Justifier que la fonction  $g$  est dérivable sur  $]2, +\infty[$ .
  - Soit  $y \in ]2, +\infty[$ . En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation  $f(t) = y$  d'inconnue  $t \in ]1, +\infty[$ . En déduire une expression de  $g(y)$  en fonction de  $y$ .

## 2) Étude d'une suite

On introduit la suite  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(u_n). \end{cases}$$

- a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  existe et est supérieur à 1.
- b) Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **python** suivante afin que, prenant en argument un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , elle renvoie la valeur de  $u_n$ .

```

1 def suite(n):
2 u=1
3 for k in range(____):
4 u=____
5 return u

```

- c) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$ .
  - En déduire la nature de la série  $\sum v_n$ .
  - Calculer, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,  $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$ .  
En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ , que l'on ne cherchera pas à déterminer.
- d) Montrer que, pour tout entier  $k \geq 2$ , on a

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt.$$

- e) Pour tous entiers  $n$  et  $p$  tels que  $2 \leq p < n$ , calculer  $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$  et en déduire que

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

- f) En déduire, pour tout entier  $n \geq 3$ , que  $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$ . Montrer alors que  $\ell \in [2, 3]$ .
- g) Montrer, pour tout entier  $p$  supérieur ou égal à 2, que

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$

- h) En déduire une fonction **python** qui renvoie une valeur approchée de  $\ell$  à  $10^{-4}$  près.

## 8 Des fonctions

*Exercice 9 (Inspiré d'EML 2012)*

(Voir l'énoncé)



- 1) La fonction est continue sur  $]0, +\infty[$  car  $t \mapsto t \ln(t)$  y est bien définie, et y est continue comme produit de fonctions continues usuelles. De plus,  $f$  est continue en 0 car  $t \ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0 = f(0)$ .
- 2)  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  comme produit de fonctions usuelles de classe  $C^1$ . On a de plus, pour tout  $t > 0$ ,

$$f'(t) = \ln(t) + \frac{t}{t} = \ln(t) + 1.$$

- 3) On trouve que  $f'$  est positive sur  $[e^{-1}, +\infty[$ , négative sur  $]0, e^{-1}]$ . Elle est donc décroissante, puis croissante. Par multiplication de limites, comme  $\ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , on trouve que  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

On obtient donc le tableau de variations :

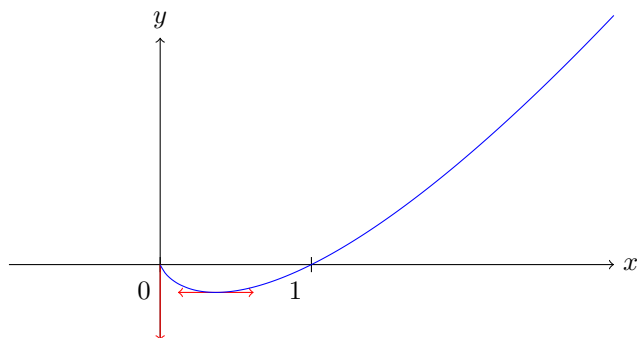
|         |   |           |           |
|---------|---|-----------|-----------|
| $t$     | 0 | $e^{-1}$  | $+\infty$ |
| $f'(t)$ |   | - 0 +     |           |
| $f(t)$  | 0 | $-e^{-1}$ | $+\infty$ |

- 4) La dérivée de  $f$  est croissante sur  $]0, +\infty[$  (car  $\ln$  est croissante, ou car sa dérivée  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est positive).  $f$  est donc convexe sur  $]0, +\infty[$ .
- 5) a) Pour trouver une éventuelle demi-tangente en 0 à  $\Gamma$ , on peut étudier le taux d'accroissement en 0, ou la limite de sa dérivée.  $f'(t) = \ln(t) + 1 \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} -\infty$ , donc  $\Gamma$  admet une demi-tangente en 0, verticale, d'équation  $x = 0$  ( $y < 0$ )
- b) On résoud, pour  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \\ \iff t \ln(t) &= 0 \\ \iff \ln(t) &= 0 \\ \iff t &= 1. \end{aligned}$$

Comme  $f(0) = 0$ ,  $\Gamma$  coupe l'axe des abscisses en deux points,  $(0, 0)$  et  $(1, 0)$ .

- c) On étudie la limite de  $\frac{f(t)}{t} = \ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . On a donc une asymptote parabolique de direction  $(Oy \text{ en } +\infty)$ .
- d) On obtient la courbe suivante :



### Exercice 10 (Inspiré d'EDHEC 2002)

(Voir l'énoncé)

- 1) a) Comme  $1 + x^2 > 0$  pour tout réel  $x$ , la fonction  $x \mapsto \frac{-x \ln(x)}{1+x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme produit bien défini de la fraction rationnelle  $x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$  et de la fonction logarithme. Il reste donc à vérifier que  $f$  est continue en 0. Regardons pour cela sa limite à droite.

Comme  $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  et que  $1 + x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$ , on en déduit que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 = f(0)$$

et la fonction  $f$  est donc bien continue en 0, donc sur  $\mathbb{R}_+$ .

- b) Comme  $\frac{-x}{1+x^2} < 0$  pour tout réel  $x$  positif, la fonction  $f$  est donc du signe opposé à  $\ln(x)$ ,  $f(x)$  est donc positif sur  $[0, 1]$  et négatif sur  $[1, +\infty[$ .
- 2) a) Comme on l'a vu,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , et elle y admet donc des primitives. Par définition de l'intégrale, son unique primitive qui s'annule en 0 est exactement la fonction  $F$ . Cette fonction est même dérivable, de dérivée  $f$ .
- b) Pour tout  $t \geq e$ ,  $\ln(t) \geq 1$ , et donc  $f(t) \leq \frac{-t}{1+t^2}$ .
- c) Pour  $x \geq e$ , on a que

$$F(x) = \int_0^e f(t)dt + \int_e^x f(t)dt = F(e) + \int_e^x f(t)dt$$

Puisque pour  $t \geq e$ ,  $f(t) \leq \frac{-t}{1+t^2}$ , on obtient, en intégrant cette inégalité, que

$$\begin{aligned} \int_e^x f(t)dt &\leq \int_e^x \frac{-t}{1+t^2}dt \\ &\leq \left[ -\frac{\ln(1+t^2)}{2} \right]_e^x \\ &\leq -\frac{\ln(1+x^2)}{2} + \frac{\ln(1+e^2)}{2}, \end{aligned}$$

et donc que

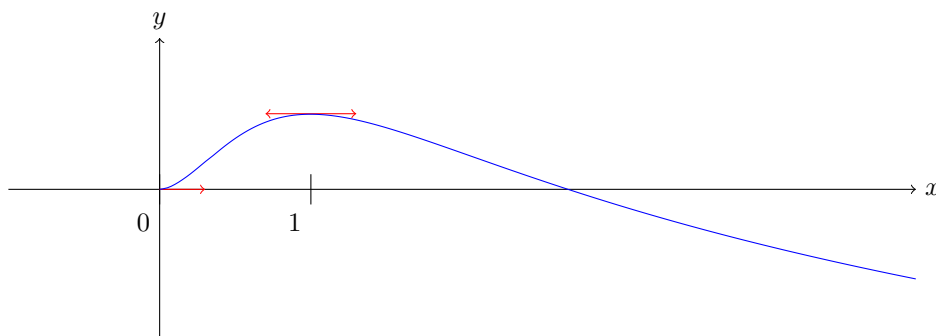
$$F(x) \leq F(e) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \frac{\ln(1+e^2)}{2}.$$

Comme  $-\frac{\ln(1+x^2)}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ , on en déduit que  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ .

- d) On obtient donc le tableau de variation suivant

|        |   |        |           |
|--------|---|--------|-----------|
| $t$    | 0 | 1      | $+\infty$ |
| $f(t)$ | + | 0      | -         |
| $F(t)$ | 0 | $F(1)$ | $-\infty$ |

et le graphe



- 3) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+$ , on pose  $g(x) = F(x) - x$ .

- a)  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  comme somme de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ .

De plus, pour tout  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} g'(x) &= F'(x) - 1 = f(x) - 1 \\ &= \frac{-x \ln(x)}{1+x^2} - 1 \\ &= \frac{-x \left( \ln(x) + \frac{1+x^2}{x} \right)}{1+x^2} \\ &= \frac{-xh(x)}{1+x^2} \end{aligned}$$

avec  $h(x) = \ln(x) + \frac{1+x^2}{x}$ .

- b) La fonction  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme somme de fonction dérivables, et

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1+x^2-2x^2}{x^2} = \frac{x^2+x-1}{x^2}.$$

On étudie à présent le signe de  $h'(x)$ , qui est le même que  $x^2+x-1$ . On en calcule les racines,  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .  $h'(x)$  est donc positif pour  $x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  (et  $x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ), et négatif entre.  $h'$  admet donc un minimum local en  $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ , valant

$$h(\alpha) = \ln \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) + \sqrt{5} > 0,$$

$h$  est donc positive.

- c) On en déduit que  $g'(x)$ , qui est du signe opposé de  $h(x)$ , est négatif,  $g$  est donc décroissante, et comme  $g(0) = 0$ ,  $g$  elle-même est négative.
- 4) On définit la suite  $(u_n)$  par la donnée de son premier terme  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence; valable pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = F(u_n)$ .
- a) — Initialisation : on a bien  $u_0 = 1 \in [0, 1]$ .  
 — Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $u_n \in [0, 1]$ . Comme on l'a vu, la fonction  $F$  est croissante sur  $[0, 1]$ , donc  $0 = F(0) \leq u_{n+1} \leq F(1)$ . Or, d'après la question précédente,  $g(1) = F(1) - 1 \leq 0$ , donc  $F(1) \leq 1$ , et on a le résultat voulu.
- b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après l'étude de  $g$ , nous savons que  $g$  est négative, et donc que

$$u_{n+1} - u_n = F(u_n) - u_n = g(u_n) \leq 0,$$

donc la suite  $(u_n)$  est décroissante.

- c) La suite  $(u_n)$  est donc décroissante, et bornée, elle converge donc, et sa limite  $\ell$  doit vérifier  $F(\ell) = \ell$ , c'est-à-dire  $g(\ell) = 0$  :  $\ell$  est donc nul.

### Exercice 11 (Inspiré d'ESCP 1999)

(Voir l'énoncé) Pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2, soit  $f_k$  la fonction définie par

$$f_k : x \mapsto \frac{\ln^k(x)}{x-1}.$$

#### 1) Étude des fonctions $f_k$ .

- a) Soit  $k \geq 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\iff \ln^k(x) \text{ existe et } x-1 \neq 0 \\ &\iff x > 0 \text{ et } x \neq 1 \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{D}_f = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . Sur ces deux intervalles, la fonction  $f$  est définie comme le quotient d'un produit de logarithmes, et d'un polynôme, et donc y est de classe  $C^\infty$ .

b) On peut réécrire, pour  $x \in \mathcal{D}_f$ ,

$$f(x) = \ln^{k-1}(x) \frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$$

(on rappelle que  $\frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ )

La fonction  $f_k$  est donc prolongeable par continuité en 1, en posant  $f_k(1) = 0$ .

c) Les fonctions  $\varphi_k$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme produit et somme de logarithmes et de polynômes, et, pour tout  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \varphi'_k(x) &= k - \ln(x) - 1, \\ \text{et } \varphi'_k(x) &> 0 \\ \iff k - \ln(x) - 1 &> 0 \\ \iff \ln(x) &< k - 1 \\ \iff x &< e^{k-1}. \end{aligned}$$

On a donc un maximum global en  $e^{k-1}$  qui vaut

$$\varphi_k(e^{k-1}) = k(e^{k-1} - 1) - e^{k-1}(k-1) = e^{k-1} + k.$$

Les limites aux bornes sont données par  $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  et  $\varphi_k(x) = x(k - \ln(x)) - k \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ .

On a donc les variations suivantes :

| $x$             | 0    | $e^{k-1}$     | $+\infty$ |
|-----------------|------|---------------|-----------|
| $\varphi'_k(x)$ | +    | 0             | -         |
| $\varphi(x)$    | $-k$ | $k + e^{k+1}$ | $-\infty$ |

d) Pour tout  $k \geq 2$ ,  $k + e^{k+1} > 0$ , et la fonction  $\varphi_k$  est continue, strictement décroissante de  $]e^{k-1}, +\infty[$  sur  $] -\infty, k + e^{k+1}[$ . Elle définit donc une bijection de  $]e^{k-1}, +\infty[$  sur  $] -\infty, k + e^{k+1}[$ , et comme  $0 \in ] -\infty, k + e^{k+1}[$ , l'équation  $\varphi_k(x) = 0$  a donc une unique solution dans l'intervalle  $]e^{k-1}, +\infty[$ . De même, la fonction  $\varphi_k$  est continue, strictement croissante de  $]0, e^{k-1}[$  sur  $] -k, k + e^{k+1}[$ . Elle définit donc une bijection de  $]0, e^{k-1}[$  sur  $] -k, k + e^{k+1}[$ , et comme  $0 \in ] -\infty, k + e^{k+1}[$ , l'équation  $\varphi_k(x) = 0$  a donc une unique solution dans l'intervalle  $]0, e^{k-1}[$ . Cette solution est 1 puisque  $\varphi(1) = 0$ . Au total, on a bien une unique solution à l'équation  $\varphi_k(x) = 0$  a donc une unique solution dans l'intervalle  $]1, +\infty[$ .

e) Pour tout  $x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= \frac{\frac{k \ln^{k-1}(x)}{x}(x-1) - \ln^k(x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\ln^{k-1}(x)}{x(x-1)^2} (k(x-1) - x \ln(x)). \end{aligned}$$

f) Remarquons tout d'abord que  $x(x-1)^2$  sera toujours positif.

— Si  $k = 2$ , on a le tableau suivant :

| $x$            | 0 | 1 | $a_2$ | $+\infty$ |   |
|----------------|---|---|-------|-----------|---|
| $\ln(x)$       | — | 0 | +     | +         |   |
| $\varphi_2(x)$ | — | 0 | +     | 0         | — |
| $f_2'(x)$      | + | 0 | +     | 0         | — |
| $f_2(x)$       |   |   |       |           |   |

— Si  $k$  impair, on a le tableau suivant :

| $x$            | 0                                                                      | 1 | $a_k$ | $+\infty$ |   |
|----------------|------------------------------------------------------------------------|---|-------|-----------|---|
| $\ln^{k-1}(x)$ | +                                                                      | 0 | +     | +         |   |
| $\varphi_k(x)$ | −                                                                      | 0 | +     | 0         | − |
| $\varphi(x)$   | −                                                                      | 0 | +     | 0         | − |
| $f'_k(x)$      | $+\infty \longrightarrow 0 \longrightarrow f_k(a_k) \longrightarrow 0$ |   |       |           |   |
| $f_k(x)$       |                                                                        |   |       |           |   |

— Si  $k$  pair, on a le tableau suivant :

| $x$            | 0                                                                                                             | 1 | $a_k$ |   | $+\infty$ |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-------|---|-----------|
| $\ln^{k-1}(x)$ | —                                                                                                             | 0 | +     | + |           |
| $\varphi_k(x)$ | —                                                                                                             | 0 | +     | 0 | —         |
| $\varphi(x)$   | +                                                                                                             | 0 | +     | 0 | —         |
| $f'_k(x)$      | $-\infty \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} 0 \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} f_k(a_k) \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} 0$ |   |       |   |           |
| $f_k(x)$       |                                                                                                               |   |       |   |           |

limites en  $+\infty$  sont obtenues par croissance comparées.

Toutes les

## 2) Étude asymptotique de la suite $(a_k)_{k \geq 2}$ .

a) On sait déjà que  $e^{k-1} < a_k$ . De plus,  $\varphi_k(e^k) = k(e^k - 1) - ke^k = -k < 0 = \varphi_k(a_k)$ , et comme  $\varphi_k$  est décroissante après  $e^{k-1}$ , on en déduit que  $e^k > a_k$ .

b) Comme  $e^{k-1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , on en déduit que  $a_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

c) Remarquons tout d'abord que  $1 + \delta_k > 0$  car  $a_k$  et  $e^k$  le sont tous deux. Pour  $k \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_k((1 + \delta_k)e^k) &= 0 \\ \iff k((1 + \delta_k)e^k - 1) - (1 + \delta_k)e^k \ln((1 + \delta_k)e^k) &= 0 \\ \iff k(1 + \delta_k)e^k - k &= (1 + \delta_k)e^k (\ln((1 + \delta_k)) + k) \\ \iff k(1 + \delta_k)e^k - k &= (1 + \delta_k)e^k \ln((1 + \delta_k)) + k(1 + \delta_k)e^k \\ \iff -k &= (1 + \delta_k)e^k \ln((1 + \delta_k)) \\ \iff -ke^{-k} &= (1 + \delta_k) \ln((1 + \delta_k)). \end{aligned}$$

d) L'équation précédente se réécrit

$$\ln(1 + \delta_k) = -\frac{ke^{-k}}{1 + \delta_k},$$

et  $\frac{ke^{-k}}{1 + \delta_k} > 0$ , d'où

$$|\ln(1 + \delta_k)| = \frac{ke^{-k}}{1 + \delta_k}.$$

On peut ensuite remarquer que

$$\begin{aligned} a_k &\geq e^{k-1} \\ \iff (1 + \delta_k)e^k &\geq e^{k-1} \\ \iff \frac{1}{1 + \delta_k} &\geq e^{-1} \\ \iff \frac{ke^{-k}}{1 + \delta_k} &\geq ke^{1-k}, \\ \text{donc } |\ln(1 + \delta_k)| &\leq ke^{1-k}. \end{aligned}$$

e) Comme le terme de droite tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$  (croissances comparées),  $\ln(1 + \delta_k)$  aussi, et donc  $\delta_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ .

### 3) Calcul approché de $a_4$ .

On peut proposer le programme suivant :

```
import numpy as np

k=4
def v(x):
 y=k*(x-1)-x*np.log(x)
 return y
a=np.exp(k-1);b=np.exp(k);
c=(a+b)/2
while b-a>0.0001:
 if v(c)>0:
 a=c
 else:
 b=c
print("a4 vaut environ",c)
```

#### Exercice 12 (inspiré d'EDHEC08)

(Voir l'énoncé) On considère, pour tout entier naturel  $n > 0$ , la fonction  $f_n$  définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$ .

On appelle  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 5cm.

- 1) a) La fonction  $f_n$  est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  comme somme et quotient de fonctions  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Un simple calcul donne que pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + n \\ f''_n(x) &= -\frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} \\ &= -\frac{e^x(1+e^x)(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^4} \\ &= \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3} \end{aligned}$$

c) Le signe de  $f'_n(x)$  n'est pas immédiatement apparent, mais  $f''_n(x)$  est du signe de  $(e^x-1)$ , c'est à dire du signe de  $x$ .  $f'_n$  a donc un minimum global en 0, valant  $f'_n(0) = -\frac{1}{4} + n > 0$ .  $f'_n$  est donc positive, et  $f_n$  croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2) a) Puisque  $\frac{1}{1+e^x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1$  et  $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , on trouve aisément que

$$\begin{aligned} f_n(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \\ f_n(x) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

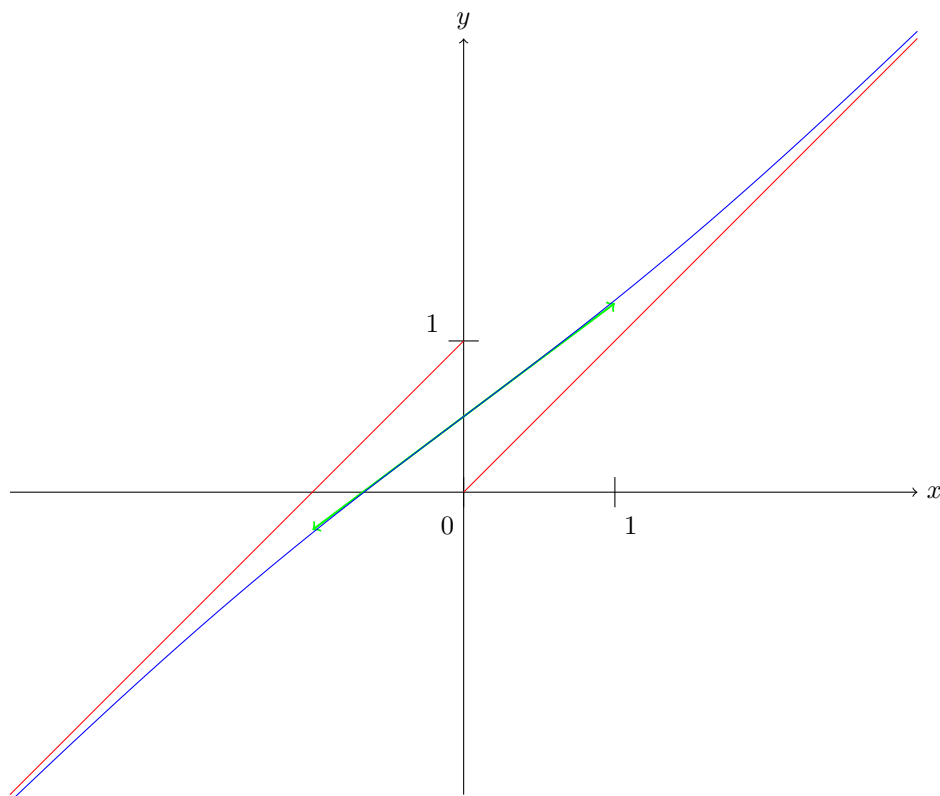
b) On trouve aisément, pour les même raisons que précédemment, que

$$\begin{aligned} f_n(x) - nx &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1 \\ f_n(x) - nx &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

On a donc bien que la droite  $(D_n) \ y = nx$  est asymptote de  $(C_n)$  en  $+\infty$  et que  $(D'_n)$  et d'équation  $y = nx + 1$  est asymptote de  $(C_n)$  en  $-\infty$ .

c) La dérivée seconde s'annule, on l'a vu, en 0. On a donc un seul point d'inflexion  $A_n = (0, \frac{1}{2})$ . La fonction est donc concave sur  $\mathbb{R}_-$  et convexe sur  $\mathbb{R}_+$ .

d) En  $x = 0$ , la dérivée  $f'_n(0) = n - \frac{1}{4}$ . La tangente à la courbe en  $A_1$  a donc pour équation  $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ .



- 3) a) La fonction  $f_n$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , et définit donc une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . 0 a donc un unique antécédant par  $f_n$ , et c'est notre solution  $u_n$ .
- b) Il suffit de remarquer que  $f(-\frac{1}{n}) = -\frac{e^{-\frac{1}{n}}}{1+e^{-\frac{1}{n}}} < 0$  et que  $f(0) = \frac{1}{2} > 0$
- c) Comme  $-\frac{1}{n}$  (et 0) convergent vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ , le théorème des gendarmes affirme que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- d) En revenant à la définition de  $u_n$ , on voit que

$$nu_n = u_n - \frac{1}{1+e^{u_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}.$$

- 4) On peut proposer le programme suivant :

```
import numpy as np

n=int(input("Donner la valeur du paramètre n:"))
p=float(input("À quelle précision voulez-vous obtenir la valeur de u_n?"))
a=1
b=0
while b-a>p:
 c=(a+b)/2
 if 1/(1+np.exp(c))<=n*c then
 a=c
 else:
 b=c
print("Voici une valeur approchée de u_n à "+str(p)+" près:",u)
```



*Exercice 13 (Inspiré d'EDHEC 2009)*

(Voir l'énoncé) Dans cet exercice, on considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $D = ]-\infty, 1[$  par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in D \setminus \{0\} \quad f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)},$$

$$g(0) = -1 \text{ et } \forall x \in D \setminus \{0\} \quad g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

1) On s'intéresse tout d'abord à la fonction  $g$ .

a) Tout d'abord, la fonction  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $D \setminus \{0\}$  comme quotient bien défini d'une fonction logarithme (elle-même, techniquement, composée bien définie de la fonction logarithme et d'un polynôme) et d'un polynôme.

Reste à montrer qu'elle est continue en 0. Mais on peut reconnaître dans  $g$  le taux d'accroissement de la fonction (dérivable en 0)  $x \mapsto \ln(1-x)$  en 0, qui converge donc vers sa dérivée en 0,  $-\frac{1}{1-0}$ . Ainsi,  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 = g(0)$ , et la fonction  $g$  est donc bien continue en 0.

b) La fonction  $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $D$  comme somme de logarithme et de polynôme. De plus, pour tout  $x \in D$ ,

$$h'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 + x$$

$$= \frac{1-x+x-x^2-1}{1-x}$$

$$\text{donc } |h'(x)| = \frac{x^2}{1-x}.$$

c) On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction  $h$ , avec le fait que pour tout  $t \in ]0, x[$  (ou  $]x, 0[$  si  $x < 0$ ),  $|h'(t)| \leq \frac{x^2}{1-|x|}^\ddagger$  pour trouver que, pour tout  $x \in D$ ,

$$|h(x) - h(0)| \leq \frac{x^2}{1-x} |x - 0|$$

$$\text{donc } |h(x)| \leq \frac{|x|^3}{1-x}.$$

d) On en déduit que

$$\frac{\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \left| \frac{h(x)}{x^2} \right|$$

$$\leq \frac{|x|^3}{x^2(1-x)}$$

$$\leq \frac{|x|}{1-x}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi,  $\frac{\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Mais on reconnaît dans cette expression le taux d'accroissement de  $g$  en 0, plus  $\frac{1}{2}$  :

$$\left| T_g(0, x) + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{g(x) - g(0)}{x} + \frac{1}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{x} + \frac{1}{2}}{x} \right|$$

$$= \left| \frac{\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{x^2} \right|$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

---

$\ddagger$ . On remarquera que la fonction  $x \mapsto \frac{x^2}{1-x}$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , décroissante sur  $\mathbb{R}^-$ .

Ainsi  $T_g(0, x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire que la fonction  $g$  est dérivable en 0, avec  $g'(0) = -\frac{1}{2}$ .

e)  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $D \setminus \{0\}$ , comme indiqué précédemment.

- 2) a) Les fonction  $f$  et  $g$  sont liées : en effet, pour tout  $x \in D$ ,  $f(x) = -\frac{1}{(1-x)g(x)}$ . Comme la fonction  $g$  est bien définie, ne s'annule pas sur  $D$ ,  $y$  est dérivable, et sa dérivée ne s'y annule pas non plus, la fonction  $f$  est donc bien dérivable sur  $D$ , et  $f'(x) = \frac{-g(x) + (1-x)g'(x)}{((1-x)g(x))^2}$ . Cette égalité prise en 0 donne  $f'(0) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1^2} = \frac{1}{2}$ . Un simple calcul usuel de dérivée donne aussi, pour  $x \in D \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(1-x)\ln(1-x) - (-x)(-\ln(1-x) - \frac{1-x}{1-x})}{((1-x)\ln(1-x))^2} \\ &= -\frac{\ln(1-x) + x}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2}. \end{aligned}$$

b) Par concavité, on sait que  $\ln(1+x) \leq x$  pour tout  $x > -1$ , donc  $\ln(1-x) \leq -x$  pour tout  $x < 1$ , donc  $\ln(1-x) + x \leq 0$ , et  $f'$  est donc toujours positive.  $f$  est donc croissante.

c) En  $-\infty$ ,  $f(x) = \frac{-1}{\frac{1}{x}-1} \frac{1}{\ln(1-x)} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ ,

En 1, comme  $(1-x)\ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0^-$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$ .

On a donc le tableau de variation suivant :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1$       |
| $f'(x)$ | +         |           |
| $f(x)$  | 0         | $+\infty$ |

- 3) a) La fonction  $f$  étant continue et strictement croissante de  $[0, 1[$  sur  $[1, +\infty[$ , d'après le théorème de la bijection monotone, pour tout entier non nul  $n \in [1, +\infty[$ , il existe un unique réel  $u_n \in [0, 1[$  tel que  $f(u_n) = n$ . Comme  $f(0) = 1$ ,  $u_1 = 0$ .
- b) Comme la fonction  $f^{-1}$  est croissante, comme  $n < n+1$ , on a forcément  $u_n = f^{-1}(n) < f^{-1}(n+1) = u_{n+1}$ . La suite  $(u_n)$  est donc croissante. Elle admet donc une limite, qui ne peut être une limite finie  $\ell$  car alors  $f(u_n) = n$  convergerait vers  $f(\ell)$ . Ainsi,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

## 9 Des intégrales

*Exercice 14 (Inspiré d'ESC 1997)*

(Voir l'énoncé) Pour tout entier naturel, on note

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln(x))^n dx.$$

1) Calculons :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_1^e x^2 \ln(x) dx & u : x &\mapsto \frac{x^3}{3} & u' : x &\mapsto x^2 \\
 & & v : x &\mapsto \ln(x) & v' : x &\mapsto \frac{1}{x} \\
 &= \left[ \frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3x} dx \\
 &= \left[ \frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx \\
 &= \left[ \frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^e - \left[ \frac{x^3}{9} \right]_1^e \\
 &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} \\
 &= \frac{2e^3 + 1}{9}.
 \end{aligned}$$

2) a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in [1, e]$ ,  $0 \leq \ln(x) \leq 1$  et donc

$$[\ln(x)]^{n+1} \leq [\ln(x)]^n.$$

b) On déduit de l'inégalité précédente que pour tout  $x \in [1, e]$ ,

$$0 \leq x^2 [\ln(x)]^{n+1} \leq x^2 [\ln(x)]^n,$$

et donc, en intégrant cette inégalité, que

$$0 \leq \int_1^e x^2 (\ln(x))^{n+1} dx \leq \int_1^e x^2 (\ln(x))^n dx,$$

la suite  $(I_n)$  est donc décroissante et minorée par 0, donc converge vers une limite  $\ell \geq 0$ .

c) L'équation de la tangente à la courbe  $x \mapsto \ln(x)$  au point d'abscisse  $e$  est donnée par la formule

$$y = \ln'(e)(x - e) - \ln(e) = \frac{x}{e}.$$

d) On sait que la fonction  $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ , elle est donc au-dessous de ses tangentes, en particulier de sa tangente en  $e$ . Ceci nous donne donc que pour tout  $x > 0$

$$\ln(x) \leq \frac{x}{e}.$$

e) On déduit de la question précédente que pour tout  $x \in [1, e]$ ,

$$\begin{aligned}
 0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e} &\implies 0 \leq (\ln(x))^n \leq \frac{x^n}{e^n} \\
 &\implies 0 \leq x^2 (\ln(x))^n \leq x^2 \frac{x^n}{e^n}
 \end{aligned}$$

On peut alors intégrer cette inégalité entre 1 et  $e$ , ce qui donne que

$$\begin{aligned}
 0 \leq \int_1^e x^2 (\ln(x))^n dx &\leq \int_1^e \frac{x^{n+2}}{e^n} dx \\
 0 \leq I_n &\leq \left[ \frac{x^{n+3}}{(n+3)e^n} \right]_1^e \\
 0 \leq I_n &\leq \frac{e^{n+3}}{(n+3)e^n} - \frac{1^{n+3}}{(n+3)e^n} \\
 0 \leq I_n &\leq \frac{e^3}{n+3} - \frac{e^{-n}}{(n+3)} \\
 0 \leq I_n &\leq \frac{e^3 - e^{-n}}{(n+3)}.
 \end{aligned}$$

f) Comme  $\frac{e^3 - e^{-n}}{(n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , le théorème des gendarmes nous assure que  $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

3) a) Calculons, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^e x^2 (\ln(x))^n dx & u : x &\mapsto \frac{x^3}{3} & u' : x &\mapsto x^2 \\ & & v : x &\mapsto (\ln(x))^{n+1} & v' : x &\mapsto \frac{n+1}{x} \ln(x)^n \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} (\ln(x))^{n+1} \right]_1^e - \int_0^e (n+1) \frac{x^3}{3x} \ln(x)^n dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} (\ln(x))^{n+1} \right]_1^e - \frac{n+1}{3} \int_0^e x^2 \ln(x)^n dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n. \end{aligned}$$

b) On peut proposer le programme suivant :

```
import numpy as np

eps=float(input("Précision voulue? "))
n=1
I=(2*np.exp(3)+1)/9 // initialisation de I1
while I>eps:
 I=exp(3)/3-(n+1)I
 n=n+1
print("la valeur cherchée est :",n)
```

c) L'équation obtenue peut se réécrire sous la forme

$$nI_n = e^3 - I_n - 3I_{n+1}.$$

Comme  $I_n$  (et donc  $I_{n+1}$ ) tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on trouve que  $nI_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^3$ .

d) En reprenant la même équation, on a à présent que

$$n(nI_n - e^3) = -nI_n - 3nI_{n+1}.$$

Comme  $nI_n$  (et donc  $nI_{n+1} = \frac{n}{n+1}(n+1)I_{n+1}$ ) tend vers  $e^3$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on trouve que

$$n(nI_n - e^3) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -4e^3.$$

e) Posons, pour  $n \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon_n = n(nI_n - e^3) + 4e^3,$$

ce qui nous donne que

$$I_n = \frac{e^3}{n} - \frac{4e^3}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon_n,$$

Les questions précédentes ont montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$ .

*Exercice 15 (Inspiré d'ECRICOME05)*

(Voir l'énoncé)

1) Remarquons déjà que les fonctions intégrées,  $t \mapsto (1-x)^n e^{-2x}$ , sont continues (et même de classe

$C^\infty$ ) sur  $\mathbb{R}$ , donc toutes les intégrales considérées sont bien définies. Calculons à présent

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_0^1 e^{-2x} dx \\
 &= \left[ \frac{-e^{-2x}}{2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1 - e^{-2}}{2}, \\
 I_1 &= \int_0^1 (1-x)e^{-2x} dx \\
 &\quad \text{I.P.P.:} \begin{cases} u(x) = 1-x & u'(x) = -1 \\ v(x) = \frac{-e^{-2x}}{2} & v'(x) = e^{-2x} \end{cases} \\
 &= \left[ (1-x) \frac{-e^{-2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} I_0 \\
 &= \frac{1 + e^{-2}}{4}.
 \end{aligned}$$

- 2) a) Pour  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq 1-x \leq 1$ , ainsi  $0 \leq (1-x)^{n+1} \leq (1-x)^n$  et  $0 \leq (1-x)^{n+1}e^{-2x} \leq (1-x)^ne^{-2x}$ . Intégrer cette inégalité entre  $0 < 1$  donne  $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ . La suite  $(I_n)$  est donc décroissante.
- b) La question précédente a aussi montré que la suite  $(I_n)$  est toujours positive.
- c) La suite  $(I_n)$  est donc décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite positive.
- 3) a) Pour  $x \in [0, 1]$ ,  $g(x) = e^{-2x} \leq g(0) = 1$ , car la fonction  $g$  est décroissante.
- b) On en déduit que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq (1-x)^ne^{-2x} \leq (1-x)^n$  et donc que

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_0^1 (1-x)^ne^{-2x} dx \leq \int_0^1 (1-x)^n dx \\
 \Rightarrow 0 &\leq I_n \leq \left[ \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\
 \Rightarrow 0 &\leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

c) Comme  $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on a (par théorème des gendarmes)  $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

- 4) a) Calculons :

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &= \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-2x} dx \\
 &\quad \text{I.P.P.:} \begin{cases} u(x) = (1-x)^{n+1} & u'(x) = -(n+1)(1-x)^n \\ v(x) = \frac{-e^{-2x}}{2} & v'(x) = e^{-2x} \end{cases} \\
 &= \left[ (1-x)^{n+1} \frac{-e^{-2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)(1-x)^n \frac{e^{-2x}}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} \int_0^1 (1-x)^ne^{-2x} dx \\
 \Leftrightarrow 2I_{n+1} &= 1 - (n+1)I_n.
 \end{aligned}$$

b) On déduit de la question précédente que  $nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

## 10 Des probabilités

### 10.1 Probabilités classiques

*Exercice 16 (Inspiré d'ESG88)*

(Voir l'énoncé)

- 1) a) Pour chaque entier non nul  $n$ , la famille  $(Q_n, R_n, S_n, T_n, U_n)$  ne forme pas un système complet d'événements ! Ces différents sont bien disjoints, mais il est possible que la  $n^e$  partie ne soit pas jouée si  $n > 2$  (si un joueur a gagné avant) ! Leur réunion n'est donc pas  $\Omega$  tout entier. Pour  $n < 2$ , les événements  $Q_n$  et  $U_n$  sont impossibles. Et pour  $n = 2$ , ce sont les événements  $R_n$  et  $T_n$  qui sont impossibles.

- b) L'énoncé donne les probabilités conditionnelles suivantes, pour  $n > 1$  :

$$\begin{array}{llllll} \mathbb{P}_{Q_{n-1}}(Q_n) = 0 & \mathbb{P}_{R_{n-1}}(Q_n) = \frac{2}{3} & \mathbb{P}_{S_{n-1}}(Q_n) = 0 & \mathbb{P}_{T_{n-1}}(Q_n) = 0 & \mathbb{P}_{U_{n-1}}(Q_n) = 0 \\ \mathbb{P}_{Q_{n-1}}(R_n) = 0 & \mathbb{P}_{R_{n-1}}(R_n) = 0 & \mathbb{P}_{S_{n-1}}(R_n) = \frac{2}{3} & \mathbb{P}_{T_{n-1}}(R_n) = 0 & \mathbb{P}_{U_{n-1}}(R_n) = 0 \\ \mathbb{P}_{Q_{n-1}}(S_n) = 0 & \mathbb{P}_{R_{n-1}}(S_n) = \frac{1}{3} & \mathbb{P}_{S_{n-1}}(S_n) = 0 & \mathbb{P}_{T_{n-1}}(S_n) = \frac{2}{3} & \mathbb{P}_{U_{n-1}}(S_n) = 0 \\ \mathbb{P}_{Q_{n-1}}(T_n) = 0 & \mathbb{P}_{R_{n-1}}(T_n) = 0 & \mathbb{P}_{S_{n-1}}(T_n) = \frac{1}{3} & \mathbb{P}_{T_{n-1}}(T_n) = 0 & \mathbb{P}_{U_{n-1}}(T_n) = 0 \\ \mathbb{P}_{Q_{n-1}}(U_n) = 0 & \mathbb{P}_{R_{n-1}}(U_n) = 0 & \mathbb{P}_{S_{n-1}}(U_n) = 0 & \mathbb{P}_{T_{n-1}}(U_n) = \frac{1}{3} & \mathbb{P}_{U_{n-1}}(U_n) = 0 \end{array}$$

- c) À l'issue de la première partie, seules deux possibilités : soit le joueur  $A$  a gagné, avec probabilité  $\frac{2}{3}$ , et mène avec une partie d'avance, soit c'est le joueur  $B$  (probabilité  $\frac{1}{3}$ ) :

$$q_1 = 0, r_1 = \frac{2}{3}, s_1 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, u_1 = 0.$$

À l'issue de la seconde partie, il est impossible que l'un ou l'autre aie une seule manche d'avance (ce qui est d'ailleurs vrai à l'issue de toutes les parties paires). On peut écrire que :

$$\begin{aligned} q_2 &= \mathbb{P}(R_1 \cap Q_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(Q_2) \\ &= \frac{2}{3} \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \\ r_2 &= 0 \\ s_2 &= \mathbb{P}((R_1 \cap S_2) \cup (T_1 \cap S_2)) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(S_2) + \mathbb{P}(T_1)\mathbb{P}_{T_1}(S_2) \\ &= \frac{1}{3} \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \\ t_2 &= 0 \\ u_2 &= \mathbb{P}(T_1 \cap U_2) = \mathbb{P}(T_1)\mathbb{P}_{T_1}(U_2) \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{3} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

- d) Pour  $n \geq 3$ , on écrit :

$$\begin{aligned} r_n &= \mathbb{P}(S_{n-1} \cap R_n) = \mathbb{P}(S_{n-1})\mathbb{P}_{S_{n-1}}(R_n) \\ &= \frac{2}{3} s_{n-1} \\ s_n &= \mathbb{P}((R_{n-1} \cap S_n) \cup (T_{n-1} \cap S_n)) = \mathbb{P}(R_{n-1})\mathbb{P}_{R_{n-1}}(S_n) + \mathbb{P}(T_{n-1})\mathbb{P}_{T_{n-1}}(S_n) \\ &= \frac{1}{3} r_{n-1} + \frac{2}{3} t_{n-1} \\ t_n &= \mathbb{P}(S_{n-1} \cap T_n) = \mathbb{P}(S_{n-1})\mathbb{P}_{S_{n-1}}(T_n) \\ &= \frac{1}{3} s_{n-1}. \end{aligned}$$

e) On en déduit que, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} s_{2k} &= \frac{1}{3}r_{2k-1} + \frac{2}{3}t_{2k-1} = \frac{1}{3}\frac{2}{3}s_{2k-2} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}s_{2k-2} \\ &= \frac{2}{9}s_{2(k-1)} \\ s_{2k+1} &= \frac{1}{3}r_{2k} + \frac{2}{3}t_{2k} = \frac{1}{3}\frac{2}{3}s_{2k-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}s_{2k-1} \\ &= \frac{4}{9}s_{2(k-1)+1} \end{aligned}$$

ce qui montre bien que les suites  $(s_{2k})$  et  $(s_{2k+1})$  sont géométriques de raison  $\frac{4}{9}$ . On a ainsi les termes généraux suivants :

$$\begin{aligned} r_{2k} &= \frac{2}{3}s_{2k-1} = 0 \\ r_{2k+1} &= \frac{2}{3}s_{2k} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^k \\ s_{2k} &= \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \left(\frac{4}{9}\right)^k \\ s_{2k+1} &= 0 \\ t_{2k} &= \frac{1}{3}s_{2k-1} = 0 \\ t_{2k+1} &= \frac{1}{3}s_{2k} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^k. \end{aligned}$$

2) Pour tout entier  $n$  supérieur à 2, on écrit

$$\begin{aligned} q_n &= \mathbb{P}(R_{n-1} \cap Q_n) = \mathbb{P}(R_{n-1})\mathbb{P}_{R_{n-1}}(Q_n) \\ &= \frac{2}{3}r_{n-1} \\ u_n &= \mathbb{P}(T_{n-1} \cap U_n) = \mathbb{P}(T_{n-1})\mathbb{P}_{T_{n-1}}(U_n) \\ &= \frac{1}{3}r_{n-1}. \end{aligned}$$

3) Pour tout entier  $n$  supérieur à 2, l'événement « le jeu s'arrête à l'issue de la  $n^{\text{e}}$  partie avec la victoire du joueur  $A$  » est l'événement  $Q_n$ , il convient de différencier le cas  $n$  pair du cas  $n$  impair :

$$\begin{aligned} q_{2k} &= \frac{2}{3}r_{2k-1} = \frac{2}{3}\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= \left(\frac{4}{9}\right)^k \\ q_{2k+1} &= \frac{2}{3}r_{2k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, les probabilités de victoire du joueur  $B$  sont données par :

$$\begin{aligned} u_{2k} &= \frac{1}{3}t_{2k-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^k \\ u_{2k+1} &= \frac{1}{3}t_{2k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Enfin, la probabilité de l'événement  $P_n = Q_n \cup U_n$  : « le jeu s'arrête à l'issue de la  $n^{\text{e}}$  partie » est donnée par :

$$\begin{aligned} p_{2k} &= q_{2k} + u_{2k} \\ &= \frac{5}{4} \left( \frac{4}{9} \right)^k \\ p_{2k+1} &= q_{2k+1} + u_{2k+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

4) La probabilité que le jeu s'arrête avant la  $2n^{\text{e}}$  partie est donnée par la somme suivante :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^n p_{2k} \\ &= \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n \left( \frac{4}{9} \right)^k \\ &= \frac{5}{4} \left( \frac{1 - \left( \frac{4}{9} \right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{9}} - 1 \right) \\ &= \frac{5}{4} \left( \frac{1 - \frac{5}{9} - \left( \frac{4}{9} \right)^{n+1}}{\frac{5}{9}} \right) \\ &= \frac{9}{4} \left( \frac{4}{9} - \left( \frac{4}{9} \right)^{n+1} \right) \\ &= 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^n. \end{aligned}$$

De même, la probabilité que  $A$  gagne avant la  $2n^{\text{e}}$  partie est donnée par la somme :

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n q_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{4}{9} \right)^k \\ &= \frac{4}{5} \left( 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^n \right). \end{aligned}$$

Enfin, la probabilité que  $B$  gagne avant la  $2n^{\text{e}}$  partie est donnée par la somme :

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^n u_{2k} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left( \frac{4}{9} \right)^k \\ &= \frac{1}{5} \left( 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^n \right). \end{aligned}$$

5) Le terme  $\left( \frac{4}{9} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , et

$$\begin{aligned} p_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \\ a_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{5} \\ b_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi, la partie est garantie de s'achever à un moment, et le joueur  $A$  a  $\frac{4}{5}$  chances de gagner.



*Exercice 17 (inspiré d'HEC 1998)*

(Voir l'énoncé) Notons  $F_k$  et  $P_k = \overline{F_k}$  les événements « le  $k$ ème lancer tombe sur face (resp. pile) ». Les  $(F_k)$  sont mutuellement indépendants (et donc il en est de même pour les  $(P_k)$ ).

- 1) a) Dans ces calculs, toutes les réunions sont disjointes, et les intersections sont entre événements indépendants :

$$u_1 = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = p^2$$

$$x_2 = \mathbb{P}(P_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2) = (1-p)p$$

$$y_2 = \mathbb{P}((F_1 \cup P_1) \cap P_2) = \mathbb{P}(P_2) = 1-p$$

$$u_2 = \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap F_3) = (1-p)p^2$$

$$x_3 = \mathbb{P}((F_1 \cup P_1) \cap P_2 \cap F_3) = (1-p)p$$

$$y_3 = \mathbb{P}(((F_1 \cup P_1) \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)) = (1-p)^2 + (1-p)p(1-p) = (1-p)^2(1+p)$$

$$u_3 = \mathbb{P}((F_1 \cup P_1) \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4) = (1-p)p^2.$$

- b) Pour  $n \geq 2$ , on a  $U_n = A_n \cap F_{n+1}$ . Par le théorème des coalitions, ces deux événements sont indépendants, et donc

$$u_n = px_n.$$

- c) Pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1})}{\mathbb{P}(A_n)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(A_n)} = 0$$

$$\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_n \cap A_{n+1})}{\mathbb{P}(B_n)} = \frac{\mathbb{P}(B_n \cap F_{n+1})}{\mathbb{P}(B_n)} = \mathbb{P}(F_{n+1}) = p$$

$$\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B_{n+1})}{\mathbb{P}(A_n)} = \frac{\mathbb{P}(A_n \cap P_{n+1})}{\mathbb{P}(A_n)} = \mathbb{P}(P_{n+1}) = 1-p = q$$

$$\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_n \cap B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_n)} = \frac{\mathbb{P}(B_n \cap P_{n+1})}{\mathbb{P}(B_n)} = \mathbb{P}(P_{n+1}) = 1-p = q.$$

- d) On en déduit, par la formule des probabilités totales ( $A_n$  et  $B_n$  forment un système complet d'événements),

$$\begin{cases} x_{n+1} = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) = 0 + py_n \\ y_{n+1} = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) = q(x_n + y_n). \end{cases}$$

- 2) a) On peut proposer le programme suivant :

```
N=int(input("indice du terme à calculer? "))
F=[1 1] #initialisation de F à [f_0 f_1]
for i in range(1,N)
 F=[F[1] F[0]+F[1]]
end
disp("le "+str(N)+"ième terme de la suite vaut",F[1])
```

- b) Montrons par récurrence double que pour tout  $n \geq 2$ ,  $2^n y_n = f_n$ .  
— Initialisation : on a bien que

$$2^2 y_2 = 4 * \frac{1}{2} = 2 = f_2$$

$$2^3 y_3 = 8 * \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3 = f_3$$

— Hérédité : soit  $n \geq 2$ , supposons  $2^n y_n = f_n$  et  $2^{n+1} y_{n+1} = f_{n+1}$ . Calculons

$$\begin{aligned} 2^{n+2} y_{n+2} &= 2^{n+2} \frac{1}{2} (x_{n+1} + y_{n+1}) \\ &= 2^{n+1} \left( \frac{1}{2} x_n + y_{n+1} \right) \\ &= 2^n x_n + 2^{n+1} y_{n+1} \\ &= f_n + f_{n+1} \\ &= f_{n+2}, \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

c) On remarque que  $(f_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est :

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

dont les racines sont  $\alpha$  et  $\beta$ . On en déduit qu'il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n.$$

Résolvons le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_0 = 1 \\ f_1 = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda \alpha + \mu \beta = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ \lambda(\alpha - \beta) = 1 - \beta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ \lambda(\alpha - \beta) = \alpha \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mu = -\frac{\beta}{\alpha - \beta} \\ \lambda = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

d) On en déduit que, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{2^n(\alpha - \beta)} \\ x_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{2^n(\alpha - \beta)} \\ u_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{2^{n+1}(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

e) On calcule

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k - \beta^k}{2^{k+1}(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{\alpha}{2} \right)^k - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\beta}{2} \right)^k \right) \\ &= \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \left( \frac{1 - \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{2}} - \frac{1 - \left( \frac{\beta}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{\beta}{2}} \right). \end{aligned}$$

Comme  $|\alpha| < 1$  et  $|\beta| < 1$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \left( \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{\beta}{2}} \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\alpha - \beta)} \left( \frac{1}{2 - \alpha} - \frac{1}{2 - \beta} \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\alpha - \beta)} \frac{2 - \beta - 2 + \alpha}{(2 - \alpha)(2 - \beta)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2 - \alpha)(2 - \beta)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

- f) La probabilité d'obtenir deux faces consécutives avant le  $n$ ième lancer est donné par la somme calculée précédemment. Cette probabilité converge vers 1 quand  $n \rightarrow +\infty$ , on est donc sûr d'obtenir deux faces consécutives en attendant assez longtemps.

*Exercice 18 (Inspiré d'EDHEC 2013)*

(Voir l'énoncé)

- 1) a) Si au début de l'épreuve, on a une boule blanche et trois boules noires, deux possibilités s'offrent à nous. Soit la boule tirée est blanche (probabilité  $\frac{1}{4}$ ), auquel cas on a plus aucune boule blanche à la fin, et  $X_1 = 0$ , soit on a tiré une boule noire (probabilité  $\frac{3}{4}$ ), auquel cas on a finalement 2 boules blanches à la fin, et  $X_1 = 2$ .

Ceci donne que  $X_1(\Omega) = \{0, 2\}$ , et que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_1 = 0]) &= \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}([X_1 = 2]) &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

- b) Notons  $B_n$  l'événement « tirer une boule blanche au  $n$ ième tirage » et  $N_n = \overline{B_n}$ . On voit bien que le support de  $X_2$  est  $X_2(\Omega) = \{1, 3\}$  : s'il n'y a plus de boule blanche, on tire forcément une boule noire, et  $X_2 = 1$ , et s'il en reste 2, on va soit en ôter une ( $X = 1$ ), soit en ajouter une ( $X = 3$ ).

On calcule à présent, en utilisant le fait que  $[X_1 = 0] = B_1$  et  $[X_1 = 2] = N_1$  forme un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_2 = 1]) &= \mathbb{P}([X_1 = 0])\mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_1 = 2])\mathbb{P}_{[X_1=2]}([X_2 = 1]) \\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(N_2) + \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(B_2) \\ &= \frac{1}{4}1 + \frac{3}{4}\frac{2}{6} = \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}([X_2 = 3]) &= \mathbb{P}([X_1 = 0])\mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2 = 3]) + \mathbb{P}([X_1 = 2])\mathbb{P}_{[X_1=2]}([X_2 = 3]) \\ &= 0 + \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) \\ &= \frac{3}{4}\frac{4}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(On vérifie bien que ces probabilités se somment à 1.)

- 2) Notons  $F$  l'événement « les tirages s'arrêtent en temps fini. », et  $E_n$  l'événement « les tirages commencent avec l'urne dans l'état  $n$ . », de façon à ce que  $e_n = \mathbb{P}_{E_n}(F)$ .

En utilisant le fait qu'après un tirage, on peut considérer que l'on recommence la même expérience, mais dans un état différent ( $n+1$  si on a tiré une boule noire,  $n-1$  si on a tiré une boule blanche), on peut écrire que

$$\begin{aligned} e_n &= \mathbb{P}_{E_n}(F) = \mathbb{P}_{E_n}(B_1)\mathbb{P}_{E_{n-1}}(F) + \mathbb{P}_{E_n}(N_1)\mathbb{P}_{E_{n+1}}(F) \\ &= \frac{n}{2n+2}e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1}. \end{aligned}$$

- 3) a) — Puisque, si l'urne est dans l'état 0, le jeu s'arrête (il n'y a pas de boule blanche), on a  $e_0 = 1$ , et donc  $e_0 \geq e_1$  (qui est une probabilité, donc inférieure à 1).  
 — Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $e_n \geq e_{n+1}$ .  
 On sait que  $e_{n+1} = \frac{n+1}{2n+4}e_n + \frac{n+3}{2n+4}e_{n+2}$ , et donc que

$$\begin{aligned} e_{n+2} &= \left( e_{n+1} - \frac{n+1}{2n+4}e_n \right) \frac{2n+4}{n+3} \\ &\leq \left( e_{n+1} - \frac{n+1}{2n+4}e_{n+1} \right) \frac{2n+4}{n+3} \\ &\leq \frac{n+3}{2n+4}e_{n+1} \frac{2n+4}{n+3} \\ &\leq e_{n+1}. \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

- b) La suite  $(e_n)$  est donc bornée (entre 0 et 1) et décroissante, donc converge.  
 4) a) En réutilisant la formule obtenue précédemment, on trouve que

$$\begin{aligned} (n+1)e_n &= \frac{n(n+1)}{2n+2}e_{n-1} + \frac{(n+2)(n+1)}{2n+2}e_{n+1} \\ u_n &= \frac{n+1}{2n+2}u_{n-1} + \frac{n+1}{2n+2}u_{n+1} \\ u_n &= \frac{u_{n-1}}{2} + \frac{u_{n+1}}{2}, \end{aligned}$$

et donc que

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}.$$

- b) On reconnaît donc une suite arithmético-géométrique, dont l'équation associée est  $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ . Le terme général de cette suite est donc de la forme  $u_n = (\lambda n + \mu)1$ .  
 On peut identifier  $\lambda$  et  $\mu$  avec le système suivant :

$$\begin{cases} (0+1)e_0 &= \lambda \times 0 + \mu \\ (1+1)e_1 &= \lambda \times 1 + \mu \end{cases} \iff \begin{cases} \mu &= 1 \\ \lambda &= 2e_1 - 1 \end{cases}$$

Au final, on trouve que, pour tout entier  $n$   $u_n = (2e_1 - 1)n + 1$ .

- c) On en déduit bien sûr que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$e_n = \frac{u_n}{n+1} = (2e_1 - 1) \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Cette équation nous dit que  $e_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2e_1 - 1$ , mais puisque l'on nous donne que cette suite converge vers 0, on en déduit que  $2e_1 - 1 = 0$ , donc que  $e_1 = \frac{1}{2}$ , et au final que

$$e_n = \frac{1}{n+1}.$$

### Exercice 19 (une rencontre difficile)

(Voir l'énoncé)

- 1) À tout instant, les deux protagonistes sont toujours à moins de deux routes d'écart. Les événements  $A_n, B_n, C_n$  forment donc, pour tout entier  $n$ , un système complet d'événements.
- 2) Puisqu'au début de l'expérience, les deux protagonistes sont aux sites 1 et 2, ils sont sur deux sites adjacents, et donc  $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$ .
- 3) a) Si les deux protagonistes sont à deux routes de distance, ils se retrouveront sur le même site à l'instant suivant à la seule condition qu'ils se déplacent tous les deux l'un vers l'autre. Chacun ayant une probabilité  $\frac{1}{2}$  de le faire, et les déplacements étant indépendants, on a bien que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

- b) Si les deux protagonistes sont sur le même site, ils y restent, et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1.$$

- c) On obtient par des raisonnements analogues (par exemple, on a une chance sur deux pour l'état  $C_n$ , de se retrouver dans le même état  $C_n$  : si les deux protagonistes tournent dans le même sens) :

$$\begin{array}{lll} \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1 & \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = 0 & \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = 0 \\ \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = 0 & \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} & \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} & \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4} & \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{array}$$

- 4) La formule des probabilités totales, appliquée aux événements  $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ , avec pour système complet d'événements  $A_n, B_n, C_n$ , donne, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \end{cases} \iff \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n. \end{cases}$$

- 5) a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n - \frac{5}{8}b_n\right) \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{2}\left(b_{n+1} - \frac{5}{8}b_n\right) \\ &= \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n. \end{aligned}$$

- b) La suite  $(b_n)$  est donc une suite récurrente linéaire d'ordre deux, d'équation caractéristique  $X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{5}{16} = 0$ .

Le discriminant du polynôme associé est  $\Delta = \frac{25}{16} - 4\frac{5}{16} = \frac{5}{16}$ , les racines de l'équation sont donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \\ \alpha &= \frac{\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{5}{16}}}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}, \end{aligned}$$

et il existe donc deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n.$$

Pour trouver ces deux réels, on résout le système d'équation :

$$\begin{aligned} \begin{cases} b_0 = 1 & = \lambda + \mu \\ b_1 = \frac{3}{4} & = \lambda\alpha + \mu\beta \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda & = 1 - \mu \\ \frac{3}{4} & = \alpha + \mu(\beta - \alpha) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda & = 1 - \mu \\ \frac{3}{4} & = \alpha + \mu\frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda & = 1 - \mu \\ \mu & = \frac{3-4\alpha}{\sqrt{5}} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda & = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \mu & = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\beta^n - \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}\alpha^n.$$

- c) Puisque, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n = 4(b_{n+1} - \frac{3}{4}b_n)$ , on peut en déduire qu'il existe deux réels  $\gamma$  et  $\delta$ , tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \gamma\alpha^n + \delta\beta^n.$$

De la même façon que la précédente, on peut résoudre

$$\begin{aligned} \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = \frac{1}{4} \end{cases} &= \begin{cases} \gamma + \delta \\ \gamma\alpha + \delta\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = -\delta \\ \frac{1}{4} = \delta(\beta - \alpha) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \gamma = -\delta \\ \frac{1}{4} = \delta(\frac{\sqrt{5}}{4}) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \gamma = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \delta = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}. \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n).$$

- 6) a) Puisque  $a_n + b_n + c_n = 1$  pour tout  $n$ ,

$$a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\beta^n - \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}\alpha^n - \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n).$$

- b) Remarquons que  $|\alpha| < 1$  ainsi que  $|\beta| < 1$ , les suites  $(b_n)$  et  $(c_n)$  convergent donc vers 0, donc  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .
- c)  $a_n$  représente la probabilité que nos deux protagonistes se soient retrouvés avant  $n$  étapes : ils finiront donc par se retrouver, c'est certain !

*Exercice 20 (Inspiré d'ECRICOME05)*

(Voir l'énoncé)

### 1) étude d'une fonction

- a) La fonction  $f$  est un polynôme du second degré, de discriminant  $\Delta = q^2 + 4pq > 0$ .  $f$  a donc deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , et comme

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - r_1)(x - r_2) \\ &= x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2, \end{aligned}$$

on peut identifier :

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = q \\ r_1r_2 = -pq. \end{cases}$$

- b) On calcule :

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - q - pq = p - (1 - p)p \\ &= p^2, \\ f(-1) &= 1 + q - pq = 2 + p - (1 - p)p \\ &= 2 + 2p - p^2, \\ f(0) &= -pq \\ &= -(1 - p)p. \end{aligned}$$

- c) Observons tout d'abord que  $r_1 r_2 = -pq < 0$ , ce qui implique que  $r_1 < 0 < r_2$  (ils sont de signes opposés, et donc le plus petit,  $r_1$ , est négatif). De plus, puisque  $f(0) < 0$  et  $f(1) > 0$ ,  $0 < r_2 < 1$ .

Enfin,  $r_1 + r_2 > 0$ , donc  $|r_2| = r_2 > -r_1 = |r_1|$ . Au final, on a bien  $1 > |r_2| > |r_1|$ .

## 2) étude des probabilités

- a) Notons, pour  $i \in \mathbb{N}^*$   $P_i$  : « le  $i^{\text{e}}$  lancer tombe sur pile », et  $F_i = \overline{P}_i$ . Les événements  $(P_i)_i$  sont mutuellement indépendants, et chacun de probabilité  $p$ .

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \\ &= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) \text{ (indépendance)} \\ &= p^2, \\ \mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(P_3) \text{ (indépendance)} \\ &= qp^2, \\ \mathbb{P}(A_3) &= \mathbb{P}(F_2 \cap P_3 \cap P_4) \\ &= \mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(P_3)\mathbb{P}(P_4) \text{ (indépendance)} \\ &= qp^2. \end{aligned}$$

- b) Les événements  $P_1$  et  $F_1$  forment un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne donc que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+2}) &= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(A_{n+2}) \\ a_{n+2} &= p\mathbb{P}_{P_1}(F_2 \cap A_{n+2}) + q\mathbb{P}_{F_1}(A_{n+2}) \\ &= p\mathbb{P}_{P_1}(F_2)\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2}) + q\mathbb{P}_{F_1}(A_{n+2}) \\ &= pq\mathbb{P}(A_n) + q\mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &= pqa_n + qa_{n+1}. \end{aligned}$$

ce qui revient à dire que

$$a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0.$$

Notons au passage que  $a_2 - qa_1 - pqa_0 = qp^2 - qp^2 - 0 = 0$ , et donc que cette équation est bien vraie pour  $n = 0$  aussi.

## 3) une question d'informatique...

On peut proposer le programme suivant :

```
def deuxpires(p,n):
 q=1-p #définition de q
 x=0 #initialisation de a_0, l'avant-dernier terme calculé
 y=p**2 \\\initialisation de a_1, le dernier terme calculé
 for i in range(3,n+1):
 z=q*y+p*q*x \\\calcul de a_(i) avec a_(i-1)=y et a_(i-2)=x
 x=y \\\on décale les termes: x prend la valeur de y, et
 y=z \\\le dernier terme calculé, y, prend la valeur de z
 return y \\\le résultat est bien la dernière valeur calculée.
```

## 4) étude asymptotique de $(a_n)$

- a) La suite  $(a_n)$  est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique  $x^2 - qx - pq = f(x)$  (quelle surprise de retrouver  $f$  ici!). On a vu que cette équation avait deux racines  $r_1$  et  $r_2$ , et donc il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Calculons à présent des réels, qui doivent vérifier

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = p^2 \end{cases} &= \begin{cases} \lambda + \mu \\ \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ p^2 = \lambda(r_1 - r_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mu = -\frac{p^2}{r_1 - r_2} \\ \lambda = \frac{p^2}{r_1 - r_2} \end{cases} \end{aligned}$$

On a au final que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^n - r_1^n).$$

b) D'après la première partie,  $|r_1| < |r_2| < 1$ , et donc  $r_1^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , tout comme  $r_2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Au final,  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

c) On remarque que, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{r_2^n} &= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left(1 - \frac{r_1^n}{r_2^n}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{p^2}{r_2 - r_1}, \end{aligned}$$

puisque  $\left|\frac{r_1}{r_2}\right| < 1$  et donc  $\frac{r_1^n}{r_2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

## 10.2 Variables aléatoires

*Exercice 21 (Inspiré d'EMLYON 1999)*

(Voir l'énoncé) La lettre  $c$  désigne un entier naturel non nul fixé.

Une urne contient initialement des boules blanches et des boules rouges, toutes indiscernables au toucher.

On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne, avec  $c$  boules supplémentaires de la même couleur.

Notons  $B_n$  l'événement « la boule tirée au  $n^{\text{e}}$  tirage est blanche », et  $R_n$  son complémentaire.

1) Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges.

a) Au premier tirage, il y a  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges, la probabilité de tirer une boule blanche est donc de  $\frac{b}{b+r}$ .

b) Au deuxième tirage, la composition de l'urne dépend du premier tirage. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(B_2) \\ &= \frac{b}{b+r} \frac{b+c}{b+r+c} + \frac{r}{b+r} \frac{b}{b+r+c} \\ &= \frac{b(b+c) + rb}{(b+r)(b+r+c)} \\ &= \frac{b(b+r+c)}{(b+r)(b+r+c)} \\ &= \frac{b}{b+r}. \end{aligned}$$

c) Utilisons la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{B_2}(B_1) &= \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \frac{\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(B_2)} \\ &= \frac{b+c}{b+r+c} \cdot \frac{\frac{b}{b+r}}{\frac{b}{b+r}} \\ &= \frac{b+c}{b+r+c}. \end{aligned}$$



- 2) Pour tous les entiers naturels non nuls  $n, x, y$ , on note  $u_n(x, y)$  la probabilité d'obtenir une boule blanche au  $n^{\text{e}}$  tirage, lorsque l'urne contient initialement  $x$  boules blanches et  $y$  boules rouges.
- a) La formule des probabilités totales correspondant au système complet d'événement associé au premier tirage, donne que (on note  $E(x, y)$  l'événement « l'urne contient initialement  $x$  boules blanches et  $y$  boules rouges » :

$$\mathbb{P}_{E(x, y)}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1 \cap E(x, y)}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}_{B_2 \cap E(x, y)}(B_{n+1}).$$

Cependant, à l'issue du premier tirage, l'expérience recommence, avec un nouvel état pour l'urne ( $E(x+c, y)$  si la première boule tirée était blanche, et  $E(x, y+c)$  si la première boule tirée était rouge), et un tirage de moins à effectuer. Ainsi,

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap E(x, y)}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{E(x+c, y)}(B_n) \text{ et } \mathbb{P}_{B_2 \cap E(x, y)}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{E(x, y+c)}(B_n),$$

ce qui donne bien la formule voulue :

$$u_{n+1}(x, y) = u_n(x+c, y) \frac{x}{x+y} + u_n(x, y+c) \frac{y}{x+y}.$$

- b) La récurrence (sur  $n$ , pour tout  $x, y$ ) revient aux calculs effectués aux questions 1a et 1b :
- Initialisation : on a montré à la première question que  $u_1(x, y) = \frac{x}{x+y}$ .
  - Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons que  $u_n(x, y) = \frac{x}{x+y}$ . On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, y) &= u_n(x+c, y) \frac{x}{x+y} + u_n(x, y+c) \frac{y}{x+y} = \frac{x}{x+y} \frac{x+c}{x+y+c} + \frac{y}{x+y} \frac{x}{x+y+c} \\ &= \frac{x(x+c) + yx}{(x+y)(x+y+c)} \\ &= \frac{x(x+y+c)}{(x+y)(x+y+c)} \\ &= \frac{x}{x+y}. \end{aligned}$$

- 3) Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement exactement une boule blanche et une boule rouge, et que  $c = 1$ . Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des  $n$  premiers tirages.

- a) Les questions précédentes ont établi que  $X_1$  suivait une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ .
- b) Attention! il ne faut pas dire ici que puisqu'à chaque tirage, on a une chance sur deux de tirer une boule blanche, les v.a.  $X_n$  suivent une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$  : s'il s'agit bien de v.a. qui sont somme de  $n$  variables de Bernoulli de même paramètre, ces variables ne sont pas indépendantes!

Il faut donc faire le calcul à la main :

$$\begin{aligned} X_2(\Omega) &= \llbracket 0, 2 \rrbracket \text{ (c'est évident)} \\ \mathbb{P}(X_2 = 0) &= \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(B_2) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(R_2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(X_2 = 2) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- c) Montrons par récurrence que  $X_n$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 0, n \rrbracket$  (avec donc  $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ) :
- Initialisation : on a vu aux questions précédentes que  $X_1$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 0, 1 \rrbracket$  (et que  $X_2$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 0, 2 \rrbracket$ ).
  - Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons que  $X_n$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .  
Le support de  $X_{n+1}$  est très clairement  $\llbracket 0, n+1 \rrbracket$  : on peut tirer n'importe quel nombre de boules blanches entre 0 et  $n+1$  au cours des  $n$  tirages. Reste à trouver, pour  $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(X_n = k)$ . Pour ce faire, on remarque que pour obtenir  $k$  boules blanches, deux cas s'offrent à nous :
    - soit on tire une boule blanche au dernier tirage, et on a obtenu  $k-1$  boules blanches lors des tirages précédents,
    - soit on tire une boule rouge au dernier tirage, et on a obtenu  $k$  boules blanches lors des tirages précédents.
 Notons que ce raisonnement n'est possible que si  $k \neq 0, n$ .  
Remarquons de plus que si l'on connaît le nombre de boules blanches obtenues (mettons  $b$ ) lors des  $n$  premiers tirages, on connaît la composition de l'urne au  $n+1^{\text{e}}$  tirage : il y a  $1+b$  boules blanches, contre  $1+n-b$  boules rouges, pour  $2+n$  boules au total.  
Calculons donc ces probabilités :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}(X_n = 0)\mathbb{P}_{[X_n=0]}(R_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1+n}{2+n} \\ &= \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = n+1) &= \mathbb{P}(X_n = n)\mathbb{P}_{[X_n=n]}(B_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1+n}{2+n} \\ &= \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Et enfin, si  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \mathbb{P}(X_n = k-1)\mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{[X_n=k]}(R_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} \left( \frac{1+k-1}{2+n} + \frac{1+n-k}{2+n} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1+n-k+k}{2+n} \\ &= \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.

On a donc que  $Y_n = 1 + X_n$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , et on peut donc utiliser les formules classiques :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}(Y_n) - 1 \\ &= 1 + \frac{n+2}{2} - 1 \\ &= \frac{n}{2} \\ \text{Var}(X_n) &= \text{Var}(Y_n) \\ &= \frac{(n+1)^2 - 1}{12} \\ &= \frac{n(n+2)}{12}. \end{aligned}$$

*Exercice 22 (Inspiré d'INSEEC 2001)*

(Voir l'énoncé)

- 1) a) On sait que

$$1 = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(B = k) = \sum_{k=1}^6 \lambda k = \lambda 21,$$

ce qui donne bien  $\lambda = \frac{1}{21}$ .

On a ainsi

|                             |                |                |                |                |                |                |
|-----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $B =$                       | 1              | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              |
| $\mathbb{P}(B = \bullet) =$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{2}{21}$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{5}{21}$ | $\frac{6}{21}$ |

- b) On a que  $I = [B = 1] \cup [B = 3] \cup [B = 5]$  et donc (les événements sont disjoints)  $\mathbb{P}(I) = \mathbb{P}[B = 1] + \mathbb{P}[B = 3] + \mathbb{P}[B = 5] = \frac{1+3+5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ , et  $P = [B = 2] \cup [B = 4] \cup [B = 6]$  et donc (les événements sont disjoints)  $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}[B = 2] + \mathbb{P}[B = 4] + \mathbb{P}[B = 6] = \frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ .

- 2) a) i. Il suffit d'utiliser la formule des probabilités totales pour obtenir que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U) &= \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(U) + \mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(U) \\ &= \mathbb{P}(P)\mathbb{P}(A = 1)^n + \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(B = 1)^n \\ &= \frac{2}{3} \frac{1^n}{6} + \frac{1}{3} \frac{1^n}{21} \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{2}{6^n} + \frac{1}{21^n} \right). \end{aligned}$$

- ii. Il suffit d'utiliser la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_U(P) = \mathbb{P}_P(U) \frac{\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(U)} = \frac{\frac{2}{3} \frac{1^n}{6}}{\frac{1}{3} \left( \frac{2}{6^n} + \frac{1}{21^n} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{6^n}{21^n}}.$$

- b) Soit
- $k$
- un entier tel que
- $2k \leq n$
- .

- i. À nouveau, on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_k) &= \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(S_k) + \mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(S_k) \\ &= \mathbb{P}(P)\mathbb{P}(A = 1)^k \mathbb{P}(A = 6)^k + \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(B = 1)^k \mathbb{P}(B = 6)^k \\ &= \frac{2}{3} \frac{1^{2k}}{6} + \frac{1}{3} \frac{1^k}{21} \frac{6^k}{21} \\ &= \frac{1}{3} \left( 2 \frac{1}{6^{2k}} + \frac{6^k}{21^{2k}} \right). \end{aligned}$$

- ii. Il suffit d'utiliser la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{S_k}(P) = \mathbb{P}_P(S_k) \frac{\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(S_k)} = \frac{\frac{2}{3} \frac{1^{2k}}{6}}{\frac{1}{3} \left( 2 \frac{1}{6^{2k}} + \frac{6^k}{21^{2k}} \right)} = \frac{2 \frac{1^{2k}}{6}}{2 \frac{1}{6^{2k}} + \frac{6^k}{21^{2k}}}.$$

- 3) a) Pour que la séquence puisse arriver, il faut au moins 2 lancers. En revanche, il est possible que  $X$  prenne n'importe quelle valeur entière supérieure à deux, si on obtient, par exemple,  $n - 1$  "1" suivit d'un "2". On a donc  $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

b) Notons  $I_n$  l'événement « le résultat du  $n^e$  lancer est impair », et  $E_n = \bar{I}_n$ . On a

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(I_1 \cap E_2) \quad \text{par indépendance :}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{7} \frac{4}{7} \\ &= \frac{12}{49}, \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(I_2 \cap E_3) \quad \text{par indépendance :}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{7} \frac{4}{7} \\ &= \frac{12}{49}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 4) &= \mathbb{P}((I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap E_4) \\ &\quad \cup (E_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap E_4) \\ &\quad \cup (E_1 \cap E_2 \cap I_3 \cap E_4)) \quad \text{par incompatibilité :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap E_4) \\ &\quad + \mathbb{P}(E_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap E_4) \\ &\quad + \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap I_3 \cap E_4) \quad \text{par indépendance :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3^3 4}{7^4} + \frac{3^2 4^2}{7^4} + \frac{3^4 3}{7^4} \\ &= \frac{12(9 + 12 + 16)}{7^4}. \end{aligned}$$

c) Remarquons d'abord que, si  $X = n$ , on a forcément obtenu un résultat impair au lancer  $n-1$ , et un résultat pair au lancer  $n$ . De plus, dès que l'on obtient, avant des lancers, un résultat impair, on ne peut plus obtenir de résultat pair avant le  $n^e$  lancer (auquel cas la première séquence  $IE$  arriverait avant). On peut donc écrire

$$[X = n] = \bigcup_{k=0}^{n-2} \left( \left[ \bigcap_{i=1}^k E_i \right] \cap \left[ \bigcap_{i=k+1}^{n-2} I_i \right] \right) \cap I_{n-1} \cap E_n,$$

avec la convention d'une intersection vide correspond à  $\Omega$ . Ceci donne donc, puisque toutes les réunions impliquent des événements incompatibles et les intersections, des événements indépendants,

$$\mathbb{P}[X = n] = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{4^k}{7^k} \frac{3^{n-2-k}}{7^{n-2-k}} \frac{3}{7} \frac{4}{7} = \sum_{k=0}^{n-2} \left( \frac{4}{7} \right)^{k+1} \left( \frac{3}{7} \right)^{n-k-1}.$$

d) Calculons cette somme :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X = n] &= \sum_{k=0}^{n-2} \left( \frac{4}{7} \right)^{k+1} \left( \frac{3}{7} \right)^{n-k-1} \\ &= \left( \frac{3}{7} \right)^{n-1} \frac{4}{7} \sum_{k=0}^{n-2} \left( \frac{4}{7} \frac{7}{3} \right)^k \\ &= \left( \frac{3}{7} \right)^{n-1} \frac{4}{7} \frac{1 - \frac{4}{3}^{n-1}}{1 - \frac{4}{3}} \\ &= \left( \frac{3}{7} \right)^n \frac{4}{3} \frac{\frac{4}{3}^{n-1} - 1}{\frac{1}{3}} \\ &= 4 \left( \frac{3}{7} \right)^n \left[ \left( \frac{4}{3} \right)^{n-1} - 1 \right] \\ &= 3 \left( \frac{4}{7} \right)^n - 4 \left( \frac{3}{7} \right)^n. \end{aligned}$$

e) Sommons :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k \geq 2} 3 \left(\frac{4}{7}\right)^k - 4 \left(\frac{3}{7}\right)^k \\
 &= 3 \sum_{k \geq 2} \left(\frac{4}{7}\right)^k - 4 \sum_{k \geq 2} \left(\frac{3}{7}\right)^k \\
 &= 3 \frac{4^2}{7} \frac{1}{1 - \frac{4}{7}} - 4 \frac{3^2}{7} \frac{1}{1 - \frac{3}{7}} \\
 &= 3 \frac{4^2}{7} \frac{7}{3} - 4 \frac{3^2}{7} \frac{7}{4} \\
 &= 3 \frac{4}{3} - 4 \frac{3}{4} \\
 &= 4 \frac{4}{3} - 3 \frac{3}{4} \\
 &= 4 \frac{4}{3} - 3 \frac{3}{4} \\
 &= \frac{7}{3} - \frac{9}{4} \\
 &= \frac{28}{12} - \frac{27}{12} \\
 &= \frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$

f) Calculons (on reconnaît des séries géométriques dérivées de raisons  $\frac{4}{7}$  et  $\frac{3}{7}$ ) :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k \geq 2} k 3 \left(\frac{4}{7}\right)^k - k 4 \left(\frac{3}{7}\right)^k \\
 &= 3 \frac{4}{7} \sum_{k \geq 2} k \left(\frac{4}{7}\right)^{k-1} - 4 \frac{3}{7} \sum_{k \geq 2} k \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1} \\
 &= 3 \frac{4}{7} \left( \frac{1}{(1 - \frac{4}{7})^2} - 1 \right) - 4 \frac{3}{7} \left( \frac{1}{(1 - \frac{3}{7})^2} - 1 \right) \\
 &= 3 \frac{4}{7} \frac{7^2}{3} - 4 \frac{3}{7} \frac{7^2}{4} \\
 &= 4 \frac{7}{3} - 3 \frac{7}{4} \\
 &= \frac{7(16 - 9)}{12} \\
 &= \frac{49}{12}.
 \end{aligned}$$

*Exercice 23 (Inspiré d'EDHEC 2009)*

(Voir l'énoncé)

1) a) Pour tout entier naturel  $k$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[Z > k] &= \mathbb{P}([X > k] \cap [Y > k]) \\
 &= \mathbb{P}([X > k])\mathbb{P}([Y > k]) \text{ (puisque } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\
 &= (1 - p)^k (1 - p)^k \text{ (puisque } X \text{ et } Y \text{ suivent la loi géométrique de paramètre } p) \\
 &= (1 - p)^{2k} = q^{2k}.
 \end{aligned}$$

b) Pour tout entier naturel  $k$ ,

$$\begin{aligned}
 [Z > k - 1] &= [Z = k] \cup [Z > k] \\
 \text{donc } \mathbb{P}([Z > k - 1]) &= \mathbb{P}([Z = k]) + \mathbb{P}([Z > k]) \text{ (puisque les événements sont incompatibles)} \\
 \text{donc } \mathbb{P}[Z = k] &= \mathbb{P}[Z > k - 1] - \mathbb{P}[Z > k].
 \end{aligned}$$

c) On a donc

$$\mathbb{P}[Z = k] = \mathbb{P}[Z > k - 1] - \mathbb{P}[Z > k]$$

$$\mathbb{P}[Z = k] = q^{2k-2} - q^{2k}$$

$$\mathbb{P}[Z = k] = (q^2)^{k-1}(1 - q^2)$$

ce qui montre bien que  $Z$  suit la loi géométrique de paramètre  $1 - q^2$ .

- 2) a) Remarquons tout d'abord que  $X$  est presque toujours strictement positif, donc  $T \geq \frac{X}{2}$  le sera aussi. Reste à montrer que  $T$  est p.s. entier.

Il y a deux possibilités : soit  $X$  prend une valeur paire, auquel cas  $T$  vaut  $\frac{X}{2}$ , qui est bien un entier. Soit  $X$  prend une valeur impaire, auquel cas  $X + 1$  est pair, et  $T = \frac{X+1}{2}$  est à nouveau entier.

- b) Réciproquement, quelque soit l'entier non nul  $k$ , il y a une probabilité non nulle que  $X = 2k$  (valeur paire), auquel cas  $T = \frac{X}{2} = k$ . On en déduit que  $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .

- c) On a bien sûr  $[T = k] = [X = 2k] \cup [X = 2k - 1]$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T = k] &= \mathbb{P}[X = 2k] + \mathbb{P}[X = 2k - 1] \\ &= q^{2k-1}p + q^{2k-2}p \\ &= (q^2)^{k-1}(qp + p) \\ &= (q^2)^{k-1}(q - q^2 + 1 - q) \\ &= (q^2)^{k-1}(1 - q^2) \end{aligned}$$

$T$  suit donc bien la même loi que  $Z$ .

- 3) On peut proposer le code suivant !

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

p=float(input("Rentrez le paramètre des lois géométriques svp. "))
x=0
while rd.random()<=p:
 x=x+1
if (np.mod(x,2)=0) then
 T=x/2
else:
 T=(x+1)/2
print(T)
```

*Exercice 24 (Inspiré d'ECRICOME 2017)*

(Voir l'énoncé)

### I. Préliminaires

- 1) Puisque les tirages sont effectués avec remise, et les boules sont indiscernables au toucher, les variables  $X_k$  suivent toutes une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (et sont indépendantes). Leur espérance est donc de  $\mathbb{E}(X_k) = \frac{n+1}{2}$ .
- 2) a) Il est possible de tirer du premier coup la boule numérotée  $n$ , auquel cas  $T_n = 1$ , tout comme ne tirer lors des  $n$  premiers tirages que des boules numérotées 1, auquel cas  $T_n = n$ . Tous les cas intermédiaires sont possibles ( $k$  fois 1 puis la boule  $n - k$ , par exemple, donne  $T_n = k + 1$ ), mais la somme étant au moins égale au nombre de tirages,  $T_n$  sera au plus égal à  $n$ . Ainsi  $T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ .
- b) L'événement  $[T_n = 1]$  n'est réalisé que si dès la première boule tirée, le compte est bon, aussi la première boule tirée doit être la boule numéro  $n$ , et

$$\mathbb{P}(T_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = n) = \frac{1}{n}.$$

- c) Si le compte n'est atteint qu'au bout du  $n^{\text{e}}$  tirage, c'est que l'on a tiré d'abord  $n$  fois la boule 1. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = n) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = 1]\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = 1) \text{ (par indépendance)} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

- 3) Si  $n = 2$ ,  $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$  et, comme on l'a vu,  $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{2}$ . Ainsi  $\mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

- 4) Si  $n = 3$ ,  $T_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$  et, comme on l'a vu,  $\mathbb{P}(T_3 = 1) = \frac{1}{3}$  et  $\mathbb{P}(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ .  
Ainsi  $\mathbb{P}(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$ .

L'espérance est bien  $\mathbb{E}(T_3) = \frac{1}{3} + 2\frac{5}{9} + 3\frac{1}{9} = \frac{16}{9}$ .

## II. Étude de $T_n$

- 1) La valeur minimale de  $S_k$  est obtenue en ne tirant que la boule 1, la valeur maximale, en ne tirant que la boule  $n$ , toutes les valeurs intermédiaires étant possibles, ainsi  $S_k(\Omega) = \llbracket k, nk \rrbracket$ .

- 2) Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

a) On a bien sûr  $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$ .

b) Puisque  $S_k(\Omega) = \llbracket k, nk \rrbracket$ , les événements  $[S_k = j], j \in \llbracket k, nk \rrbracket$  forment un système complet d'événements, et la formule des probabilités totale donne que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}(S_k = j) \mathbb{P}_{S_k=j}(S_{k+1} = i) \\ &= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j) \mathbb{P}_{S_k=j}(X_{k+1} = i) \text{ (puisque } S_{k+1} \geq S_k + 1) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j).\end{aligned}$$

- 3) a) Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $j \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}$ .

b) Montrons par récurrence que pour tout  $i \geq 2$ , on a

$$\forall k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

– Si  $i = 2$ ,  $k \in \llbracket 1, 1 \rrbracket$  revient à dire que  $k = 1$ , et bien sûr

$$\sum_{j=1}^1 \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

– Soit  $i \geq 2$ , supposons que

$$\forall k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^i \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{i-1}{k-1} \\ &= \binom{i-1}{k} + \binom{i-1}{k-1} \\ &= \binom{i}{k}.\end{aligned}$$

c) Pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\mathcal{H}_k$  la proposition

$$\ll \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \gg$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}$$

– On a bien sûr

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_1 = i) = \frac{1}{n}$$

puisque  $S_1 = X_1$  suit une loi uniforme.

– Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , supposons

$$\forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}$$

on a alors, pour  $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{k+1} = i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{j-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{k}. \end{aligned}$$

4) a) Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Si la somme atteint  $n$  strictement après le  $k^{\text{e}}$  tirage ( $[T_n > k]$ ), c'est que la somme au  $k^{\text{e}}$  tirage est inférieure ou égale à  $n-1$  :  $[T_n > k] = [S_k \leq n-1]$ .

b) On a donc, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_n > k) &= \mathbb{P}(S_k \leq n-1) \\ &= \sum_{i=k}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = i) \\ &= \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}. \end{aligned}$$

5) Calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \mathbb{P}(T_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{P}(T_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}(T_n = j) \\ &= \mathbb{E}(T_n). \end{aligned}$$



On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \quad (\text{formule du binôme}).\end{aligned}$$

6) On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \exp\left((n-1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{n-1}{n} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^1\end{aligned}$$

### III. Convergence de $T_n$

1) Soit  $Y$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{k-1}{k!}.$$

a) On peut calculer :

$$\begin{aligned}\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{k \geq 1} \frac{k-1}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\end{aligned}$$

On reconnaît la série des accroissements de la suite de terme général  $\frac{1}{k!}$ , qui converge. La série converge donc, et sa somme vaut :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{0!} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 1.$$

b) Sous réserve d'existence,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ &= e \quad (\text{série exponentielle})\end{aligned}$$

- 2) On avait établi que, pour  $k \in \mathbb{N}$ , et  $n \geq k$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(T_n > k) &= \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} \\
 &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!n^k} \\
 &= \frac{1}{k!} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)}{\prod_{i=0}^{k-1} n} \\
 &= \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n} \\
 &= \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!}
 \end{aligned}$$

en remarquant que le produit est sur un nombre fixe de termes.

- 3) On peut déduire de la relation précédente la loi limite de  $T_n$  : pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , et  $n \geq k$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(T_n = k) &= \mathbb{P}(T_n > k-1) - \mathbb{P}(T_n > k) \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}.
 \end{aligned}$$

- 4) On peut proposer le programme suivant :

```

import numpy as np

def T(n):
 S=0
 y=0
 while S<n:
 tirage=np.randint(n+1)
 S=S+tirage
 y=y+1
 return y

```

- 5) a) La commande `range(1,k+1)` renvoie la liste de tous les entiers entre 1 et k. Leur produit, calculé par `np.prod(range(1,k+1))` est donc  $k!$ .
- b) La commande `loitheoY(6)` renvoie donc la liste des probabilités  $\mathbb{P}(Y = k)$  (au moyen de la formule calculée plus haut) de  $Y$ , pour les  $k = 0, 1, \dots, 5$ .
- c) La commande `freqT(n)`, quant à elle, renvoie, la liste des fréquences d'apparition des différentes valeurs de  $T_n(\Omega)$ , pour 100000 échantillons de cette variable. La fonction simule 100000 fois cette variable, et augmente de 1 la case correspondante dans le tableau `y` (avant de tout diviser par 100000, pour obtenir la fréquence correspondante).
- d) Les probabilités théoriques de  $T$  sont représentées par des croix dans le graphique, alors que les fréquences empiriques de  $T$  sont par les barres verticales.
- e) Cette succession de graphique illustre bien le fait que la probabilité que  $T_n$  prenne telle ou telle valeur converge bien vers la probabilité que  $Y$  prenne ces valeurs : les barres (représentant la fréquence d'apparition des différentes valeurs de  $T_n$  simulées) "collent" de plus en plus à la hauteur des points donnant la probabilité des différentes valeurs de  $Y$  (du moins pour les valeurs inférieures à 6)

## 11 De l'algèbre

### 11.1 Probabilités matricielles

*Exercice 25 (Inspiré d'EDHEC 2010)*

(Voir l'énoncé)

#### 1) Étude d'un ensemble de matrices

- a) i. Les colonnes de cette matrice sont les images de la base canonique, et donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ii. Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) &\iff MX = 0 \\ &\iff \begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x = 0 \\ \frac{1}{3}x = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que la famille  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  forme une famille génératrice de  $\text{Ker}(f)$ . Cette famille

est de plus libre (un seul vecteur non nul). On trouve donc que  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  forme une base de  $\text{Ker}(f)$ , qui est donc de dimension 1.

Quant à l'image, on a bien sûr que  $\text{Im}(f) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

La famille  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est libre (le premier vecteur étant c.l. non nulle de  $e_2$  et  $e_3$ , il

n'est pas c.l. du second). On trouve donc que  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  forme une base de  $\text{Im}(f)$ , qui est donc de dimension 2.

- iii. Le fait que  $\text{Ker}(f - \frac{2}{3}\text{Id})$ ,  $\text{Ker}(f + \frac{2}{3}\text{Id})$  et  $\text{Ker}(f)$  sont trois sous-espaces vectoriels vient du fait que ce sont les noyaux de trois applications linéaires,  $f$ ,  $f - \frac{2}{3}\text{Id}$  et  $f + \frac{2}{3}\text{Id}$  (les deux dernières étant linéaires comme somme de fonctions linéaires. On avait déjà trouvé à la question précédente la base de  $\text{Ker}(f)$  demandée. Reste les deux autres :

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f - \frac{2}{3} \text{Id}) \iff (M - \frac{2}{3}I)X = 0$$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y = 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y = 0 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\iff} \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}z = 0 \\ -\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ +\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}z = 0 \\ -\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que la famille  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  forme une famille génératrice de  $\text{Ker}(f - \frac{2}{3} \text{Id})$ . Cette famille est de plus libre (un seul vecteur non nul). On trouve donc que  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  forme une base de  $\text{Ker}(f - \frac{2}{3} \text{Id})$ , qui est donc de dimension 1.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f + \frac{2}{3} \text{Id}) \iff (M + \frac{2}{3}I)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z = 0 \\ +\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ +\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z = 0 \\ +\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que la famille  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  forme une famille génératrice de  $\text{Ker}(f + \frac{2}{3} \text{Id})$ . Cette

famille est de plus libre (un seul vecteur non nul). On trouve donc que  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  forme une

base de  $\text{Ker}(f + \frac{2}{3}\text{Id})$ , qui est donc de dimension 1.

iv. Étudions d'abord la liberté de cette famille : pour tout réels  $(a, b, c)$

$$\begin{aligned}
 au + bv + cw = 0 &\iff \begin{cases} 2b - 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L1 \leftrightarrow L2}{\iff} \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2b - 2c = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L3 \leftarrow L3 + L1}{\iff} \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2b - 2c = 0 \\ 2b + 2c = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L3 \leftarrow L3 - L2}{\iff} \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2b - 2c = 0 \\ 4c = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L3 \leftarrow L3 - L2}{\iff} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La famille est donc libre, et puisqu'elle contient 3 vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  (qui est de dimension 3), on en déduit qu'elle forme une base de  $\mathbb{R}^3$ .

b) On pose

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- i. On remarque que les colonnes de  $P$  sont justement des vecteurs de la base de  $\mathbb{R}^3$  trouvée précédemment. On en déduit donc que la matrice est inversible. Un simple calcul matriciel donne de plus que  $PQ = 4I$ , et donc  $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$ .
- ii. Un simple calcul montre à nouveau que  $M = PDP^{-1}$ .
- iii. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $j$ , on a  $M^j = PD^jP^{-1}$ .  
 — On a bien sûr  $M^0 = I = PD^0P^{-1}$ .  
 — Soit  $j \in \mathbb{N}$ , supposons que  $M^j = PD^jP^{-1}$ . On a alors

$$\begin{aligned}
 M^{j+1} &= MM^j \\
 &= PDP^{-1}PD^jP^{-1} \\
 &= PDD^jP^{-1} \\
 &= PD^{j+1}P^{-1}
 \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

iv. On connaît en fait l'expression complète de  $M^j$  (pour  $j > 0$ ) :

$$\begin{aligned}
 M &= PD^jP^{-1} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{2}{3})^j & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{2}{3})^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{2}{3})^j & (\frac{2}{3})^j & (\frac{2}{3})^j \\ -(\frac{2}{3})^j & (-\frac{2}{3})^j & (-\frac{2}{3})^j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(\frac{2}{3})^j + 2(-\frac{2}{3})^j & 2(\frac{2}{3})^j - 2(-\frac{2}{3})^j & 2(\frac{2}{3})^j - 2(-\frac{2}{3})^j \\ (\frac{2}{3})^j - (-\frac{2}{3})^j & (\frac{2}{3})^j + (-\frac{2}{3})^j & (\frac{2}{3})^j + (-\frac{2}{3})^j \\ (\frac{2}{3})^j - (-\frac{2}{3})^j & (\frac{2}{3})^j + (-\frac{2}{3})^j & (\frac{2}{3})^j + (-\frac{2}{3})^j \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Pour  $j = 0$ , on a bien  $\frac{1}{4}2(\frac{2}{3})^0 + 2(-\frac{2}{3})^0 = 1$  et  $(\frac{2}{3})^0 - (-\frac{2}{3})^0 = 0$

## 2) Étude d'une suite de variables aléatoires

a) Pour  $X_1$ , on effectue un tirage uniforme parmi les 3 boules de l'urne, et  $X_1$  prend ce numéro :  $X_1$  suit donc une loi uniforme sur  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ .

b) On peut proposer

```
import numpy.random as rd
```

```
n=int(input("entrer le nombre de lancers à effectuer"))
```

```
X=rd.randint(3)+1
```

```
for i in range (2,n+1):
```

```
 T=rd.randint(3)+1
```

```
 if X==1:
```

```
 X=T
```

```
 else:
```

```
 if T<>X:
```

```
 X=1
```

```
print(X)
```

c) On note  $U_n$  la matrice à trois lignes et une colonne dont l'élément de la  $i^e$  ligne est  $\mathbb{P}[X_k = i]$ .

i. Pour  $j = 1$ , et  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , le tirage de la boule est uniforme et  $X_{n+1}$  prend la valeur de la boule tirée :

$$\mathbb{P}_{[X_n=1]}[X_{n+1} = i] = \frac{1}{3}.$$

Pour  $j = 2, 3$ , et  $i = j$ , il faut tirer la boule du bon numéro :

$$\mathbb{P}_{[X_n=j]}[X_{n+1} = j] = \frac{1}{3}.$$

Pour  $j = 2, 3$ , et  $i = 1$ , il faut tirer une autre boule :

$$\mathbb{P}_{[X_n=j]}[X_{n+1} = 1] = \frac{2}{3}.$$

Pour  $j = 2, 3$ , et  $i \neq 1, j$ , le résultat est impossible :

$$\mathbb{P}_{[X_n=j]}[X_{n+1} = 1] = 0.$$

ii. D'après la formule des probabilités totales, avec comme scé  $[X_n = j], j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , on a

$$\begin{cases} \mathbb{P}[X_{n+1} = 1] &= \mathbb{P}_{[X_n=1]}[X_{n+1} = 1]\mathbb{P}[X_n = 1] \\ &\quad + \mathbb{P}_{[X_n=2]}[X_{n+1} = 1]\mathbb{P}[X_n = 2] + \mathbb{P}_{[X_n=3]}[X_{n+1} = 1]\mathbb{P}[X_n = 3] \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 2] &= \mathbb{P}_{[X_n=1]}[X_{n+1} = 2]\mathbb{P}[X_n = 1] \\ &\quad + \mathbb{P}_{[X_n=2]}[X_{n+1} = 2]\mathbb{P}[X_n = 2] + \mathbb{P}_{[X_n=3]}[X_{n+1} = 2]\mathbb{P}[X_n = 3] \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 3] &= \mathbb{P}_{[X_n=1]}[X_{n+1} = 3]\mathbb{P}[X_n = 1] \\ &\quad + \mathbb{P}_{[X_n=2]}[X_{n+1} = 3]\mathbb{P}[X_n = 2] + \mathbb{P}_{[X_n=3]}[X_{n+1} = 3]\mathbb{P}[X_n = 3] \end{cases}$$

$$\iff U_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} U_n.$$

On a donc  $K = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

iii. Il suffit de remarquer que  $KU_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  est bien la valeur de  $U_1$ . Une récurrence immédiate (dont l'initialisation est la vérification précédente) donne alors que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = K^n U_0$ .

d) i. Vérifier que  $K = M + \frac{1}{3}I$  est immédiat. Comme les matrices  $M$  et  $I$  commutent, on a la formule du binôme :

$$K^n = (M + \frac{1}{3}I)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} M^j.$$

ii. La première colonne ( $K_1$ ) de la matrice  $K^n$  est donc donnée par la première colonne de la matrice  $M^j$  (notée ici  $C_j$ ), selon la relation suivante :

$$\begin{aligned} K_1 &= \sum_{j=0}^n C_n^j \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} C_j \\ &= \sum_{j=0}^n C_n^j \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le premier élément est

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n C_n^j \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} \frac{1}{4} 2 \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^j + \left(-\frac{2}{3}\right)^j \right] &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=0}^n C_n^j \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j + \sum_{j=0}^n C_n^j \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^j \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^n \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right]. \end{aligned}$$

Les deux autres éléments sont

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n C_n^j \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} \frac{1}{4} \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \right] &= \frac{1}{4} \left[ \sum_{j=0}^n C_n^j \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j - \sum_{j=0}^n C_n^j \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^j \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^n \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right]. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} U_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[ 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] & \times & \times \\ \frac{1}{4} \left[ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] & \times & \times \\ \frac{1}{4} \left[ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 + 2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a bien que la loi de  $X_n$  est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1}{2} \left( 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right), \\ \mathbb{P}[X_n = 2] = \frac{1}{4} \left( 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right), \\ \mathbb{P}[X_n = 3] = \frac{1}{4} \left( 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right). \end{cases}$$

iii. Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\begin{cases} \mathbb{P}[X_n = 1] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}[X_n = 2] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}, \\ \mathbb{P}[X_n = 3] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}. \end{cases}$$

e) Le support étant fini, on peut directement calculer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) + 2 \frac{1}{4} \left( 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) + 3 \frac{1}{4} \left( 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) + \frac{5}{4} \left( 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) \\ &= \frac{7 - 3 \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{4}. \end{aligned}$$

*Exercice 26 (inspiré d'Ecrisome 2017, ECT)*

(Voir l'énoncé)

### 1) Première partie : étude matricielle

- a) On trouve en calculant que  $PQ = 6I$ , c'est-à-dire  $P\left(\frac{1}{6}Q\right) = I$ . On a donc que  $P$  est inversible, avec  $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$ .
- b) Il suffit de mener le calcul pour trouver qu'effectivement  $MV_1 = 5V_1, MV_2 = V_2$  et  $MV_3 = 2V_3$ .

- c) À nouveau, un simple calcul donne que  $\frac{1}{6}QMP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$ . De là, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}QMP = D &\iff P^{-1}MP = D \\ &\iff PP^{-1}MP = PD \\ &\iff MPP^{-1} = PDP^{-1} \\ &\iff M = \frac{1}{6}PDQ. \end{aligned}$$

- d) On en déduit par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$  :
- On a bien sûr  $M^0 = I = PP^{-1} = \frac{1}{6}PD^0Q$ .
  - Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$ .



On a alors

$$\begin{aligned}
 M^{n+1} &= MM^n \\
 &= \frac{1}{6}PDQ \times \frac{1}{6}PD^nQ \\
 &= \frac{1}{6}PDD^nQ \\
 &= \frac{1}{6}PD^{n+1}Q.
 \end{aligned}$$

e) Il s'agit de calculer la première colonne de  $M^n$  au moyen de la formule précédente :

$$\begin{aligned}
 M^n &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 5^n & 5^n \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 \cdot 2^n & 4 \cdot 2^n & -2 \cdot 2^n \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 & \dots \\ 2(5^n - 2^n) & \dots \\ 3(5^n + 2^{n+1} - 2) & \dots \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 2) Application à un entraînement sportif

a) D'après l'énoncé, l'athlète commence par la natation au jour 0, donc  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 0$  et  $c_0 = 0$ .  
Puisqu'il a pratiqué la natation le premier jour, il a une chance sur 5 de pratiquer la natation à nouveau le jour 1, une chance sur 5, le cyclisme, et 3 chances sur 5, la course, c'est-à-dire  $a_1 = \frac{1}{5}$ ,  $b_1 = \frac{1}{5}$  et  $c_1 = \frac{3}{5}$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les événements  $(A_n, B_n, C_n)$  forment un scé, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) \end{cases} \\
 \iff \begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n \end{cases}
 \end{aligned}$$

c) Les relations précédentes se réécrivent

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{5}M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

d) Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

— L'athlète commençant par la natation, on a

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{5^0} M^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

— Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{5} M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} M \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5^{n+1}} M^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e) On a donc (la première colonne de  $M^n$  ayant été calculée précédemment)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{5^n} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 & \dots \\ 2(5^n - 2^n) & \dots \\ 3(5^n + 2^{n+1} - 2) & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 - 4\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{9}{5^n} & \dots \\ 2\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) & \dots \\ 3\left(1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{2}{5^n}\right) & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

f) Au final, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 - 4\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{9}{5^n} \\ 2\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \\ 3\left(1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{2}{5^n}\right) \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (= \frac{1}{6} V_1) \end{aligned}$$

L'athlète passera ainsi un sixième du temps à pratiquer la natation, un tiers, le cyclisme, et la moitié du temps, la course.

## 11.2 Matrices “pures”

*Exercice 27 (Inspiré d'ESCP 1998)*

(Voir l'énoncé)

- 1) a) Les fonctions  $f_n$  sont polynômiales, donc de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , leur dérivée sont données par la formule

$$f'_n(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} = x^{n-1}((n+1)x + n).$$

- Si  $n$  est impair,  $f'_n$  est du signe de  $(n+1)x + n$ , donc est négatif sur  $] -\infty, -\frac{n}{n+1}]$ , et positif sur  $[-\frac{n}{n+1}, +\infty[$ .  $f_n$  est donc décroissante sur  $] -\infty, -\frac{n}{n+1}]$ , et croissante sur  $[-\frac{n}{n+1}, +\infty[$ .  
 $f_n$  est un polynôme pair, de coefficient directeur positif, donc admet une limite en  $\pm\infty$ , valant  $+\infty$  dans les deux cas.

On a donc le tableau de variation :

|         |           |                                  |           |
|---------|-----------|----------------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{n+1}{n}$                 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$                              | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f_n\left(-\frac{n+1}{n}\right)$ | $+\infty$ |

- Si  $n$  est pair,  $f'_n$  est du signe de  $x((n+1)x+n)$ , donc est positif sur  $]-\frac{n}{n+1}, 0]$ , et négatif sur  $]-\infty, -\frac{n}{n+1}]$  et  $[0, +\infty[$ .  $f_n$  est donc croissante sur  $]-\infty, -\frac{n}{n+1}]$ , décroissante sur  $]-\frac{n}{n+1}, 0]$ , et croissante sur  $[0, +\infty[$ .

$f_n$  est un polynôme impair, de coefficient directeur positif, donc admet une limite en  $\pm\infty$ , valant  $-\infty$  en  $-\infty$ , et  $+\infty$  en  $+\infty$ .

On a donc le tableau de variation :

|         |           |                                  |     |           |     |
|---------|-----------|----------------------------------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{n+1}{n}$                 | $0$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$                              | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $f_n\left(-\frac{n+1}{n}\right)$ | $0$ | $+\infty$ |     |

- b) Dans tous les cas,  $-\frac{n}{n+1} < 1$ , donc  $\left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < 1$  et  $\left(-\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$ , donc leur somme  $f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$ .

- c) D'après le tableau de variation,

- Si  $n$  est impair, on a deux solutions, l'une supérieure à  $-\frac{n}{n+1}$ , l'autre inférieure :  $f_n$  réalise une bijection de  $]-\infty, -\frac{n}{n+1}]$  sur  $[f_n\left(-\frac{n}{n+1}, +\infty[ \right)$ , et de  $]-\frac{n}{n+1}, +\infty[$  sur  $[f_n\left(-\frac{n}{n+1}, +\infty[ \right)$ , car elle y est continue et strictement monotone. Comme 2 est dans ces intervalles images, il y a un unique antécédent dans chacun (différents car  $f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) \neq 0$ ).

- De même, si  $n$  est pair, on trouve qu'il n'y a qu'une seule solution sur  $\mathbb{R}$ , supérieure à 0. On peut remarquer que 1 est une solution évidente de l'équation, quelque soit la parité de  $n$ . Si  $n$  est pair, c'est la seule, si  $n$  est impair, il y a une autre solution, négative.

- 2) a) La matrice  $A$  n'est pas inversible : on peut poser le système

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = a \\ 0 = b - a \end{cases}$$

qui n'est pas de Cramer.

En revanche, peut résoudre

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y = a \\ -x + y = b \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{L_2 + L_1}{2}] \begin{cases} x + y = a \\ y = \frac{b-a}{2} \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2] \begin{cases} x = \frac{a-b}{2} \\ y = \frac{a+b}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

et trouver ainsi que  $P$  est inversible, d'inverse  $P^{-1} = \frac{1}{2} {}^t P$ .

b) On calcule

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

c) Montrons par récurrence que pour tout  $n > 0$ ,  $A^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$ .

— Initialisation : On vient de voir que  $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ .

— Soit  $n$  un entier non nul, supposons  $A^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$ .

On a alors que

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

3) a) Si l'on multiplie l'équation  $(E_n)$  à gauche par  $P^{-1}$ , à droite par  $P$ , on obtient que

$$(E_n) \iff P^{-1}X^{n+1}P + P^{-1}X^nP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose  $Y = P^{-1}XP$ , une récurrence immédiate (comme celle de la question précédente) nous donne que  $Y^n = P^{-1}X^nP$ , et donc que  $X$  est solution de  $(E_n)$  si et seulement si  $Y$  est solution de

$$(E'_n) \quad Y^{n+1} + Y^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Soit  $Y$  une solution de  $(E'_n)$ . On pose  $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

i. On peut simplement calculer

$$YD = Y(Y^{n+1} + Y^n) = Y^{n+2} + Y^{n+1} = (Y^{n+1} + Y^n)Y = DY.$$

ii. On calcule que

$$YD = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix} \text{ et } DY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix}.$$

Puisque ces deux matrices sont égales, on en déduit que  $b = 0$  et  $c = 0$ .

iii. Puisque  $b = c = 0$ , la matrice  $Y$  est donc diagonale, et ses puissances sont faciles à calculer :

$$Y^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$$

$a$  doit donc vérifier l'équation  $a^{n+1} + a^n = a^n(a + 1) = 0$ , donc  $a = 0$  ou  $a = -1$ .

iv. De même,  $d$  doit vérifier l'équation  $d^{n+1} + d^n = f_n(d) = 2$ . On a vu à la question 1c que si  $n$  était pair, il y avait 2 solutions, et si  $n$  était impair, une seule.

On a donc deux cas :

— Si  $n$  est pair, on a deux solutions pour le coefficient  $a$ , et deux pour le coefficient  $d$ , donc 4 solutions au total,

— si  $n$  est impair, on a deux solutions pour le coefficient  $a$ , et une seule pour le coefficient  $d$ , donc 2 solutions au total.

- c) Ici,  $n = 3$ , impair. On a vu que  $a$  pouvait valoir 0 ou  $-1$ .  $d$  peut valoir, comme on l'a vu, 1 ou  $\mu$ . Avant de donner les solutions, calculons dans le cas général leur forme :

$$P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & -a+d \\ -a+d & a+d \end{pmatrix}$$

On a donc les quatre solutions :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1+\mu}{2} & \frac{-1+\mu}{2} \\ \frac{-1+\mu}{2} & \frac{1+\mu}{2} \end{pmatrix}$$

*Exercice 28 (Inspiré d'ECRICOME04)*

(Voir l'énoncé)

### 1) Matrices 3x3

- a) La méthode classique d'inversion de matrice donne que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- b) On trouve que

$$T = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc que

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T^3 = 0.$$

Ainsi, pour tout  $n \geq 3$ ,  $T^n = T^3 T^{n-3} = 0$ .

La matrice  $T$  n'est donc pas inversible, car sinon  $T^3$  serait inversible.

- c) Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = P^{-1} T^n P$  :  
 — On a bien  $P^{-1} T P = P^{-1} P A P^{-1} P = A$ .  
 — Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $A^n = P^{-1} T^n P$ . Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A A^n \\ &= P^{-1} T P P^{-1} T^n P \\ &= P^{-1} T T^n P \\ &= P^{-1} T T^{n+1} P, \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

On en déduit que pour  $n \geq 3$ ,  $A^n = P^{-1} T^n P = 0$ , et donc  $A$  n'est pas inversible.

- d) i. Soient  $t$  et  $t'$  deux réels.

$$\begin{aligned} E(t)E(t') &= (I + tA + \frac{t^2}{2}A^2)(I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2) \\ &= I + tA + t'A + tt'A^2 + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t'^2}{2}A^2 + t'\frac{t^2}{2}A^3 + t\frac{t'^2}{2}A^3 + \frac{t^2 t'^2}{4}A^4 \\ &= I + (t + t')A + \frac{t^2 + 2tt' + t'^2}{2}A^2 \\ &= E(t + t'). \end{aligned}$$

- ii. D'après la question précédente,  $E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0) = I$ . La matrice  $E(t)$  est donc inversible, d'inverse  $E(-t)$ .
- iii. Montrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E(t)^n = E(nt)$ .
- On a bien sûr  $E(t)^0 = I = E(0t)$ .
  - Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $E(t)^n = E(nt)$ . On a alors

$$E(t)^{n+1} = E(t)E(t)^n = E(t)E(nt) = E((n+1)t).$$

## 2) Matrices 2x2

- a) On trouve que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Un simple calcul donne que  $D = Q^{-1}BQ$ . La matrice  $D$  est diagonale, sans zéros sur la diagonale, donc inversible. La matrice  $B$  est produit de matrices inversibles, et donc est inversible elle aussi.
- c) Il s'agit exactement du même raisonnement qu'à la question 1c.
- d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} B^n &= QD^nQ^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ -1 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- e) Pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$a_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (2-2^k) = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$$

et de même,

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!} & b_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k - (2t)^k}{k!} \\ c_n(t) &= \sum_{k=0}^n 2 \frac{(2t)^k - t^k}{k!} & d_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{2(2t)^k - t^k}{k!} \end{aligned}$$

- f) Il suffit de prendre la limite des coefficients trouvés à la question précédente, pour trouver que

$$E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

- g) On trouve donc que  $E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$  si on pose

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ E_2 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- h) On trouve que  $E_1^2 = E_1$ ,  $E_2^2 = E_2$ ,  $E_1 E_2 = E_2 E_1 = 0$ .
- i) On s'inspire de la méthode pour  $A$  et trouve que

$$\begin{aligned} E(t)E(t') &= (e^t E_1 + e^{2t} E_2)(e^{t'} E_1 + e^{2t'} E_2) \\ &= e^{t+t'} E_1 + e^{2(t+t')} E_2 + 0, \\ E(t)E(-t) &= I, \end{aligned}$$

Et donc  $E(t)$  est inversible, d'inverse  $E(t)$ .

### 11.3 Équations différentielles et algèbre

Exercice 29 (inspiré d'ÉCRICOME, sujet zéro (2022))

(Voir l'énoncé)

TODO

#### 1) Préliminaires : un peu d'algèbre

On note la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ainsi que  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $A$ .

a) Déterminer le rang de  $A - 6I$ . En déduire la dimension de  $\ker(A - 6I)$ .

b) On pose

$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V = AU - 2U \text{ et } W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

i. Montrer que  $(U, V, W)$  forme une base de  $\mathbb{R}^3$ .

ii. En déduire que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible, et donner son inverse.

iii. Donner la matrice de  $f$  dans cette base.

iv. Vérifier que  $A = PBP^{-1}$ .

v. L'endomorphisme  $f$  est-il bijectif ?

#### 2) Étude d'une équation différentielle

On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x'(t) = 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

où  $x, y, z$  sont trois fonctions inconnues de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On note, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ .

a) Voici le tracé des trajectoires de cette équation différentielle pour diverses valeurs de  $x(0), y(0), z(0)$  :  
Que peut-on conjecturer lorsque  $x(0) = y(0)$  ?

b) Montrer que pour tout réel  $t$ , on a  $X'(t) = AX(t)$ .

c) On note, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ . On admet que  $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ . Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $Y'(t) = BY(t)$ .

d) i. Donner l'ensemble des solutions à l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 6\varphi(t). \quad (4)$$

ii. Donner l'ensemble des solutions à l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 2\varphi(t). \quad (5)$$

iii. Soit  $c \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $t \mapsto cte^{2t}$  est une solution particulière de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}. \quad (6)$$

iv. Déterminer l'ensemble des solutions à l'équation (6).

- e) En notant, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$ , montrer que  $\gamma$  est solution de (4),  $\beta$  est solution de (5), et  $\alpha$  est solution de (6) pour un réel  $c$  bien choisi.
- f) Montrer qu'il existe trois réels  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) &= 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{cases}$$

- g) En déduire, en notant  $x_0 = x(0), y_0 = y(0)$  et  $z_0 = z(0)$ , que

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) &= ((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0))e^{2t} + (\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0)e^{6t} \\ y(t) &= ((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0))e^{2t} + (\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0)e^{6t} \\ z(t) &= ((x_0 - y_0)t + z_0)e^{2t} \end{cases}$$

- h) Justifier la conjecture de la question 2a

## 12 Des gros problèmes

*Exercice 30 (Inspiré d'EDHEC 2008)*  
(Voir l'énoncé)

### I. Préliminaires

- 1) a) La fonction  $f$  étant de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ , sa dérivée est donc continue sur le segment  $[0, 1]$ , et y est donc bornée. Il existe donc un réel  $M$  tel que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|f'(x)| \leq M$ . Il reste à appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction  $f$  entre  $x$  et  $y \in [0, 1]$  pour obtenir que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

- b) Il s'agit simplement d'appliquer le résultat précédent pour  $x = t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \subset [0, 1]$  et  $y = \frac{k}{n} \in [0, 1]$  :

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M \left| t - \frac{k}{n} \right| = M \left( t - \frac{k}{n} \right).$$

- c) On peut intégrer l'inégalité précédente entre  $\frac{k}{n}$  et  $\frac{k+1}{n}$  pour obtenir que

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} M \left( t - \frac{k}{n} \right) dt$$

Il suffit alors de continuer en utilisant l'inégalité  $\int |f| \leq \int |f|$  :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \right| \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} M \left( t - \frac{k}{n} \right) dt \\ \Rightarrow & \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt - \left( \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M \int_0^{\frac{1}{n}} t dt \\ & \Rightarrow \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}. \end{aligned}$$



d) Il s'agit d'une application de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}. \end{aligned}$$

e) Comme  $\frac{M}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on trouve bien que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \iff \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt. \end{aligned}$$

2) Pour tout couple  $(p, q)$  d'entiers naturels, on pose

$$I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx.$$

a) C'est une intégration par partie :

$$\begin{aligned} I(p, q) &= \int_0^1 x^p (1-x)^q dx \\ &= \left[ \frac{x^{p+1}}{p+1} (1-x)^q \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} (-q(1-x)^{q-1}) dx \\ &= \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1). \end{aligned}$$

b) Montrons par récurrence sur  $q \in \mathbb{N}$ , que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0).$$

- *Initialisation* : On a bien que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $I(p, 0) = I(p+0, 0)!$
- *Hérédité* : Soit  $q \in \mathbb{N}$ , et supposons que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$ .  
On a alors, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} I(p, q+1) &= \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q) \\ &= \frac{q+1}{p+1} \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0) \\ &= \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0), \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

c) Il reste un simple calcul,

$$I(p+q, 0) = \int_0^1 x^{p+q} dx = \frac{1}{p+q+1},$$

donnant finalement que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \frac{1}{p+q+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

d) On peut proposer le programme suivant :

```
def I(p,q):
 if q==0:
 i=1/p
 else:
 i=q/(p+1)*I(p+1,q-1)
 return i
```

## II. Étude d'une suite de variables aléatoires

1) L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale  $\mathcal{B}(m, p)$  est

$$\mathbb{E}(Y) = mp.$$

Puisque l'on connaît aussi la variance d'une loi binomiale, il suffit de donner

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y(Y-1)) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y) \\ &= \text{Var}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 - \mathbb{E}(Y) \\ &= mp(1-p) + m^2p^2 - mp \\ &= mp(1-p+mp-1) \\ &= m(m-1)p^2. \end{aligned}$$

2) La loi de  $X_1$  est conditionnée par celle de  $U_1$ , qui est une variable constante. La loi de  $X_1$  est donc la loi de  $X_1$  conditionnée par l'événement certain  $U_1 = 0$ , c'est donc une loi binomiale  $\mathcal{B}(m, 0)$ ... qui est elle aussi une loi constante.  $X_1$  est donc une variable constante égale à 0.

3) a) Quelque soit la valeur de  $U_n$  (hors 0, où  $X_n$  est alors constante),  $X_n$  suit une loi binomiale de support  $\llbracket 0, m \rrbracket$ . Le support de  $X_n$  est donc  $X_n(\Omega) = \llbracket 0, m \rrbracket$ .

On peut ensuite utiliser la formule des probabilités totales associée aux différentes valeurs de  $U_n$ , donnant

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = i) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(U_n = \frac{k}{n}\right) \mathbb{P}_{[U_n = \frac{k}{n}]}(X_n = i) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \\ &= \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}. \end{aligned}$$

b) On reconnaît dans l'expression la formule donnant l'espérance d'une loi binomiale  $\mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$  (la somme commence à la valeur 1, mais terme pour  $i = 0$  est nul...), ce qui nous permet d'affirmer que

$$\sum_{i=1}^m i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} = m \frac{k}{n}.$$

Pour calculer l'espérance de  $X_n$  (qui existe, puisque le support de  $X_n$  est fini), on peut

alors effectuer

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_n) &= \sum_{i=0}^m i \mathbb{P}(X_n = i) \\
 &= \sum_{i=0}^m i \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^m i \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m \frac{k}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \frac{m}{n} \frac{n(n-1)}{2} \\
 &= \frac{m(n-1)}{2n}.
 \end{aligned}$$

- c) De même, on reconnaît dans l'expression la formule donnant l'espérance de  $Y(Y-1)$ , avec  $Y$  suivant une loi binomiale  $\mathcal{B}(m, \frac{k}{n})$ , ce qui nous permet d'affirmer que

$$\sum_{i=1}^m i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} = m(m-1) \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Pour calculer l'espérance demandée, on peut alors effectuer

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_n(X_n - 1)) &= \sum_{i=0}^m i(i-1) \mathbb{P}(X_n = i) \\
 &= \sum_{i=0}^m i(i-1) \frac{1}{n} \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^m i(i-1) \binom{m}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m(m-1) \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{n} \frac{m(m-1)}{n^2} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\
 &= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}.
 \end{aligned}$$

d) Il reste à utiliser la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 \\
 &= \mathbb{E}(X_n(X_n - 1)) + \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_n)^2 \\
 &= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{m(n-1)}{2n} - \left(\frac{m(n-1)}{2n}\right)^2 \\
 &= \frac{2m(m-1)(n-1)(2n-1) + 6mn(n-1) - 3m^2(n-1)^2}{12n^2} \\
 &= \frac{m(n-1)(2(m-1)(2n-1) + 6n - 3m(n-1))}{12n^2} \\
 &= \frac{m(n-1)(4mn - 2m - 4n + 2 + 6n - 3mn + 3m)}{12n^2} \\
 &= \frac{m(n-1)(mn + m + 2n + 2)}{12n^2} \\
 &= \frac{m(n-1)(m+2)(n+1)}{12n^2} \\
 &= \frac{m(m+2)(n^2+1)}{12n^2}.
 \end{aligned}$$

4) a) Les résultats des premières parties nous donnent, respectivement, que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_n = i) &= \binom{m}{i} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \binom{m}{i} \int_0^1 x^i (1-x)^{m-i} \quad \text{d'après la première partie} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \binom{m}{i} I(i, m-i) \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{i!(m-i)!}{(i+m-i+1)!} \quad \text{d'après la deuxième partie} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{m+1}.
 \end{aligned}$$

b) La loi limite obtenue est la loi uniforme sur  $\llbracket 0, m \rrbracket$  ! L'espérance et la variance associées à cette loi sont (en utilisant les formules sur  $\mathcal{U} \llbracket 1, m+1 \rrbracket$ ) :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X+1) - 1 = \frac{m+2}{2} - 1 \\
 &= \frac{m}{2} \\
 \text{Var}(X) &= \text{Var}(X+1) = \frac{(m+1)^2 - 1}{12} \\
 &= \frac{m(m+2)}{12}
 \end{aligned}$$

Il reste à vérifier

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_n) &= \frac{m(n-1)}{2n} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{m}{2} \\
 \text{Var}(X_n) &= \frac{m(m+2)(n^2+1)}{12n^2} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{m(m+2)}{12}.
 \end{aligned}$$

*Exercice 31 (Inspiré d'ESSEC 1998)*

(Voir l'énoncé) On considère dans ce problème un guichet auquel se présentent aléatoirement des clients. L'objectif est d'étudier la file d'attente se formant à ce guichet au cours du temps, ce qui est traité dans la partie II. Dans la partie I, on étudie une suite récurrente utilisée ultérieurement.

1) **Partie I**

On considère un nombre réel strictement positif  $a$  et le fonction  $f$  définie pour tout nombre réel  $x$  par

$$f(x) = \exp[a(x-1)].$$

On définit alors une suite  $(u_k)$  par son premier terme  $u_0 = 0$  et la relation

$$u_{k+1} = f(u_k).$$

a) **Convergence de la suite  $(u_k)$ .**

- i. Commençons par remarquer que si  $0 \leq x \leq 1$ ,  $x-1 \leq 0$  et  $f(x) \leq 1$ . comme  $f(x) > 0$ , on a bien le résultat.

Enfin, la fonction  $x \mapsto x-1$  étant croissante, ainsi que  $\exp$ , et  $a$  étant positif, on a bien que  $f$  est croissante.

—  $u_0 = 0 \in [0, 1]$  vérifie bien la première assertion. Enfin,  $u_1 = a \geq u_0$ .

— Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons

$$0 \leq u_n \leq 1 \text{ et } u_n \leq u_{n+1}.$$

On a alors que

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1] \text{ et } u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}.$$

- ii. La suite  $(u_k)$  est donc croissante et bornée, elle converge donc vers une limite  $L(a)$ .  
 iii. Puisque  $f$  est continue, on peut passer à la limite dans la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ , qui donne que  $L(a) = f(L(a))$ .

b) **Limite de la suite lorsque  $a < 1$ .**

- i. La fonction  $f$  est dérivable, de dérivée  $f'(x) = ae^{a(x-1)} \leq a$  pour  $x \in [0, 1]$ . On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis entre  $u_k$  et 1, pour obtenir que (avec le fait que  $u_{k+1} \leq 1$ )

$$0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k).$$

- ii. Montrons à présent par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq u_k - 1 \leq a^k.$$

— La formule des accroissements finis donne exactement

$$0 \leq u_0 - 1 \leq a^k(1 - 0).$$

— Soit  $k \in \mathbb{N}$ , supposons que  $0 \leq u_k - 1 \leq a^k$ . Alors

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{k+1} - 1 &\leq a(u_k - 1) \\ &\leq aa^k = a^{k+1}. \end{aligned}$$

Si  $0 < a < 1$ ,  $a^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ , et donc  $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$ .

c) **Limite de la suite lorsque  $a \geq 1$ .**

- i. On commence par étudier la fonction  $\varphi(x) = 1 - \frac{\ln(x)}{x}$ . Elle est dérivable sur  $[1, +\infty[$ , de dérivée  $\varphi'(x) = -\frac{\frac{x}{x} - \ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)-1}{x^2}$ , qui est négative pour  $x \in ]1, e[$  et positive pour  $x \geq e$ . Comme  $\varphi(1) = 1$  et  $\varphi(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 1$  par croissance comparée, on en déduit que  $\varphi(x) \leq 1$ . Elle admet de même un minimum local en  $e$  valant  $1 - \frac{1}{e} > 0$ , ce qui donne l'autre inégalité.

Calculons à présent

$$f'(x) = ae^{a(x-1)}.$$

L'équation se réécrit donc

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 &\iff ae^{a(x-1)} = 1 \\ &\iff a(x-1) = -\ln(a) \\ &\iff x = 1 - \frac{\ln(a)}{a}. \end{aligned}$$

Introduisons la fonction  $\psi(x) = f(x) - x$ . Sa dérivée est donc  $\psi'(x) = f'(x) - 1$ , qui s'annule donc en  $x_0 = 1 - \frac{\ln(a)}{a}$ .

La fonction  $\psi$  est donc décroissante sur  $[0, x_0]$  puis croissante, et on peut tracer le tableau de variations

| $t$        | 0     | $x_0$        | 1 |
|------------|-------|--------------|---|
| $\psi'(t)$ | —     | 0            | + |
| $\psi(t)$  | $e^a$ | $f(x_0) < 0$ | 0 |

On déduit de ce tableau que

$\psi$  s'annule deux fois sur  $[0, 1]$ , une fois en 1 et une fois en un point avant  $x_0$ .

L'équation  $f(x) = x$  a donc deux racines sur  $[0, 1]$ .

- ii. On considère la fonction  $\varphi : x \mapsto xe^{-x}$ . Cette fonction est bien définie sur  $[0, +\infty[$ , et y est dérivable, de dérivée  $\varphi' : x \mapsto (1-x)e^{-x}$ , positive sur  $[0, 1]$ , négative sur  $[1, +\infty[$ . La fonction  $\varphi$  est donc croissante, puis décroissante, avec un maximum global en 1 valant  $\psi(1) = \frac{1}{e}$ . Par croissance comparées,  $\varphi \xrightarrow{+\infty} 0$ .

Par définition de  $r(a)$ , on a que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{e^{a(r(a)-1)}}{r(a)} \\ &= \frac{ar(a)}{e^{-ar(a)}} \frac{e^{-a}}{a} \\ &= \frac{\varphi(a)}{\varphi(ar(a))}. \end{aligned}$$

On a donc finalement que  $\varphi(ar(a)) = \varphi(a)$ .

On a vu que la fonction  $\varphi$  étant strictement croissante sur  $[0, 1]$ . D'après le théorème de la bijection monotone,  $\varphi$  définit donc bien une bijection de  $[0, 1]$  sur son intervalle image  $[0, \frac{1}{e}]$ . Sa réciproque est elle-même strictement croissante, puisque  $\varphi$  l'est.

On a donc le tableau de variations de  $\varphi^{-1}$  :

| $t$          | 0 | $\frac{1}{e}$ |
|--------------|---|---------------|
| $\varphi(t)$ | 0 | 1             |

D'après l'égalité vu précédemment,  $\varphi(ar(a)) = \varphi(a) = ae^{-a}$ . Comme  $r(a)$  est la plus petite racine de l'équation  $x = f(x)$ , et que 1 est racine,  $r(a) \leq 1$ , et on peut donc dire que  $ar(a) = \varphi^{-1}(ae^{-a})$ , et donc  $r(a) = \frac{1}{a}\varphi^{-1}(ae^{-a})$  §.

Comme  $\varphi^{-1}(ae^{-a})$  est borné,  $r(a) = \frac{1}{a}\varphi^{-1}(ae^{-a}) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$ .

§. Attention, comme  $a \geq 1$ , il est faux de dire que  $\varphi^{-1}(ae^{-a}) = a$  !

iii. Montrons par récurrence que  $0 \leq u_k \leq r(a)$  pour tout  $k$ .

— On a bien  $0 \leq u_0 = 0 \leq r(a)$ .

— Soit  $k \in \mathbb{N}$ , supposons que  $0 \leq u_k \leq r(a) \leq 1$ . Comme  $f$  est croissante sur  $[0, 1]$ , on obtient que  $f(0) \leq f(u_k) \leq f(r(a)) \leq 1$ , ou encore que  $0 \leq f(0) \leq u_{k+1} \leq r(a)$ .

En passant à la limite dans l'équation  $u_{k+1} = f(u_k)$ , on trouve que  $L(a) = f(L(a))$ , donc que  $L(a)$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ . Comme  $L(a)$  est inférieure à la plus petite de ces solutions, on en déduit que  $L(a) = r(a)$ .

On peut à présent proposer le programme suivant, utilisant une méthode de recherche dichotomique :

```
import numpy as np

a=float(input("valeur de a? "))
u=0;v=1;
while v-u>0.01:
 if np.exp(a*((u+v)/2-1))>0:
 v=(u+v)/2
 else:
 u=(u+v)/2
print(u)
```

d) On a vu que pour  $a < 1$ ,  $L(a) = 1$ . On a ensuite vu que pour  $a \geq 1$ ,  $L(a) = \frac{1}{a}\varphi^{-1}(ae^{-a})$ . Comme cette expression est continue en  $a$ , on en déduit que  $L$  est continue sur  $[0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ . Comme  $L(1) = 1$ , on en déduit que  $L$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Comme  $\varphi$  est décroissante sur  $[1, +\infty[$  et  $\varphi^{-1}$ , croissante sur son intervalle de définition, on en déduit enfin que  $L$  est décroissante, et tend vers 0 en  $+\infty$  d'après les questions précédentes.

## 2) Partie II

a) **Loi de la variable aléatoire  $N_1$**

i. Conditionnellement à  $[D = n]$ , on observe une succession d'épreuves de Bernoulli de paramètre  $p$ , correspondant à l'arrivée ou non d'un client. Ces épreuves sont indépendantes, et  $N_1$  représente le nombre de succès. Ainsi,  $N_1$  conditionnée par  $[D = n]$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  :

$$\mathbb{P}_{[D=n]}(N_1 = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

ii. On utilise à présent la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $[D = n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_1 = k) &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_{[D=n]}(N_1 = k) \mathbb{P}(D = n) \\ &= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{n \geq k} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{n \geq k} \frac{1}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \lambda^n e^{-\lambda} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{k!n!} p^k (1-p)^n \lambda^{n+k} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (\lambda(1-p))^n \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-p\lambda}. \end{aligned}$$

Ceci montre bien que  $N_1$  suit une loi de Poisson de paramètre, d'espérance et de variance  $\lambda p$ .

**b) Probabilité que la file d'attente au guichet s'achève.**

Dans toute la suite du problème, on convient de poser  $p_k = \mathbb{P}(N_k = 0)$ .

- i. Pour que la file s'arrête, il faut et il suffit que personne n'arrive pendant le temps de passage d'une des vagues, c'est-à-dire que  $N_k = 0$  pour un certain  $k$ !

Si personne ne se présente pendant le traitement de la vague  $k$ , la durée de traitement de la vague  $k+1$  est nulle, puisqu'il n'y a personne à traiter, et personne ne se présente pendant ce temps bien évidemment, donc  $[N_k = 0] \subset [N_{k+1} = 0]$ .

- La suite  $p_k$  est donc croissante et bornée, donc converge vers une limite  $L \leq 1$ .  
 — D'après le théorème de la limite monotone, si  $F$  est l'événement « la file d'attente s'achève au bout d'un moment »,

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} [N_k = 0]\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([N_k = 0]) = L.$$

- ii. Pour la première formule, conditionnellement à  $[N_1 = 0]$ , c'est-à-dire qu'un seul client se présente pendant le traitement du premier client, la situation revient à la situation initiale : un seul client arrive, et on le sert. Que personne n'arrive lors du traitement de la  $k+1$ ème vague, revient à demander que personne n'arrive lors de la  $k$ ème vague après l'arrivée du second visiteur. Ainsi,

$$\mathbb{P}_{[N_1=1]}(N_{k+1} = 0) = \mathbb{P}(N_k = 0).$$

Dans le second cas, on peut imaginer que l'on découple le guichet en  $j$  guichets,  $j$  étant le nombre de personnes arrivées lors du traitement du premier client. Chaque personne ira donc au guichet qui était en train de servir un client lors de son arrivée, les guichets fonctionnant les uns après les autres. La situation est identique.

Une autre manière de voir est que chaque client arrivé lors du traitement du premier se voit assigné une couleur, et chaque client suivant se voit assigner la couleur du client qui est traité lors de son arrivée.

Dans ce cas, pour que personne n'arrive pendant le temps de traitement de la  $k+1$ ème vague, il faut que personne n'arrive durant le temps de traitement des  $k$ èmes vagues de chaque guichet (ou de chaque couleur). Chaque guichet se comporte indépendamment, ainsi, on a bien

$$\mathbb{P}_{[N_1=j]}(N_{k+1} = 0) = [\mathbb{P}(N_k = 0)]^j.$$

- iii. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements  $[N_1 = i]$  pour  $i \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} p_{k+1} = \mathbb{P}(N_{k+1} = 0) &= \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}_{[N_1=i]}(N_{k+1} = 0) \mathbb{P}([N_1 = i]) \\ &= \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}(N_k = 0)^i \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda p} \\ &= \sum_{i \geq 0} \frac{(\lambda p p_k)^i}{i!} e^{-\lambda p} \\ &= e^{\lambda p p_k} e^{-\lambda p} \\ &= e^{\lambda p(p_k - 1)}. \end{aligned}$$

De plus,  $p_0 = 0$  puisque  $N_0 = 1$  p.s..

- iv. On remarque que cette suite  $(p_k)$  a la même relation de récurrence, et le même premier terme, que la suite étudiée dans la première partie, avec  $a = \lambda p$ . On en déduit donc que  $(p_k)$  converge vers  $L(\lambda p)$ .



On rappelle que ceci signifie, en particulier, que si  $\lambda p \leq 1$  (temps moyen d'attente inférieur à la fréquence d'arrivée), on trouve que cette limite est 1 : la file s'arrête au bout d'un moment ; En revanche, dans le cas  $\lambda p \geq 1$ , il y a une probabilité non nulle que cette file ne s'arrête jamais !

v. En utilisant les valeurs approchées données à la fin de la partie 1, on trouve

|     | 1 | 2 | 4   | 8   |
|-----|---|---|-----|-----|
| .5  | 1 | 1 | .20 | .02 |
| .25 | 1 | 1 | 1   | .20 |

c) **Calcul de l'espérance  $E(N_k)$  de la variable aléatoire  $N_k$ .** On convient d'appeler « espérance de la variable aléatoire  $N_{k+1}$  conditionnée par l'événement  $N_k = i$  », et de noter  $E_{[N_k=i]}(N_{k+1})$ , l'espérance de  $N_{k+1}$  lorsque la probabilité est la probabilité conditionnelle sachant l'événement  $N_k = i$ , autrement dit

$$E_{[N_k=i]}(N_{k+1}) = \sum_{j=0}^{+\infty} j P_{[N_k=i]}(N_{k+1} = j).$$

i. Sachant  $N_k = i$ , le temps de traitement de ces  $i$  clients est donné par la somme de  $i$  v.a. indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Ainsi, si  $i = 0$ , la durée est égale à 0 p.s., et sinon, elle suit une loi de Poisson de paramètre  $i\lambda$ .

D'après les questions précédentes, où on a vu que la loi du nombre d'arrivée lors d'un temps d'attente suivant une loi de Poisson, est une loi de Poisson, on en déduit que  $N_k$  conditionné par  $N_{k-1} = i$  suit une loi de Poisson de paramètre  $i\lambda p$ . On trouve donc bien que

$$E_{[N_k=i]}(N_{k+1}) = i\lambda p.$$

ii. On utilise simplement la définition de l'espérance, en disant que

$$\begin{aligned} E(N_k) &= \sum_{i \geq 0} i P(N_k = i) \\ &= \sum_{i \geq 0} \frac{E_{[N_k=i]}(N_{k+1})}{\lambda p} P(N_k = i). \end{aligned}$$

On trouve alors que

$$\begin{aligned} E(N_k) &= \frac{1}{\lambda p} \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} j P_{[N_k=i]}(N_{k+1} = j) P(N_k = i) \\ &= \frac{1}{\lambda p} \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} j P_{[N_k=i]}(N_{k+1} = j) P(N_k = i) \\ &= \frac{1}{\lambda p} \sum_{j \geq 0} j \sum_{i \geq 0} P_{[N_k=i]}(N_{k+1} = j) P(N_k = i) \\ &= \frac{1}{\lambda p} \sum_{j \geq 0} j P(N_{k+1} = j) \\ &= \frac{1}{\lambda p} E(N_{k+1}), \end{aligned}$$

ce que l'on voulait.

iii. La suite  $(E(N_k))_k$  est donc géométrique, de raison  $\lambda p$ , de premier terme  $E(N_0) = 1$ . On trouve donc que

$$E(N_k) = (\lambda p)^k.$$

- iv. Le nombre  $M_n$  de client qui se présentent au guichet, jusqu'à ceux de la  $n$ ème vague, est donné par la somme des  $N_k$ . Son espérance est donc donnée par la somme des espérances :

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(N_k) = \sum_{k=0}^n (\lambda p)^k = \frac{1 - (\lambda p)^{n+1}}{1 - \lambda p}.$$

Cette formule est fautive pour  $\lambda p = 1$ , où l'espérance vaut bien sûr  $n$ .

- v. La limite de cette espérance tend vers  $\frac{1}{1 - \lambda p}$  si  $\lambda p < 1$ ,  $+\infty$  sinon. En effet, on a vu que si  $\lambda p > 1$ , la file ne s'arrête jamais avec probabilité non nulle : il est donc logique qu'un nombre infini de client se présentent en moyenne. On a donc le nombre moyen de clients donné par le tableau suivant :

|     | 1             | 2         | 4         | 8         |
|-----|---------------|-----------|-----------|-----------|
| .5  | 2             | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| .25 | $\frac{4}{3}$ | 2         | $+\infty$ | $+\infty$ |

*Exercice 32 (inspiré d'ESC01)*

(Voir l'énoncé) On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que les matrices colonnes :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

- 1) Il s'agit simplement de faire les calculs matriciels correspondants.
- 2) a) La résolution du système

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x - y + z = b \\ x + z = c \end{cases}$$

donne que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- b) Un simple calcul donne bien que

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- c) Un simple calcul donne bien que

$$\Delta = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- 3) On cherche à calculer la suite de vecteurs  $(X_n)$ , définis de la manière suivante :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n.$$

À cet effet, on pose  $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$

a) Il s'agit à nouveau d'un simple produit matriciel

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) D'après la formule de récurrence pour la suite  $(X_n)$ , et en observant que  $Y_n = PX_n$ , on a pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} X_{n+2} &= AX_{n+1} + BX_n \\ \text{donc } PY_{n+2} &= AY_{n+1} + BY_n \\ \text{donc } P^{-1}PY_{n+2} &= P^{-1}APY_{n+1} + P^{-1}BPY_n \\ \text{donc } Y_{n+2} &= DY_{n+1} + \Delta Y_n \end{aligned}$$

c) En explicitant les produits matriciels de la relation précédente, on trouve bien que pour tout entier  $n$ ,

$$\begin{cases} u_{n+2} &= u_{n+1} \\ v_{n+2} &= 4v_n \\ w_{n+2} &= -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$$

La suite  $(u_n)$  est donc constante à partir de  $n \geq 1$ , ce qui donne que

$$u_0 = -1 \text{ et } \forall n \geq 1 \ u_n = -3.$$

Les suites  $(v_{2n})$  et  $(v_{2n+1})$ , quant à elles, sont géométriques de raison 4, ainsi,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \\ v_{2n} &= 0.4^n = 0 \\ v_{2n+1} &= -1.4^n = -4^n. \end{aligned}$$

Enfin, la suite  $(w_n)$  est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

qui n'a qu'une seule racine double,  $-2$ . On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n$  s'écrit

$$w_n = (-2)^n(\lambda + \mu n).$$

On trouve  $\lambda$  et  $\mu$  en résolvant le système

$$\begin{cases} w_0 = 2 = \lambda \\ w_1 = 4 = -2(\lambda + \mu) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -4 \end{cases}$$

Donnant au final que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ w_n = (-2)^n(2 - 4n).$$

d) Il suffit à présent de reprendre la formule pour  $X_n$  :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \\ X_{2n} &= P^{-1}Y_{2n} \\ &= \begin{pmatrix} -3 + 4^n(2 - 8n) \\ -6 + 4^n(2 - 8n) \\ -3 + 4^n(2 - 8n) \end{pmatrix} \\ X_{2n+1} &= P^{-1}Y_{2n+1} \\ &= \begin{pmatrix} -3 + 4^n(3 + 16n) \\ -6 + 4^n(5 + 16n) \\ -3 + 4^n(4 + 16n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*Exercice 33 (Inspiré d'EML09)*

(Voir l'énoncé)

**I. Première partie : Étude d'une fonction**

- 1) a)  $f$  est continue sur  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  comme quotient (et somme) de fonctions usuelles continues. Il reste à voir la continuité en 0. Puisque qu'on reconnaît en l'inverse de  $f$  (ailleurs qu'en 0 l'inverse du taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0, on en déduit que  $f$  converge vers  $1 = f(0)$  en zéro :  $f$  est bien continue en 0, et donc sur  $\mathbb{R}$ .
- b) Par le même argument que précédemment (les fonctions usuelles étant de classe  $C^\infty$ ), on a bien que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}.$$

- c) On introduit la fonction  $g : x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ .
- i.  $g$  est de classe  $C^\infty$  (donc  $C^2$ ) comme somme d'exponentielle et de polynôme, et pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x - 1 - x \\ g''(x) &= e^x - 1. \end{aligned}$$

On a donc  $g'(0) = g''(0) = 0$ .

- ii. Soit  $x > 0$ . La fonction  $g''$  étant croissante, il suffit de montrer que  $|g''(-x)| < g''(x)$ . Or, par convexité,  $g''(x) = e^x - 1 \geq x \geq 1 - e^{-x}$ . Il suffit à présent d'utiliser l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $g'$  entre 0 et  $t$  pour trouver que, pour tout  $t \in [-x, x]$ ,

$$|g'(t) - g'(0)| = |g'(t)| \leq g''(x) \times t \leq g''(x)x.$$

- iii. Il suffit à présent d'utiliser l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $g$  entre 0 et  $t$  pour trouver que, pour tout  $t \in [-x, x]$ ,

$$|g(t) - g(0)| = |g(t)| \leq g''(x)x \times t \leq g''(x)x^2.$$

L'inégalité  $|g(x)| \leq g''(|x|)x^2$  provient simplement de l'inégalité précédente avec  $t = x$ .

- iv. On a donc montré que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \left| e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right| &\leq g''(|x|)x^2 \\ \left| \frac{e^x - 1 - x}{x^2} - \frac{1}{2} \right| &\leq g''(|x|) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne bien que

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

- v. On regarde le taux d'accroissement de  $f$  en 0 :

$$T_f(0, h) = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = -\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \frac{x}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}.$$

La fonction  $f$  est donc bien dérivable en 0, avec  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ . Elle est même de classe  $C^1$  car

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x - 1 - x + x(1 - e^x)}{x^2} \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} \\ &= \left( \frac{e^x - 1 - x}{x^2} - \frac{e^x - 1}{x} \right) \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = f'(0). \end{aligned}$$

- 2) a) L'application  $u$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u'(x) = -xe^x$ . On peut donc tracer le tableau de variations

|         |                                       |     |           |
|---------|---------------------------------------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$                             | $0$ | $+\infty$ |
| $u'(x)$ | $+$                                   | $0$ | $-$       |
| $u(x)$  | $-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$ |     |           |

- b) L'étude précédente montre que  $u$  est négative (et nulle uniquement en 0), et comme  $f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x-1)^2}$  est du signe de  $u$  (et  $f'(0) = -\frac{1}{2}$ ), on en déduit que  $f'(x) < 0$  pour tout  $x$ .
- c) Par croissance comparée, on trouve aisément que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $-\infty$  et 0 en  $+\infty$ . On a donc le tableau de variations

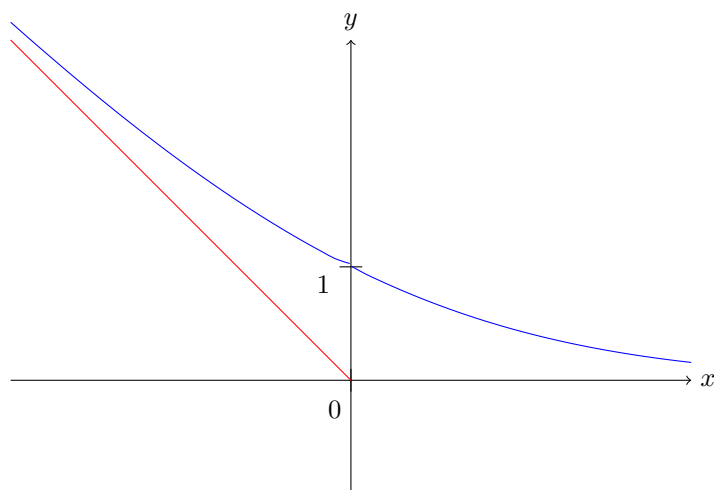
|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-\infty$ |

- d) Il suffit de remarquer que

$$f(x) + x = \frac{xe^x}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0,$$

ce qui montre que la courbe représentative de  $f$  a une asymptote oblique en  $-\infty$  d'équation  $y = -x$ .

- e) On obtient le graphe suivant :



## II. Deuxième partie : Étude d'une suite récurrente

- 1) Il suffit de résoudre :

$$\begin{aligned}
 f(x) - x = 0 &\iff \frac{2x - xe^x}{e^x - 1} = 0 \\
 &\iff 2 - e^x = 0 \\
 &\iff x = \ln(2).
 \end{aligned}$$

- 2) a) L'application  $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h'(x) = 2e^{2x} - 2(1+x)e^x = 2e^x(e^x - 1 - x)$ . Par convexité, on sait que  $e^x \geq 1 + x$ , donc  $h'$  est positive.  $h$  est donc croissante, et  $h(0) = 0$ , donc  $h$  est bien positive sur  $\mathbb{R}_+$ .

b) C'est un simple calcul :

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{2(1-x)e^x - 2 + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2} = \frac{2e^x - 2xe^x - 2 + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}.$$

- c) Comme  $f'(x) = \frac{h(x)}{2(e^x - 1)^2}$  et que  $h(x) \geq 0$  pour  $x \geq 0$ , on a bien  $f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0$ , et donc  $f'(x) \geq -\frac{1}{2}$ . L'autre inégalité  $f'(x) < 0$  a été démontrée à la partie précédente.
- d) Il s'agit d'une récurrence immédiate dès que l'on remarque que si  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) \in [0, 1]$  (car  $f$  est décroissante, avec  $f(0) = 1$  et  $f(1) = \frac{1}{e-1} > 0$ ).
- e) Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à  $f$  (dont la dérivée est contrôlée en valeur absolue par  $\frac{1}{2}$  d'après la question précédente) entre 0 et  $u_n$  : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

- f) Il s'agit à nouveau d'une récurrence :
- On a bien sûr  $|u_0 - \alpha| = 1 - \alpha \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$  (Notons que  $\alpha = \ln(2) < 1$ ).
  - Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$ . D'après la question précédente,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(1 - \alpha)$$

ce qui achève la récurrence.

- 3) Une simple application du théorème des gendarmes à l'inégalité précédente ( $\frac{1}{2^n}$  tend vers 0) montre bien que  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ .
- 4) On peut proposer le programme suivant :

```
import numpy as np

u=1
n=0
while np.abs(u-log(2))>10**-9:
 u=u/(np.exp(u)-1)
 n=n+1
print(n)
```

### III. Troisième partie : Étude d'une fonction intégrale

- 1) Puisque  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , elle admet une primitive  $F$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $G(x) = F(2x) - F(x)$ , ce qui montre bien que  $G$  est de classe  $C^1$  (et même  $C^2$ ).
- On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $G'(x) = 2f(2x) - f(x)$ . Calculons, pour  $x \neq 0$  :

$$G'(x) = \frac{2x}{e^{2x} - 1} - \frac{x}{e^x - 1}$$

$$= 2 \frac{2x}{(e^x - 1)(e^x + 1)} - \frac{x}{e^x - 1}$$

$$= x \left( \frac{4 - (e^x + 1)}{(e^x - 1)(e^x + 1)} \right)$$

$$= x \left( \frac{3 - e^x}{e^{2x} - 1} \right).$$

De plus, on a bien sûr  $G'(0) = 2f(0) - f(0) = 1$ .

- 2) a) Pour  $x \geq 0$ ,  $x \leq 2x$ , et comme  $f$  est décroissante, pour  $0 \leq t \leq x$   $G'(t) \leq 2f(x) - f(x) = f(x)$  donc  $G(x) \leq \int_0^x f(x)dt = xf(x)$ . Comme  $f$  est positive,  $G$  l'est aussi. Par croissance comparée,  $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , et donc  $G \xrightarrow{+\infty} 0$  d'après de théorème des gendarmes.
- b) Pour  $x \leq 0$ , et  $x \leq t \leq 0$ ,  $f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} - \int_{2x}^x f(x)dt &\leq -G(x) \leq - \int_{2x}^x f(2x)dt \\ \implies -xf(x) &\leq -G(x) \leq -xf(2x) \\ \implies xf(x) &\geq G(x) \geq xf(2x) \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui donne à nouveau l'encadrement voulu.

On en déduit, comme  $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ , que  $G \xrightarrow{-\infty} +\infty$ .

- 3) Le signe de  $G'(x)$  est celui de  $3 - e^x$ , on trace donc le tableau de variations suivant

|         |           |             |           |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\ln(3)$    | $+\infty$ |
| $G'(x)$ | +         | 0           | -         |
| $G(x)$  | $-\infty$ | $G(\ln(3))$ | 0         |

*Exercice 34 (Inspiré d'HEC 2004)*

(Voir l'énoncé)

### 1) Un résultat préliminaire

- a) i. Puisque la variable aléatoire  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , on en déduit que les événements  $[X = n], n \in \mathbb{N}^*$ , forment un système complet d'événements. Ainsi la série suivante converge :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[X = n] = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1.$$

- ii. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n x^n$  est positif, et majoré par  $a_n$ . La série de terme général  $a_n x^n$  est donc majorée par une série convergente, et est donc convergente.
- b) On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose que cette fonction est dérivable en 1, c'est-à-dire que

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} f'(1).$$

- i. La quantité demandée peut se réécrire sous la forme (les séries étant toutes convergentes) :

$$\begin{aligned}
 \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} &= \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n}{1 - x} \\
 &= \frac{1}{1 - x} \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \right] \\
 &= \frac{1}{1 - x} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_n x^n) \quad (\text{somme de deux séries convergentes}) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \frac{1 - x^n}{1 - x} \right) \quad (\text{multiplication de série convergente par un réel}) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \quad (\text{formule pour une somme géométrique}).
 \end{aligned}$$

- ii. Chacun des termes de la série obtenue à la question précédente est croissant sur  $[0, 1[$ , et donc la somme est elle aussi croissante (on peut aussi passer par les sommes partielles ou la comparaison des séries et le montrer à la main). Ainsi cette quantité est toujours inférieure à sa limite en 1 :

$$0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq f'(1).$$

(Bien sûr, il s'agit d'une série à termes positifs, et donc de somme positive.)

- iii. La série trouvée précédemment est à termes positifs, ses sommes partielles sont donc inférieures à la somme totale : pour tout  $x \in [0, 1[$ ,

$$\sum_{n=1}^N \left( a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \leq f'(1)$$

on peut prendre la limite quand  $x \rightarrow 1$  :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \left( a_n \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} 1^k}_n \right) &\leq f'(1) \\
 \sum_{n=1}^N n a_n &\leq f'(1).
 \end{aligned}$$

La série de terme général  $n a_n$  est donc une série à termes positifs, majorée, elle converge donc (On peut refaire le raisonnement : la suite des sommes partielles est croissante, et majorée, donc converge).

- iv. Pour tout  $x \in [0, 1[$ , et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq n a_n$ . Les deux termes donnant des séries convergentes, on a finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n,$$

ce qui, en réutilisant les inégalités précédentes, donne bien

$$0 \leq \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq f'(1).$$



v. L'espérance de  $X$  est justement donnée par la série

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}[X = n] = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n,$$

qui converge. Reste à montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n = f'(1)$  : comme  $\frac{f(1)-f(x)}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} f'(1)$ , on

trouve, à partir de l'inégalité précédente, que  $f'(1) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1)$ , c'est-à-dire que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n = f'(1).$$

## 2) Loi du temps d'attente de la première configuration « pile, pile, face ».

- a) La suite  $(U_n)$  est- très clairement une suite croissante d'événements (même avec  $U_0 = U_1 = \emptyset$ , cohérent avec  $u_0 = u_1 = 0$ ). La suite de leurs probabilités est donc croissante elle aussi (on peut détailler : comme  $U_n \subset U_{n+1}$ ,  $\mathbb{P}(U_n) \leq \mathbb{P}(U_{n+1})$ ). Puisque ce sont des probabilités, elle est aussi majorée par 1. Comme toute suite croissante et majorée de bonne famille, elle converge.
- b) i. Le calcul de  $\mathbb{P}(B_n)$  se fait par indépendance des événements  $P_i$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) \\ &= \mathbb{P}(P_{n-2})\mathbb{P}(P_{n-1})\mathbb{P}(F_n) \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

- ii. Pour que l'événement  $B_n$  se réalise, il faut, entre autre, que le  $n^{\text{e}}$  lancer donne "face", ce qui est incompatible avec les événements  $B_{n+1}$  et  $B_{n+2}$ , où le  $n^{\text{e}}$  lancer doit donner "pile". De même, pour que  $B_{n+1}$  soit réalisé, il faut que le  $n+1^{\text{e}}$  lancer donne "face", ce qui est incompatible avec  $B_{n+2}$ .
- iii. On peut donc aisément calculer la probabilité des réunions (disjointes) suivantes :

$$\begin{aligned} u_3 &= \mathbb{P}(B_3) \\ &= \frac{1}{8}, \\ u_3 &= \mathbb{P}(B_3 \cup B_4) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, \\ u_3 &= \mathbb{P}(B_3 \cup B_4 \cup B_5) \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

c) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 5.

- i. On a vu que  $B_{n-1}$  et  $B_n$  étaient incompatibles avec  $B_{n+1}$ , ainsi, pour que  $U_n$  soit réalisé en même temps que  $B_{n+1}$ , il faut que  $B_i$  soit réalisé pour  $i \leq n-2$  :  $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$ . De plus, d'après le théorème des coalitions,  $U_{n-2}$  et  $B_{n+1}$  sont indépendants, et donc  $\mathbb{P}(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = \frac{1}{8}u_{n-2}$ .
- ii. Bien sûr,  $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ . On peut en calculer la probabilité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_{n+1}) &= \mathbb{P}(U_n \cup B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_{n-2} \cap B_{n+1}) \\ &= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}). \end{aligned}$$

iii. On vérifie effectivement que

$$u_3 = \frac{1}{8} = 0 + \frac{1}{8}(1 + 0)$$

$$u_4 = \frac{2}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}(1 + 0).$$

iv. On a vu que la suite  $(u_n)$  avait une limite  $\ell$ . Elle doit donc vérifier  $\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell)$ , c'est-à-dire  $\ell = 1$ . On est donc presque-sûr d'obtenir une succession "pile", "pile", "face" :  $\mathbb{P}[Y = 0] = 0$ .

d) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose  $v_n = 1 - u_n$ .

i. Simple calcul :

$$v_1 = 1 - u_1 = 1$$

$$v_2 = 1 - u_2 = 1$$

$$v_3 = 1 - u_3 = \frac{7}{8}$$

$$v_4 = 1 - u_4 = \frac{3}{4}.$$

ii. On réutilise la relation précédente :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

$$\iff 1 - v_{n+1} = 1 - v_n + \frac{1}{8}(v_{n-2})$$

$$\iff v_{n+1} = v_n - \frac{1}{8}v_{n-2}$$

$$\iff \frac{1}{8}v_{n-2} = v_n - v_{n+1}$$

$$\iff v_{n-2} = 8(v_n - v_{n+1}).$$

iii. Calculons, pour tout entier  $N \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \sum_{k=1}^N v_k &= \frac{1}{8} \sum_{n=3}^{N+2} v_{n-2} \\ &= \sum_{n=3}^{N+2} v_n - v_{n+1} \\ &= v_3 - v_{N+3} \text{ (somme télescopique)} \\ &= \frac{7}{8} - v_{N+3}. \end{aligned}$$

iv. La relation précédente montre bien que  $\frac{1}{8} \sum_{k=1}^N v_k$  converge vers  $\frac{7}{8}$  quand  $N \rightarrow +\infty$ , et

donc que la série  $\sum_{n \geq 1} v_n$  converge vers

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 7.$$

e) i. Bien sûr

$$[Y = n] = U_n \cap \overline{U_{n-1}}$$

et donc

$$\mathbb{P}[Y = n] = u_n - u_{n-1} = v_{n-1} - v_n.$$

ii. On a bien

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y = 2] &= 0 \\ &= 1 - 1 \\ \mathbb{P}[Y = 3] &= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3) \\ &= \frac{3}{8} \\ &= 1 - \frac{7}{8}.\end{aligned}$$

iii. Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} (v_{n-1} - v_n) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} v_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} v_n x^n \\ &= x + x \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n + x \\ &= xh(x) - h(x) + x \\ &= (x-1)h(x) + x.\end{aligned}$$

La convergence est bien assurée puisque  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n$  converge (car  $0 \leq v_n x^n \leq v_n$ , dont la série converge comme vu précédemment).

iv. Simple calcul :

$$\begin{aligned}\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \frac{(x-1)h(x) + x - ((1-1)h(1) + 1)}{x - 1} \\ &= \frac{(x-1)(h(x) + 1)}{x - 1} \\ &= h(x) + 1.\end{aligned}$$

v. Le terme général de la série (convergente)  $h(x)$  est croissant en  $x$ , donc  $h$  est croissante. Le terme général est de plus positif, donc les sommes partielles sont inférieures à la somme : pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , et tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$\sum_{k=1}^N v_k x^k \leq h(x) \leq h(1).$$

On peut prendre la limite de cette inégalité (la fonction  $h$  étant croissante, possède bien une limite en 1) quand  $x \rightarrow 1$  pour trouver que

$$\sum_{k=1}^N v_k \leq \lim_{x \rightarrow 1} h(x) \leq h(1).$$

Prendre à présent la limite quand  $N \rightarrow +\infty$  donne la conclusion par théorème des gendarmes :  $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} h(1)$ .

- vi. Les questions précédentes donnent une expression du taux d'accroissement de  $g$  en 1, et donc :

$$\begin{aligned} T_g(1, x) &= \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \\ &= h(x) + 1 \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 1} h(1) + 1 = g'(1). \end{aligned}$$

Remarquons à présent que  $h(1) = \sum_{k=1}^N v_k = 7$  comme calculé précédemment.

Nous avons ainsi montré que la variable aléatoire  $Y$  vérifiait les hypothèses de la partie préliminaire, à savoir que sa fonction génératrice  $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$  était dérivable en 1, de dérivée  $h'(1) + 1 = 8$ . On en déduit que  $Y$  a une espérance, et  $E(Y) = 8$ .

### 3) Paradoxe de Walter Penney (1969)

- a) i. Les événements  $B'_n$ ,  $B'_{n+1}$  et  $B'_{n+2}$  sont bien deux à deux incompatibles. Par exemple, pour que  $B'_{n+2}$  soit réalisé, il faut que le  $n^e$  lancer donne "face", ce qui est incompatible avec les deux autres.
- ii. Le raisonnement de la partie précédente reposait sur l'incompatibilité des événements  $B_i$ , l'indépendance des événements constituant les  $B_i$ , et leur probabilité  $\frac{1}{8}$ . Toutes ces hypothèses sont aussi vraies pour les  $B'_i$ , donc on a de même  $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$  pour tout  $n \geq 3$ .
- iii. Les suites  $(u_n)$  et  $(u'_n)$  vérifient la même relation de récurrence, et ont les mêmes premiers termes (vérification immédiate). Elles sont donc égales.
- iv.  $Y$  et  $Y'$  ont clairement le même support, et, comme précédemment,

$$\mathbb{P}[Y' = n] = u'_n - u'_{n-1} = u_n - u_{n-1} = \mathbb{P}[Y = n] :$$

Les variables aléatoires  $Y$  et  $Y'$  ont la même loi, et donc la même espérance.

- b) i. Remarquons que pour que le joueur 1 gagne, il faut une succession de deux piles avant sa victoire. Mais nécessairement, il ne peut y avoir eu de face avant cette série de pile, car le joueur 2 aurait alors gagné. Le joueur 1 ne peut donc gagner au  $n^e$  lancer que s'il n'y a eu que des piles avant ce lancer :

$$g_n = \mathbb{P} \left( \bigcap_{k=1}^{n-1} P_k \cap F_n \right) = \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

par indépendance. En particulier,  $g_3 = \frac{1}{8}$  et  $g_4 = \frac{1}{16}$ .

- ii. L'événement  $G$  : «  $A$  est déclaré gagnant » est la réunion des événements incompatibles  $G_n$ , sa probabilité est donc (théorème de la limite monotone)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G) &= \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k \\ &= \frac{1}{8} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

c) i. On a

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 \text{ (bien sûr !)} \\ d_2 &= \mathbb{P}(\overline{P_1 \cap P_2}) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{ (indépendance)} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

ii. Considérons une succession de  $n+2$  lancers consécutifs. Les événements  $P_1$  et  $P_2$  forment un système complet d'événement. Si le premier lancer donne "pile", si l'on ne veut pas deux "piles" consécutifs ensuite, il faut nécessairement "face" au second lancer, après quoi il ne faut plus de paire de pile consécutifs lors des  $n$  lancers suivants (indépendants des deux premiers lancers). Si le premier lancer donne "face", il faut et il suffit que les  $n+1$  lancers suivants (à nouveaux indépendants) ne comportent pas de "piles" consécutifs :  $d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}d_n = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$ .

iii. On vient de montrer que la suite  $(d_n)$  était une suite récurrente linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique  $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$ . Son discriminant est  $\Delta = \frac{5}{4}$ , ses racines  $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$  et  $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ . Il existe donc deux constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$  telles que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on aie

$$d_n = \alpha \left( \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n + \beta \left( \frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n$$

iv. Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \left( \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n + \beta \left( \frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n. \end{aligned}$$

Puisque  $\sqrt{5} < 3$ ,  $r_1$  comme  $r_2$  sont strictement majorées en valeur absolue par 1, et donc les deux séries géométriques précédentes convergent bien. La série de terme général  $d_n$  converge donc bien. Notons  $D$  sa somme.

On a donc, d'après la relation de la question 3(c)ii,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+1} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \\ \iff D - d_1 - d_2 &= \frac{1}{2}(D - d_1) + \frac{1}{4}D \\ \iff D - 1 - \frac{3}{4} &= \frac{3}{4}D - \frac{1}{2} \\ \iff \frac{1}{4}D &= \frac{5}{4} \\ \iff D &= 5. \end{aligned}$$

d) i. L'événement  $[T > n] \cup [T = 0]$  sera réalisé ssi aucun joueur n'est déclaré gagnant au bout de  $n$  lancers, ce qui revient à dire que soit on n'a aucune succession de deux "piles" consécutifs, soit, que des piles (car sinon il y aurait une face avant les deux premiers piles consécutifs, ou après les deux derniers, et l'un des joueurs aurait gagné). Ainsi :

$$\mathbb{P}([T > n] \cup [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n.$$

ii. On a alors

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([T = n]) &= \mathbb{P}([T > n-1] \cup [T = 0] \cap \overline{[T > n] \cup [T = 0]}) \\
 &= \mathbb{P}([T > n-1] \cup [T = 0]) - \mathbb{P}([T > n] \cup [T = 0]) \\
 &= \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n \\
 &= \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n.
 \end{aligned}$$

iii. L'événement  $T$  : « l'un des joueurs est déclaré gagnant » est la réunion des événements disjoints  $[T = n]$ . Sa probabilité est donc égale à la somme des  $\mathbb{P}([T = n])$ . On reconnaît une série des accroissements et une série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , qui converge donc vers

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[T] &= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + d_2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n \\
 &= \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{3}{4} - 0 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

On a ici bien sûr utilisé le fait que, comme la série  $d_n$  converge,  $d_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

e) On a vu que la probabilité que  $A$  soit déclaré gagnant est de  $\frac{1}{4}$ , et que l'un des deux joueurs était p.s. déclaré gagnant : la probabilité que le joueur  $B$  soit déclaré gagnant est donc de  $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .

Ceci semble être un paradoxe : on a vu que une succession PPF et une succession FPP avaient la même chance d'arriver, et donc les critères de victoire de chacun des joueurs semblait identiques. Or le joueur  $B$  a beaucoup plus de chance de gagner que le joueur  $A$ . Ce paradoxe s'explique en remarquant que les arrivées des chaînes gagnantes sont loin d'être indépendantes : une succession gagnante pour  $B$  (FPP) est une succession très avantageuse pour  $A$  (qui a juste besoin d'un F)... mais trop tard. Les conditions de victoire de  $B$  ont donc une forte probabilité d'arriver avant celles de  $A$ .

f) Si la configuration gagnante du joueur  $A$  avait été « pile, pile, face » et celle du joueur  $B$ , « face, face, pile », un changement de label "pile" et "face" sur la pièce transforme une victoire de  $A$  en une victoire de  $B$ , et donc la probabilité de gain des deux joueurs est la même.

- g) i. On utilise les formules trouvée précédemment (toutes ces séries convergent) :

$$\begin{aligned}
 t(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[T = n] x^n \\
 &= \sum_{n=3}^{+\infty} \left( \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n \right) x^n \\
 &= \sum_{n=3}^{+\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^n + \sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1} x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n x^n \\
 &= \frac{x^3}{8} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^n + x \sum_{n=2}^{+\infty} d_n x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n x^n \\
 &= \frac{x^3}{8} \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} + x(d(x) - d_1 x) - (d(x) - d_1 x - d_2 x^2) \\
 &= \frac{x^3}{4} \frac{1}{2-x} + (x-1)d(x) - x^2 + x + \frac{3}{4}x^2 \\
 &= \frac{x^3}{4} \frac{1}{2-x} + (x-1)d(x) - \frac{1}{4}x^2 + x \\
 &= \frac{x^2}{2} \left( \frac{x}{2(2-x)} - \frac{2-x}{2(2-x)} \right) + (x-1)d(x) + x \\
 &= \frac{x^2}{2} \left( \frac{2(x-2)}{2(2-x)} \right) + (x-1)d(x) + x \\
 &= x^2 \left( \frac{x-1}{2(2-x)} \right) + (x-1)d(x) + x \\
 &= (x-1) \left( d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} \right) + x.
 \end{aligned}$$

(ouf !)

- ii. On reprend la formule précédente :

$$\begin{aligned}
 \frac{t(x) - t(1)}{x - 1} &= \frac{(x-1) \left( d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} \right) + x - (1-1) \left( d(1) + \frac{1^2}{2(2-1)} \right) - 1}{x - 1} \\
 &= \frac{(x-1) \left( d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} \right) + x - 1}{x - 1} \\
 &= d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} + 1.
 \end{aligned}$$

- iii. La fonction génératrice  $d$  est construite de façon similaire à la fonction  $h$  précédente, et  $d(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} d(1)$ . L'étude précédente montre de façon similaire que le taux d'accroissement de  $t$  en 1 converge vers  $d(1) + \frac{1^2}{2(2-1)} + 1 = d(1) + \frac{3}{2} = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$ .

À nouveau, la variable aléatoire  $T$  vérifiait les hypothèses de la partie préliminaire, on en déduit que  $T$  a une espérance, et  $\mathbb{E}(T) = \frac{13}{2}$ .

#### 4) Simulation informatique

- a) On a les tableaux suivants :

|     |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| $y$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $x$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $y$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |

|     |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $x$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |

- b) La variable  $k$  augmente (ligne 7) après chaque simulation du lancer de pièce (ligne 4). Elle représente donc le nombre de lancers de pièce effectués.
- c) La variable  $x$  passe à 1, puis 2, dans le cas où  $r==1$ , c'est-à-dire si la pièce tombe sur pile. Elle compte donc (initialement) le nombre de pile consécutifs. Elle passe à 3 si elle vaut 2 et la pièce tombe sur face : donc quand on vient d'avoir la séquence PPF.
- d) La variable  $y$  quant à elle est réinitialisée à 1 lorsque la pièce tombe sur face, puis augmente à chaque pile : elle vaut donc 3 lorsqu'on obtient la séquence FPP.
- e) On pourrait alors finir le programme de la sorte :

```
if x==3:
 disp("le joueur A gagne")
else:
 disp("le joueur B gagne")
```

L'ordinateur afficherait alors, respectivement, le joueur A gagne, le joueur B gagne, le joueur B gagne.



