QUELQUES EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES

1) **Une introduction aux mathématiques babyloniennes**, où l'on apprend à résoudre des équations du second degré "2000BC-style".
2) Ⓟ**le Nombre d'Or, les nombres de Fibonacci, les feuilles et les escargots** : qui eût cru qu'une suite récurrente linéaire d'ordre deux se retrouve partout, de la coquille des escargots aux fleurs de tournesol ?
3) **Euler, les graphes, les polyèdres, les pavages** : où l'on parle d'une petite formule qui parle de graphes, de dés à plusieurs faces, et de pavages très art déco.
4) (difficile !) **prisonniers !** : ou comment contrer les plans maléfiques d'un mathématicien fou.
5) **Exercices divers**
   5. **une question d'aire...** : Saurez-vous trouver l'outil vu cette année permettant de trouver comment rendre une aire la plus petite possible ?
   6. **des tables de bar toujours bancales...** : ou une astuce pour ne plus jamais subir ces tables bancales au bar.
   7. **un curieux polygone** : ou comment faire tenir un mobile en équilibre sur des points d'appui donnés.
   8. **des antipodes... très proches !** : une question de géographie au résultat pas forcément très intuitif.
   9. Ⓟ**une preuve historique du théorème de Pythagore** : en jouant avec un tangram.
   10. Ⓟ**les Tours de Hanoi** : un petit jeu antédiluvien à la combinatoire pas si facile...
   11. Ⓟ**un pont... harmonieux ?** : ou montrer qu'il est possible de faire tenir une brique au-dessus du vide, sans colle ni mortier.

1 Mathématiques babyloniennes

Exercice 1
Nous sommes en 1800 avant notre ère. Vous êtes un apprenti scribe, et Dubsar, votre maître, est ici pour vous enseigner les rudiments des mathématiques (un autre maître vous a déjà appris à écrire en cunéiforme, et à compter en base 60, mais ceci devra faire l'objet d'un autre TD).

1) **Première leçon : la complétion du carré.**

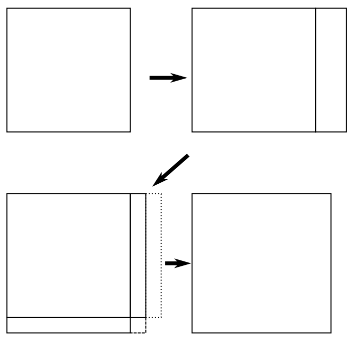
   a) Dubsar commence par vous présenter le problème suivant : *Quel côté doit avoir un carré dont la superficie serait de 10* sar (un *sar* correspondant à une perche-carrée [*]) *?* Il vous propose le raisonnement suivant :

   — *Commençons par un carré de 3 perches de côté. Son aire est, tu le sais, de 9* sar*, c'est un peu trop peu.*

   — *Si l'on voulait un rectangle de 3 perches de hauteur, quelle devrait être sa longueur pour avoir une surface de 10* sar *?*

   — *Remarque, sagace élève, que l'on peut couper la moitié de la surface ajoutée et la placer en-dessous du carré initial pour obtenir cette figure, qui ressemble fort à un carré, malgré un petit bout manquant. Quel est le côté de ce nouveau carré, et son aire n'est-elle pas bien plus proche des 10* sar *recherchés ? De combien est-elle ?*

   — *La surface est en effet à présent trop importante. Mais nous pouvons continuer : quel largeur devrait-on choisir, en gardant la longueur du prédédent carré, pour avoir un rectangle de la bonne aire ? Trouveras-tu, astucieux étudiant, comment continuer à raffiner la valeur cherchée ?*



   b) Dubsar, pour la prochaine leçon, vous laisse avec l'exercice suivant : *Saurez-vous calculer (environ) la longueur de la diagonale d'un carré d'un perche de côté ?* Il vous laisse le petit diagramme suivant pour vous aider, en vous glissant à l'oreille que son dernier élève a trouvé une réponse correcte à 6 chiffres après la virgule [†].

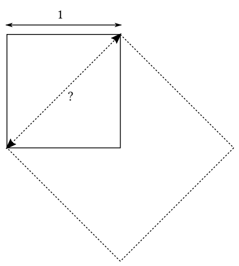


FIGURE 1 – l'indice de Dubsar

FIGURE 2 – le travail de son élève (YBC 7289)

   c) Saurez-vous mettre des notations "modernes" sur l'algorithme présenté par Dubsar ? vous pourrez peut-être reconnaître un exercice de TD que nous avons déjà abordé...

---

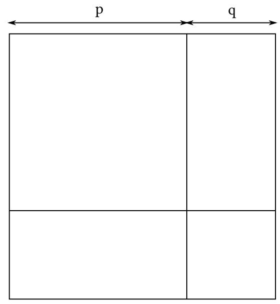
*. c'est-à-dire l'aire d'un carré d'une perche (*nindan*) de côté (environ 12m).

†. techniquement, seulement trois chiffres, mais en base 60, donc à $\dfrac{1}{60^3} \approx 0.00005$ près. La réponse, $[1;24,51,10] = 1 + \dfrac{24}{60} + \dfrac{51}{60^2} + \dfrac{10}{60^3} \approx 1.4142130$ est quand même juste à 0.0000006 près ! Cette tablette a plus de trois millénaires.

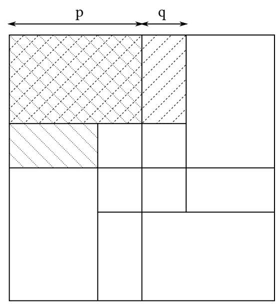
2) **Seconde leçon : règles binomiales et conjugées**

a) Dubsar est content de vos progrès, et est prêt à vous présenter un secret jalousement gardé par les scribes : les règles quadratiques.

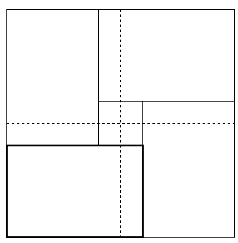
Il commence par retracer un diagramme familier, et vous parle en ces termes : *Vois, élève prodige, cette figure, et médite-la. Vois-tu que le carré de deux longueurs ensembles, est identique aux carrés de chacune séparée, auxquels s'ajoutent deux rectangles construits avec ces deux longueurs ?*
Vous y réfléchissez quelque temps, et vous rendez compte qu'il s'agit d'une identité remarquable bien connue : laquelle ?



Dubsar continue : *Considère à présent, esprit studieux, cette figure. Vois-tu que les deux surfaces hachurées : celle du gnomon, et celle du rectangle ; sont identiques ? Et qu'ainsi, à partir de deux longueurs, la différence de leurs carrés est identique au rectangle de l'une ajouté à l'autre, par l'une ôtée à l'autre ?*
Après quelque réflexion, vous vous appercevez à nouveau qu'il s'agit d'une identité remarquable bien connue : laquelle ?



b) Dubsar vous guide alors dans un exercice, qu'il décrit comme fondamental :
Ammi-zaduga veut construire un champ rectangulaire de 15 sar. *Son long côté devra faire 2 perches de plus que le petit. Quelles devront être les dimensions de ce champ ?*
Remarque, ingénieux disciple, que nous cherchons deux longueurs à 2 perches l'une de l'autre. Elles seront donc chacune à 1 perche de leur moyenne, et nous pouvons utiliser ainsi la règle conjugée, comme ceci. (et il trace la figure ci-contre)
Vois que le carré central doit avoir un côté de 2 perches, pour 4 sar *de surface ; et que le grand carré est constitué de quatre carrés dont le côté correspond à la moyenne cherchée.*
Finissons par observer que l'aire de chacun de ces quatre carrés formant le grand doit être égale, d'après la règle conjugée, à nos 15 sar, *auxquel s'ajoute un quart des 4* sar, *pour un total de 16* sar.



Ces carrés "moyens" doivent donc faire 4 perches de longueur, et si nous ajoutons ou ôtons la perche de différence, nous trouvons que notre rectangle devra faire 3 perches de longueur et 5 de largeur.
Si vous deviez poser, en termes modernes, le problème ci-dessus, quel serait-il ? Seriez-vous capable de le résoudre ? En quoi les calculs proposés par Dubsar correspondent-ils aux calculs que vous auriez exécuté ?

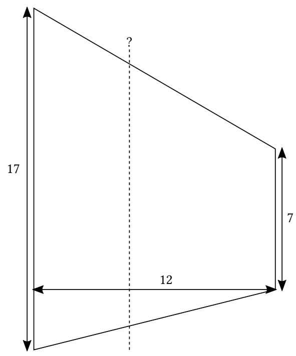
Remarque
Par cette méthode, les anciens babyloniens étaient capables de résoudre n'importe quelle équation quadratique de la forme $x^2 + bx = c$, $x^2 + c = bx$ ou $x^2 = bx + c$, avec des coefficients positifs (les babyloniens n'ayant pas encore inventé les nombres négatifs). Le dernier type, $x^2 + bx + c$, n'ayant que des solutions négatives, n'est évidemment pas résolvable par ces méthodes.
Une mathode graphique de résolution est présentée en annexe.

3) **Troisième leçon : un problème historique**

Votre apprentissage touche bientôt à sa fin, et Dubsar vous propose, pour votre dernier examen, le problème suivant :
Je cherche un rectangle de 27 iku *(2700* sar*) de surface, dont la diagonale fait 75 perches de long. Quels sont ses côtés ?*
Il vous indique qu'il a déjà rédigé la correction, qui est disponible chez lui...

Remarque
Ce problème a effectivement été posé (mais pas forcément pour un examen de scribe !), et la correction est parvenue jusqu'à nous, sous forme de la tablette IM 67118, dont voici une image ! Une paraphrase de la solution proposée est fournie en annexe.

4) **Et après...**



Vous avez passé avec succès l'examen, et vous voici scribe ! Votre premier travail est une affaire de succession... Un propriétaire terrien possédait un champ trapézoïdal, de 12 perches de long, et de 17 perches de large à l'entrée, pour seulement 7 perches au fond. Il désire le répartir équitablement entre ses deux héritiers. Où couper le champ (à quelle profondeur, et quelle sera la longueur du nouveau "fond") pour que les deux champs créés aient la même surface ?

Remarque
Eh oui, il s'agit à nouveau d'un problème historique, présenté dans une tablette akkadienne référencée IM 58045. La solution n'est pas fournie, mais la réponse (en tous cas pour le fond du terrain) tombe surprenamment juste... ce qui laisse penser qu'il s'agit d'un exercice.
Les problèmes "pratiques" auxquels étaient confrontés les scribes étaient autrement plus complexes, comme l'atteste la tablette YBC3879, qui cherche à découper un champ passablement biscornu en cinq parties égales...

FIGURE 3 – la tablette YBC3879

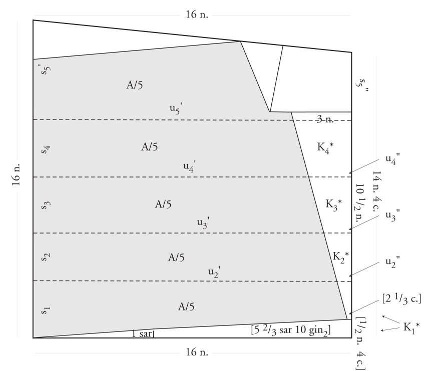


FIGURE 4 – le découpage final

Annexe 1
Voici trois diagrammes permettant de résoudre trois équations quadratiques à coefficients positifs. Arriverez-vous à les comprendre, et à comparer les résultats graphiques à ceux donnés par la formule du discriminant ?

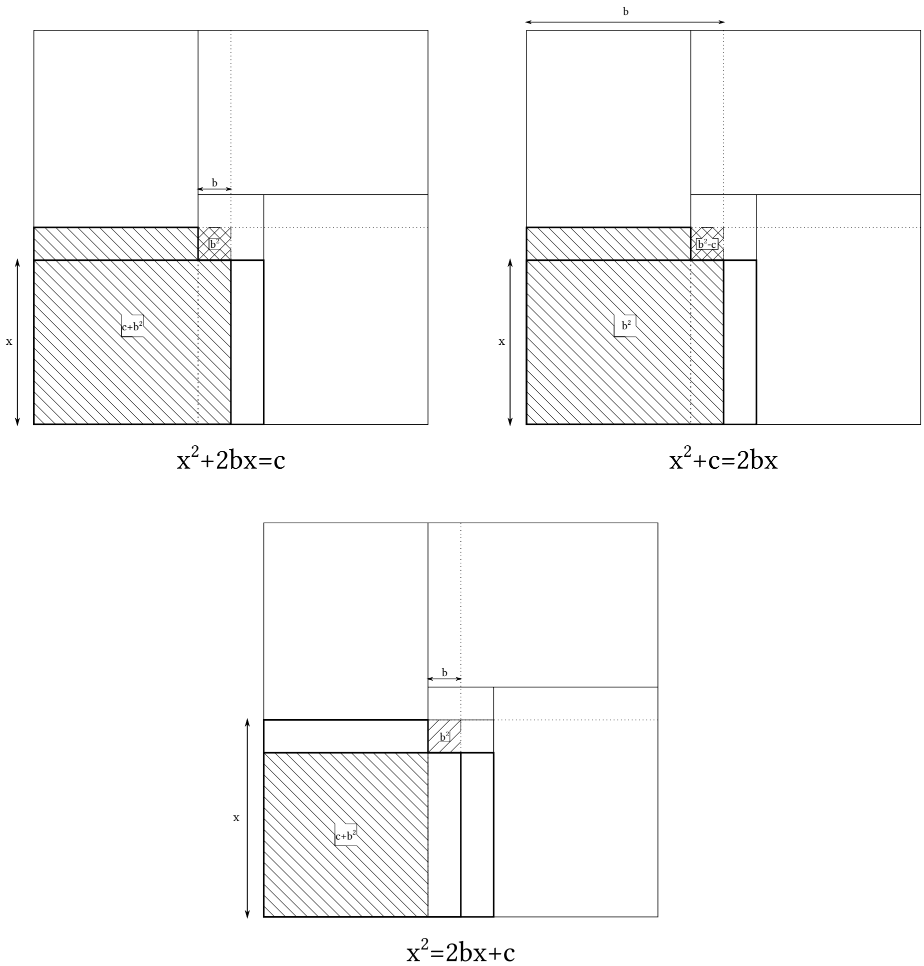
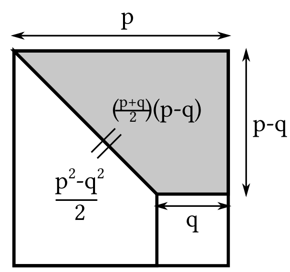


Figure 5 – La résolution de trois équations quadratiques.

Remarque
Les méthodes géométriques proposées ici sont une hypothèse, cohérente avec les textes retrouvés. Il est cependant possible que d'autres interprétations graphiques aient été utilisées. Les calculs effectués étant très souvent reliés à des trapèzes, il n'est pas impossible qu'une interprétation utilisant ceux-ci ait existé, comme présenté ci-contre pour la règle conjuguée.



Annexe 2

Voici la solution proposée sur la tablette IM67118 (paraphrase de l'auteur) :

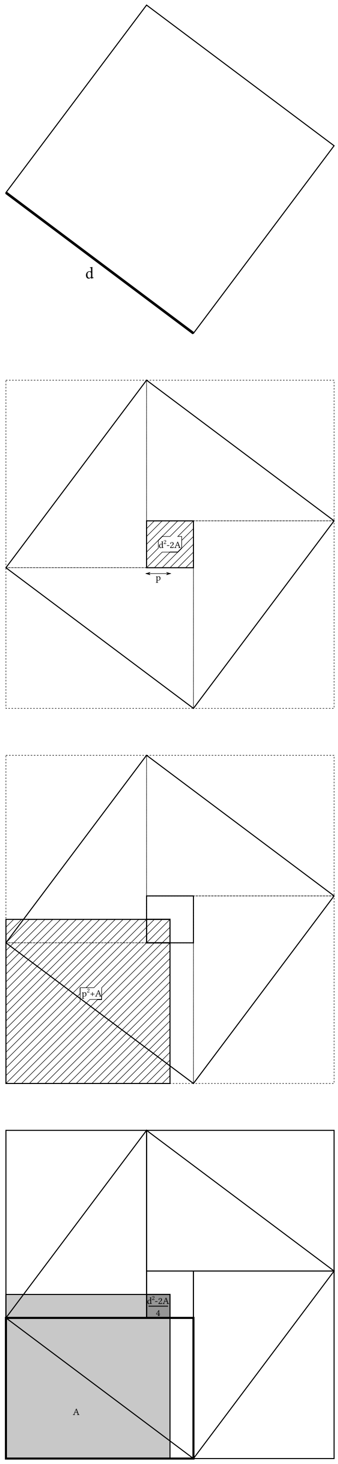
1. Si on te demande, à propos d'un rectangle avec une diagonale de 75 perches $[1, 15]$ [a]), et une aire de 2700 *sar* $[45, 0]$, quelles sont la largeur et la longueur ?
2. Prends ta diagonale de $75[1, 15]$, et trace son carré. Ceci donne $75^2 = 5625[1, 33, 45]$. Mémorise ce nombre, $5625[1, 33, 45]$.
3. Double ta surface de $2700[45, 0]$: ceci donne $5400[1, 30, 0]$, et retranche-le aux $5625[1, 33, 45]$: il reste $225[3, 45]$. Prend à présent le côté (racine) de ce nombre : $15[15]$.

   À ce stade, nous avons trouvé l'écart entre les deux côtés de notre rectangle, et nous pouvons reprendre la méthode fondamentale : trouver la moyenne des côtés.
4. Sa moitié : $7.5[7; 30]$. Note ce nombre. Prend son carré, $56.25[56; 15]$. Ajoute-lui la surface de départ, $2700[45, 0]$. Te voici avec un carré de $2756.25[45, 56; 15]$. Trouve son côté, qui vaut $52.5[52, 30]$.
5. Ajoutes-y les $7.5[7; 30]$, ou retranches-les. Tu obtiens $60[1, 0]$ de long, et $45[45]$ de large.

   Et voici la réponse ! nous cherchons un carré de 60 *perches de long et* 45 *de large. La tablette continue en vérifiant ses calculs.*
6. Si la longueur est de $60[1, 0]$, et la largeur de $45[45]$, quelle est la surface et la diagonale ?
7. Le carré de la longueur : $3600[1, 0, 0]$. Celui de la largeur : $2025[33, 45]$. Leur somme : $5625[1, 33, 45]$. Son côté : $75[1, 15]$, qui est bien la diagonale.

   On remarque ici une application du théorème de Pythagore, qui était donc connu dès cette époque... pour une preuve graphique de ce résultat (sans doute celle connue des Babyloniens...), voir l'exercice 9.
8. Prend à présent la longueur par la largeur, qui donne bien $2700[45, 0]$.

   On notera à quel point les valeurs numériques utilisées dans cet exercice sont adaptées aux notations sexagésimales !



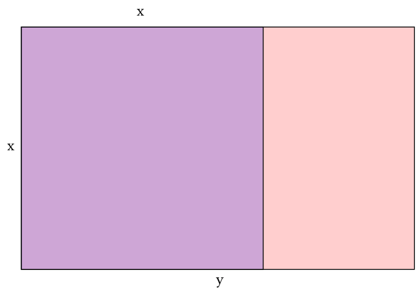
a. Les calculs sont ici présentés selon les unités de l'énoncé. Les valeurs originales (en notation sexagésimale) sont indiquées entre crochets. Pour plus d'informations, demandez à votre prof préféré !

2 Variations sur les suites de Fibonacci et le nombre d'Or

Exercice 2 (le Nombre d'Or, les nombres de Fibonacci, les feuilles et les escargots. (P))

1) **Préliminaires sur le nombre d'or et les suites de Fibonacci.**

a) Soit un rectangle de côtés x, y $(x < y)$, tel que, si l'on ôte un carré de côté x, le rectangle obtenu garde les même proportions. On définit le nombre d'or comme le rapport de ses côtés :



$$\Phi = \frac{y}{x}.$$

Donner une formule pour Φ.

b) On définit une suite de Fibonacci comme une suite réelle vérifiant la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

La suite de Fibonacci classique est celle donnée par les premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, mais il en existe d'autres, comme celle de Lucas, qui commence par $v_0 = 2$ et $v_1 = 1$.

i. Donner les 10 premiers termes de la suite « classique » de Fibonacci.

ii. Donner une formule pour le terme général des suites de Fibonacci (classiques ou non...).

iii. En déduire que, s'il existe, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge toujours vers le nombre d'or Φ (ou parfois $-\frac{1}{\Phi}$, dans des cas très particuliers).

iv. Bonus : montrer que l'ensemble des suites de Fibonacci forme un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites, et que celles dont le ratio $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers $-\frac{1}{\Phi}$ (plus la suite nulle), en forme un sous-sous espace vectoriel.

c) Développement de Φ en fractions continues : Définissons la suite (φ_n) par

$$\begin{cases} \varphi_1 = 1 \\ \varphi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\varphi_n} = f(\varphi_n) \end{cases}$$

i. Montrer que Φ est un point fixe de f.

ii. En étudiant la fonction f, montrer que la suite $(|\varphi_n - \Phi|)$ est décroissante (penser à l'IAF !).

iii. Par un raisonnement similaire, montrer que $|\varphi_n - \Phi| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

iv. En déduire la nature de la suite (φ_n), et que l'on peut écrire

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\dots}}}$$

v. Si $\varphi_n = \frac{p}{q}$, que vaut φ_{n+1} ? En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, avec (u_n) le $n$ième terme de la suite « classique » de Fibonacci. Retrouver que le quotient des termes consécutifs de la suite de Fibonacci converge vers le nombre d'or.

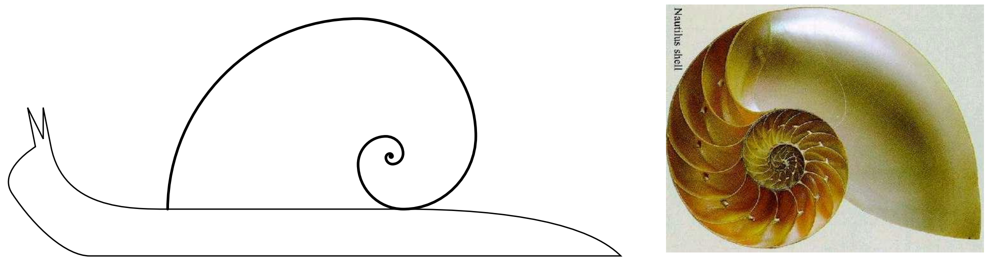
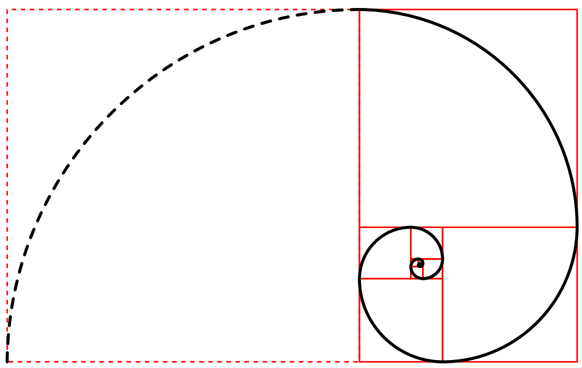


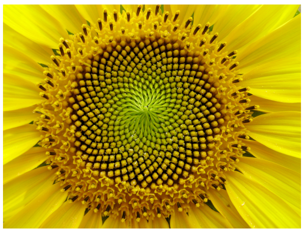
FIGURE 6 – des coquilles de mollusques

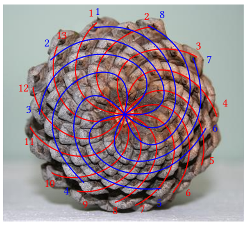
2) **Spirales de Fibonacci et escargots.**
On considère qu'un escargot construit sa coquille de la manière suivante :
— Il commence toujours par un compartiment à sa taille, inscrit dans un carré de taille 1 (bien évidemment, la coquille n'est pas cubique !).
— La coquille de l'escargot est toujours inscrite dans un rectangle (aux coins arrondis, bien sûr !). Lorsque l'escargot devient trop grand pour sa coquille, il crée un compartiment supplémentaire à la sortie de sa coquille. Comme il est malin, il utilise le bord extérieur de la coquille déjà existante comme premier côté, et construit donc le reste de la coquille dans un carré appuyé sur le rectangle intial (encore une fois, nous raisonnons sur des carrés, mais la coquille ajoutée est en forme d'arc de cercle !).



a) Quelle relation relie les côtés des carrés successifs ?
b) En déduire la proportion d'une coquille d'escargot après plusieurs étapes de croissance...
c) Pouvez-vous trouver une explication « simple » du fait que le rectangle obtenu, après un grand nombre d'itération, a pour proportion Φ, en utilisant la définition de Φ donnée au 1a ?
d) Ces réflexions sont évidemment un cas simplifié de la croissance des escargots. Tous les gastéropodes à coquille construisent leur coquille en ajoutant de la matière au bord de la coquille existante – que l'on peut modéliser de manière discrète avec des carrés successifs pour une première étude, comme on l'a fait précédemment. Mais, comme on peut le voir dans l'illustration de la figure 6, les compartiments ne sont pas forcément inscrits dans un carré, mais peuvent être plus petits, voire construits de façon continue.
Comment pourrait-t-on raffiner le modèle ?

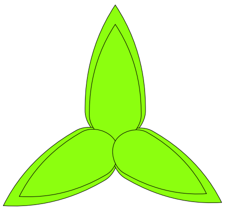
3) **Suites de Fibonacci et croissance des feuilles.** La grande majorité des plantes, que ce soient les pommes de pin, les artichauds, les broccolis, les cœurs de tournesol... présentent des spirales !

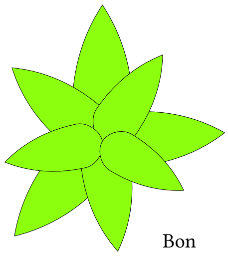






Comptons les spirales dans un sens, et dans l'autre... et on tombe très souvent sur deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci !

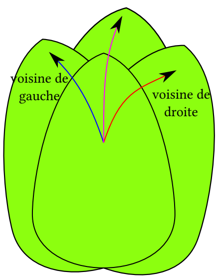
4) Considérons une plante créant des feuilles le long de sa tige au fur et à mesure de sa croissance. Il semble pertinent de s'assurer que les feuilles supérieures ne soient pas directement au-dessus des inférieures, bloquant ainsi le soleil. Les feuilles se placent donc à un angle, idéalement irrationel (c'est-à-dire qui n'est pas une fraction de 360 degrés), pour s'assurer que les feuilles ne retombent jamais pile sur une plus vieille.

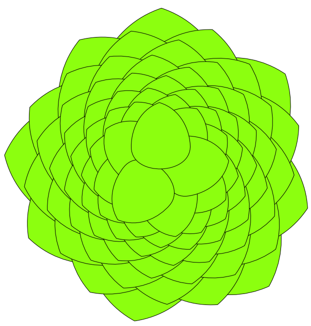
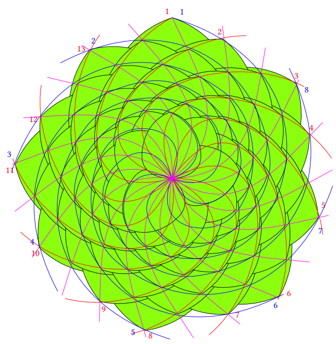

Mauvais


Bon

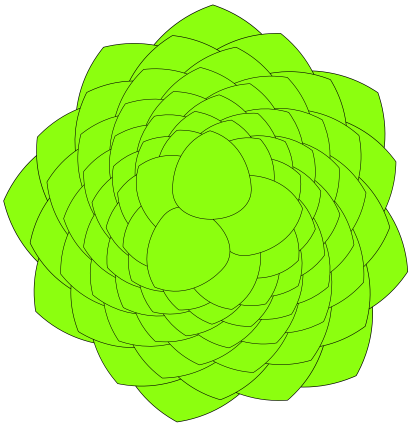
Naturellement, les feuilles vont former des spirales, chaque feuille menant à la plus proche. Il se forme d'ailleurs deux spirales, l'une avec les feuilles les plus proches à droite, l'autre avec les feuilles les plus proches à gauche.

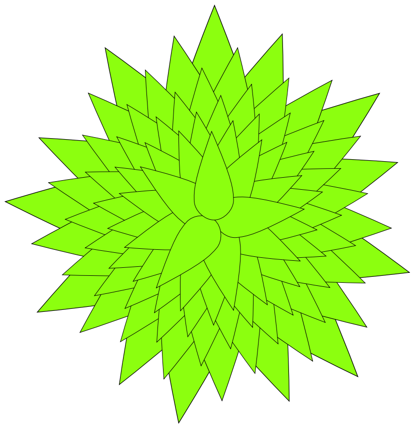
Mais une troisième feuille est aussi présente, entre les deux voisines ! En continuant sur cette feuille, une troisième spirale apparaît... S'il y a n spirales vers la droite, et m vers la gauche, combien y aura-t-il de spirales « centrales » ?



5) Si les feuilles sont plus fines, les chevauchements sont plus difficiles, et les spirales plus « droites », puisqu'on prend ainsi plus facilement les feuilles « centrales »... voyez-vous d'où proviennent les nombres de Fibonacci dans les spirales ?



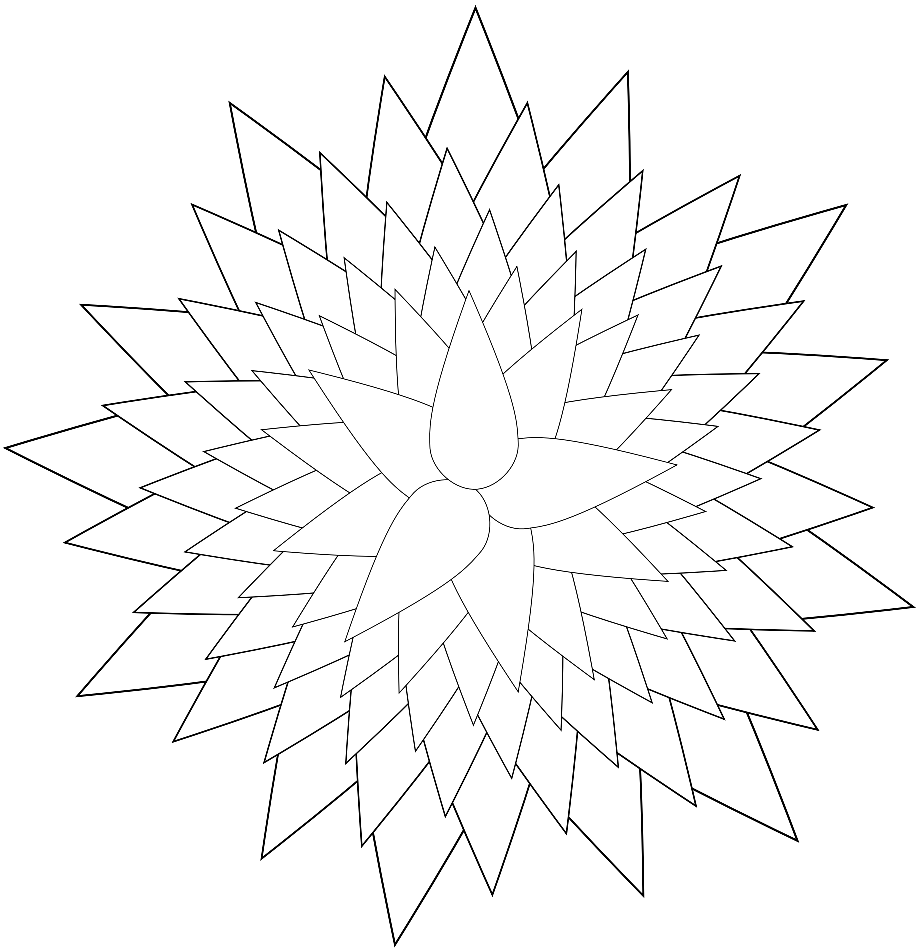


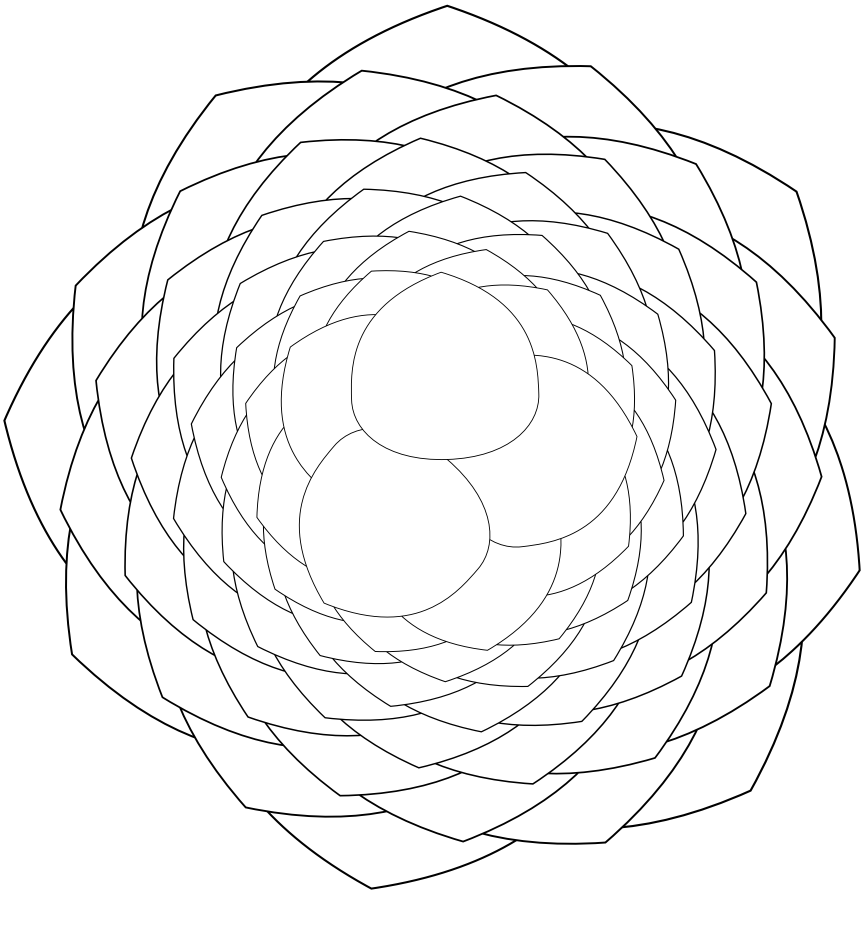
Remarque
Essayez de compter les spirales sur les plantes que vous croisez ! Ce ne sont pas toujours des nombres de Fibonacci, car il est possible que des « erreurs » au début de la croissance de la plante lui donnent des premiers termes différents[‡]*... mais la progression est toujours la même !*

Vous pouvez aussi essayer de mesurer l'angle entre deux feuilles consécutives sur des plantes à tiges... celles qui forment des spirales ont très souvent un angle de $\frac{360°}{\Phi} \approx 222.5°$ *(ou plutôt son complémentaire inférieur à* $180°$, $360° - \frac{360°}{\Phi} \approx 137.5°$*) ! Hasard ?...*

Évidemment, la plante n'a pas un rapporteur pour mesurer toujours ce même angle... des recherches en biologie semblent indiquer que cet angle particulier découle naturellement du fait que les feuilles poussent vers l'endroit où le plus de nutriments sont disponibles... c'est à dire là où les autres feuilles ne sont pas !

‡. En réalité, il s'agit de variations dans l'angle choisi entre les feuilles au départ.



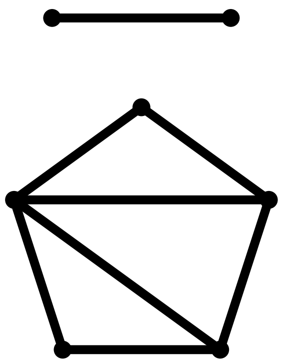


3 Un peu de théorie des graphes

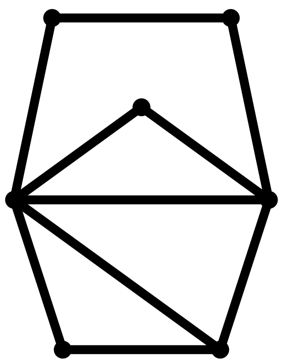
Exercice 3 (Euler, les graphes, les polyèdres, les pavages)

1) **L'équation d'Euler**

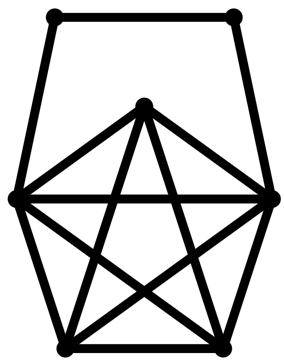
On appelle un *graphe* une collection de points (nœuds, ou vertex en anglais) reliés par des lignes (arêtes, ou edges en anglais). On ne s'intéressera ici qu'au graphes *planaires*, c'est-à-dire que l'on peut dessiner dans un plan sans que les arêtes se croisent, et connexes, c'est-à dire que l'on peut passer de n'importe quel nœud à n'importe quel autre en suivant les arêtes.



Un graphe planaire non connexe



Un graphe à la fois planaire et connexe



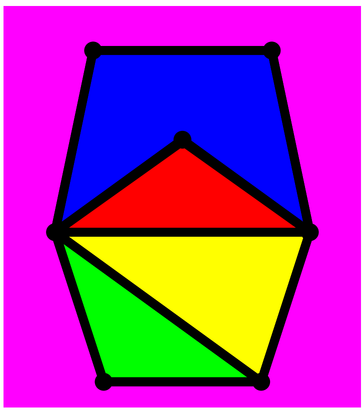
Un graphe connexe mais pas planaire

On appelle *cycle* un (sous-)graphe (d'au moins trois nœuds) dont les arêtes relient les arêtes les unes après les autres, en revenant au départ.

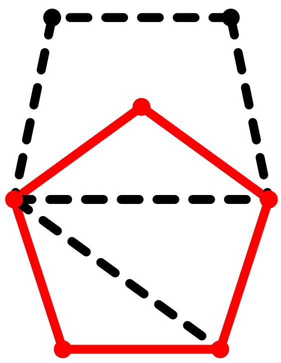
Un arbre (tree en anglais) est un graphe connexe qui ne contient pas de cycles.

On appelle "spanning tree" tout sous-arbre d'un graphe contenant tous ses nœuds. On peut le voir comme une façon de garder juste assez d'arêtes pour pouvoir rejoindre tous les nœuds, sans plus.

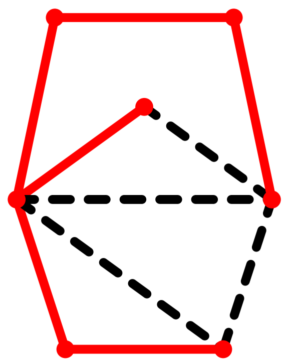
Un graphe planaire découpe le plan en plusieurs régions (faces), la zone extérieure étant comptée aussi :



Faces d'un graphe planaire



Un cycle dans le graphe



Un spanning tree du graphe

Le but ici est de démontrer la formule caractéristique d'Euler, disant que, si V est le nombre de nœuds d'un graphe planaire connexe, E son nombre d'arêtes, et F son nombre de zones ("faces", on verra pourquoi plus tard), on a toujours

$$V - E + F = 2.$$

Dans tout ce qui suit, tous les graphes sont planaires et connexes.

a) **Quelques résultats préliminaires**

i. Montrer qu'un arbre a toujours une arête de moins que de nœuds (par récurrence, par exemple).

ii. En déduire que la formule est vraie pour les arbres, au moins.

iii. Montrer qu'un cycle a toujours autant d'arête que de nœuds (par récurrence, par exemple).

iv. En déduire que la formule est vraie pour les cycles aussi.

v. Montrer qu'on peut toujours trouver un spanning tree dans un graphe (par récurrence sur le nombre d'arête, par exemple).

vi. Tout graphe va avec son “graphe dual”, dont les nœuds sont les faces, deux faces étant connectée si elles ont une arête commune. Justifier que les arêtes du graphe dual sont les arêtes du graphe d'origine, et ses faces, les nœuds du graphe d'origine.

Remarque : pour tracer le graphe dual, on place souvent les nouveaux nœuds au centre des faces, celui correspondant à la face extérieure se trouvant “à l'infini” dans toutes les directions.

b) **Une première méthode, par récurrence sur le nombre d'arêtes**

i. Vérifier que pour le graphe le plus simple qui soit, avec un nœud et pas d'arêtes, la formule est bien vraie.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que tout graphe à n arêtes, planaire, vérifie la formule. Prenons un graphe à $n+1$ arêtes. On a deux cas de figure :

— Montrer que si c'est un arbre, la formule est vérifiée,

— Montrer que si ce n'est pas un arbre, on peut ôter une arête bien choisie et garder un graphe connexe. Compter le nombre de faces de ce nouveau graphe, et en dédure que la formule voulue.

Conclure.

c) **Une deuxième méthode, utilisant cette notion de spanning tree**

i. Montrer que si l'on a une collection d'arête du graphe d'origine formant un spanning tree, les arêtes restantes forment un spanning tree du graphe dual.

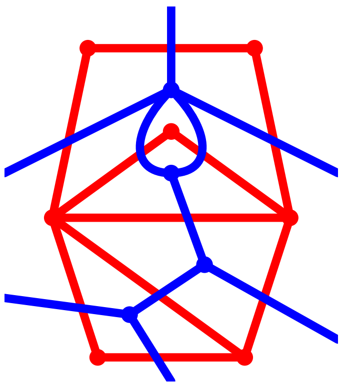


Figure 7 – Un graphe et son dual

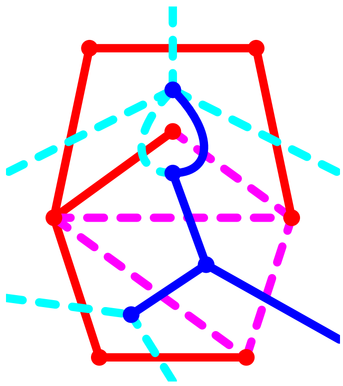


Figure 8 – Une paire de spanning tree

ii. En applicant la formule aux deux spanning trees obtenue (elle est vrai pour les arbres, souvenez-vous), en déduire la formule d'Euler pour n'importe quel graphe.

2) Historiquement, cette formule a été formulée en terme de polyèdres (pour lesquels on parle bien de “vertex”, “edges” et “faces”). Pourquoi un polyèdre peut-il être vu comme un graphe connexe planaire ? Vérifier la formule pour les polyèdres réguliers !

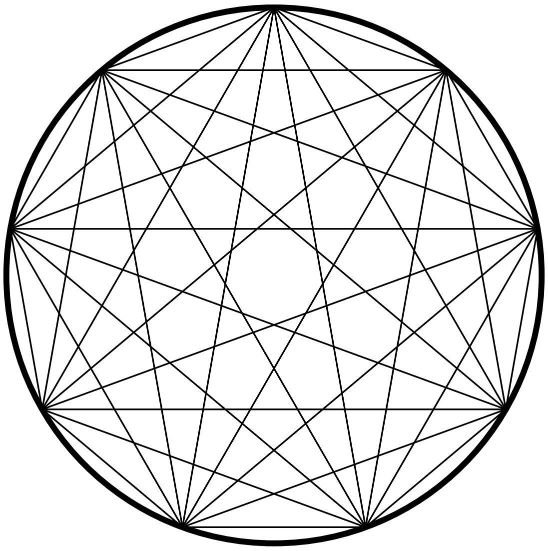


FIGURE 9 – Un joli pavage...

3) **Une application aux pavages**

Considérons une pièce circulaire, marquée de n points le long du mur. Le pavage de cette pièce est réalisé en reliant tous les points entre eux, délimitant les différents carreaux.

Combien de carreaux y-a-t-il ? On va supposer pour simplifier qu'il n'y a jamais plus de deux lignes qui se croisent en un même point (ce qui donne le nombre maximal de carreaux).

a) Remarquer qu'il s'agit de compter le nombre de faces d'un graphe planaire [§], à condition d'ajouter des nœuds à chaque intersection des lignes.

b) Combien y-a-t-il de lignes ?

c) En supposant donc qu'il n'y a pas de point d'intersection à plus de deux lignes, combien y-a-t-il de nœuds "internes" (pas sur le cercle) à ce graphe ?

d) Chaque nœud interne divise les deux lignes qui le forment en 4 "sous-lignes", et donc en ajoute 2. Combien y-a-t-il donc d'arêtes à notre graphe ?

e) Combien notre graphe a-t-il de face ? En déduire qu'il y a $1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$ carreaux à notre pavage.

§. moins la face extérieure, plus les n faces "circulaires".

4 Torture mathématique

Exercice 4 (prisonniers ! ★)
Un mathématicien fou[¶] vous a capturé, vous et vos $n-1$ amis. Il vous propose de vous libérer à condition que vous réussissiez l'expérience suivante :

— Le nom de chacun d'entre vous est inscrit sur une feuille de papier, et chaque feuille est placée dans un casier, dans une salle fermée.
— Chacun d'entre vous, l'un après l'autre, se rend dans la salle des casiers, et a le droit d'ouvrir la moitié des casiers uniquement (on considère que vous êtes un nombre pair).
— À partir du moment où vous rentrez dans la salle, vous ne pouvez plus communiquer avec aucun de vos camarades.
— Vous êtes libérés si vous êtes *tous* capables de dire dans quel casier votre nom se trouve. Si ne serait-ce que l'un d'entre vous n'est pas capable de répondre, ou se trompe, personne n'est libéré.

1) Si chacun d'entre vous ouvre $\frac{n}{2}$ tiroirs au hasard, quelle est la probabilité que vous soyez libérés (on néglige la chance de « deviner » le bon casier) ?

2) Questions « en vrac » (toutes ne sont pas nécessaires à la solutions, mais toutes peuvent aider) :

   a) Retrouver que, pour tout $x \in [-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

   (On pourra contrôler, puis intégrer, $\displaystyle\frac{1}{1-t} - \sum t^k$*.)*

   b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

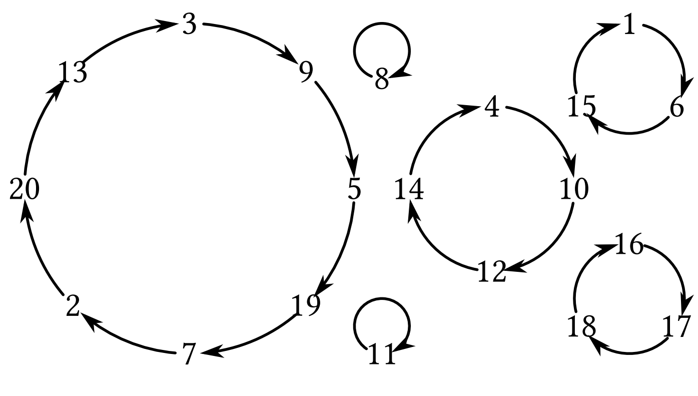
   (On pourra découper la somme en termes pairs et impairs.)

   c) Montrer que, si on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, il existe une constante γ telle que

$$H_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma.$$

   (On pourra montrer que la suite $H_n - \ln(n)$ est décroissante.)

   d) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation, on appelle k-cycle de σ une suite $(x_1, \dots, x_k)$ d'entiers tels que $x_2 = \sigma(x_1), x_3 = \sigma(x_2), \dots, x_k = \sigma(x_{k-1})$ et $x_1 = \sigma(x_k)$. Par exemple :



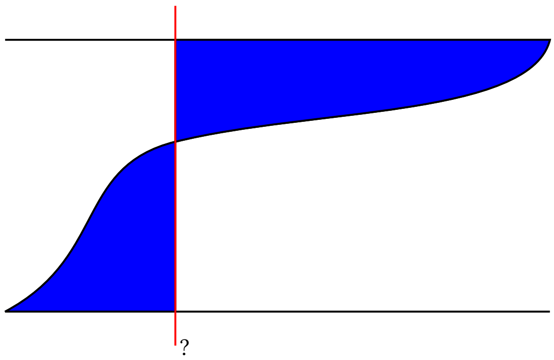
   est une permutation de $\mathfrak{S}_{20}$, qui a deux 1-cycles, (8) et (11), deux 3-cycles $(1,6,15)$ et $(16,17,18)$, un 4-cycle $(4,10,12,14)$, et un 8-cycle, $(3,9,5,19,7,2,20,13)$.
   Montrer qu'il existe $\frac{n!}{k}$ permutations de $\mathfrak{S}_n$ possédant un k-cycle, pour $k > \frac{n}{2}$.

En utilisant les questions précédentes, saurez-vous trouver une méthode pour avoir plus de 30% de chance d'être libérés (oui, vous avez bien lu, 30%) ?

¶. C'est pas moi, monsieur le juge ! juré !

5 Des petits exercices divers en vrac

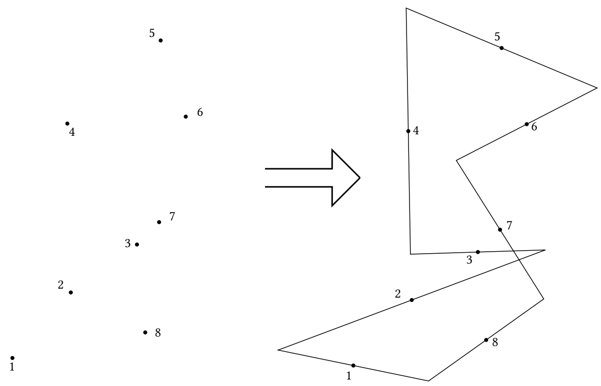
Exercice 5 (une question d'aire...)
Une courbe relie deux droites parallèles, en allant toujours vers le haut et la droite. Une ligne verticale coupe cette figure, et définit deux zones, l'une à gauche de la droite, sous la courbe, et l'autre à droite, au-dessus. Comment placer la droite verticale, de façon à minimiser l'aire totale de ces deux zones ?



Exercice 6 (des tables de bar toujours bancales...)
Souvent, au bar, vous pestez que votre table est bancale. Cependant, ce n'est pas la table qui est fautive : ses quatre pieds sont bien sur un même plan, c'est ce maudit sol pavé qui est plein de creux et de bosses...

Montrez que, uniquement en tournant la table, sans la déplacer, il est toujours possible de trouver une position stable, avant même d'avoir fait un quart de tour !

Exercice 7 (un curieux polygone)
On considère le problème suivant : étant donné n points du plan $A_1 = (a_1, b_1), \ldots, A_n = (a_n, b_n)$, on cherche à construire un polygone à n côtés, dont le milieu de chaque côté repose exactement sur chacun des points donnés, dans cet ordre.

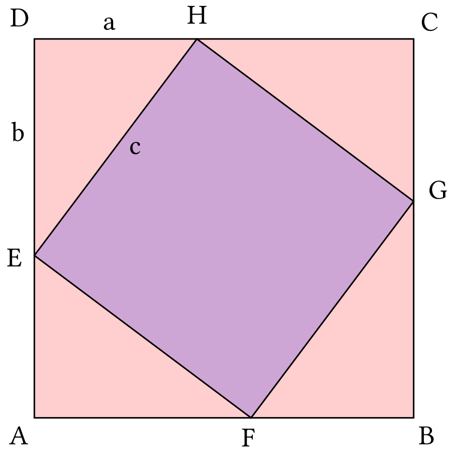


1) Écrire le système d'équation vérifiées par les coordonnées (x_i, y_i) des n sommets du polygone,
2) Résoudre ce système et discuter des solutions au problème donné, et de leur nombre.

Exercice 8 (des antipodes... très proches !)
Montrer que, sur n'importe quel méridien, équateur, ou tout autre grand cercle du globe, il existe toujours deux points antipodaux où il fait la même température.

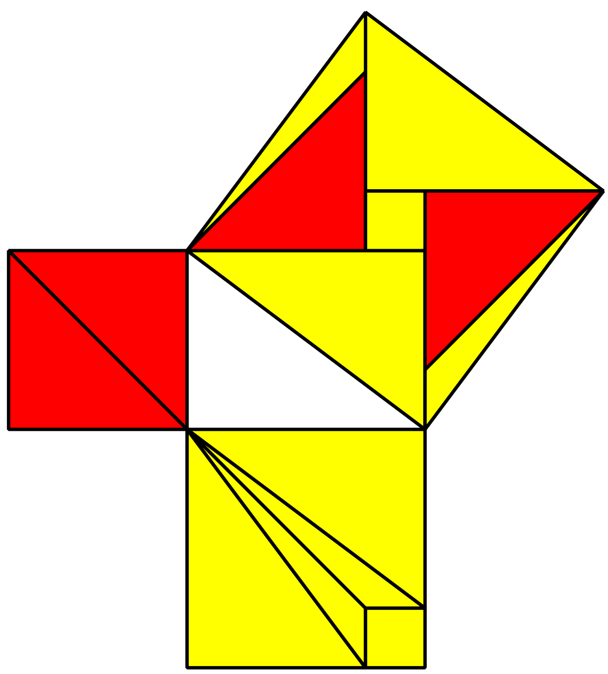
Exercice 9 (une preuve historique du théorème de Pythagore (P))
En calculant de deux façon différente l'aire du grand carré $ABCD$, montrer le théorème de Pythagore : $c^2 = a^2 + b^2$.

Vous n'avez, pour seul outil, que les formules pour l'aire d'un carré et d'un triangle rectangle.



Variante (méthode historique) : sauriez-vous, géométriquement, réarranger les 4 triangles ci-dessus pour faire apparaître l'égalité cherchée, ou (c'est la même chose), l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?

Un autre tangram :



Exercice 10 (Tours de Hanoi Ⓟ)
Les Tours de Hanoi‖ sont un jeu de réflexion. Trois poteaux sont placés sur un plateau, et n disques de diamètres décroissants sont enfilés sur un des poteaux. Les règles sont les suivantes :
— il n'est possible de ne bouger qu'un disque à la fois, et uniquement un qui est en sommet de pile,
— il est interdit de poser un disque de diamètre supérieur sur un disque de diamètre inférieur (et ailleurs que sur un des trois poteaux).
Le but est de déplacer la pile entière sur un autre poteau.

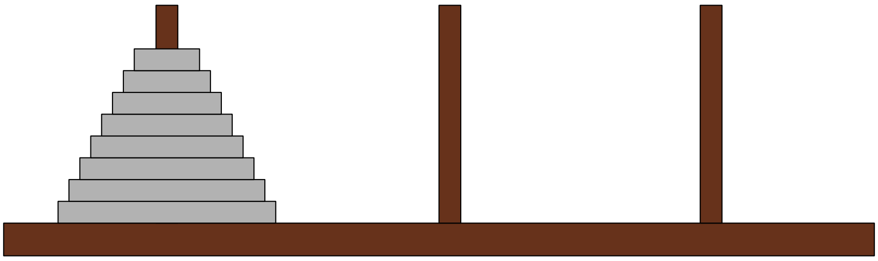


FIGURE 10 – les Tours de Hanoi

Montrer que la méthode la plus rapide pour transférer tous les disques demande $2^n - 1$ étapes.
Bonus : en quoi cette méthode peut se comparer à compter jusqu'à $2^n - 1$ en binaire ?
Bonus bis : Comment change ce problème si on ne s'autorise qu'à bouger les disques d'un piquet adjacent à l'autre ? Et quel est le rapport avec une numérotation en ternaire ?

Exercice 11 (La tour de Lire Ⓟ)
1) Une question préliminaire : des questions de barycentres.
On cherche ici à trouver le point d'équilibre d'une collection d'objets, c'est-à-dire le point sur lequel on peut poser en équilibre ces objets sans qu'ils tombent. Ce point est appelé centre de gravité des objets.
   a) Où se trouve le centre de gravité d'une brique homogène ?
   b) Remarquer que le centre de gravité de deux objets de même masse se trouve au milieu de leurs centres de gravités respectifs.
   Plus généralement, on se convaincra que le centre de gravité de n objets de même poids se trouve à la moyenne des centres de ces objets :
$$x_g = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$
   c) Si l'on considère n objets de poids différents, on peut voir chacun des objets comme une somme de tout petits objets de même masse**. En déduire la formule suivante : si l'on note x_i la position du centre de gravité de l'objet i, et m_i sa masse (vue comme le nombre de petits objets), on a la position du centre de gravité des n objets ensemble à la position
$$x_g = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$
2) On cherche à contruire un pont s'élançant dans le vide à partir du bord d'une falaise. La seule règle : on ne peut utiliser que des briques de 30cm de long, sans aucun mortier. Jusqu'où peut-on aller ?

‖. La légende raconte que Brahma a déposé 64 tels disques à Bénarès, en Inde, et ordonné aux moines de transférer la pile sur le poteau à l'intérieur du temple. Lorsque les moines auront achevé leur tâche, le monde disparaîtra... Heureusement, même si les moines déplacent un disque par seconde, il leur faudra près de 585 milliards d'années !
**. Quitte à prendre ce poids assez petit : par exemple, deux objets de respectivement 153g et 1547g peuvent être vus comme 153 et 1547 objets d'un gramme respectivement.

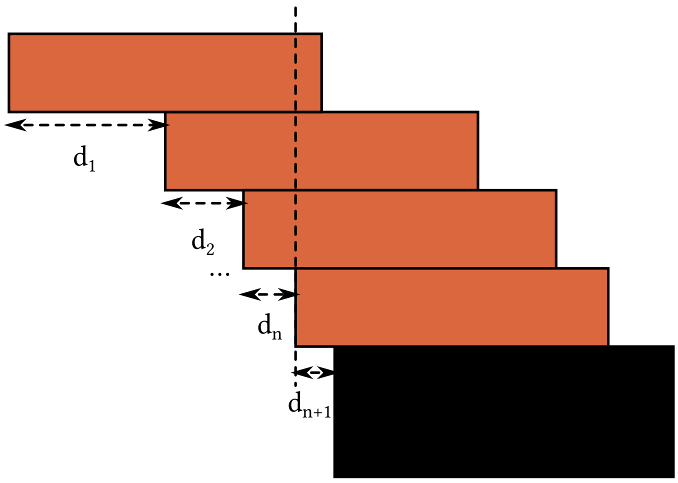


Figure 11 – Un pont plus ou moins stable...

On note d_n le débord maximal que peut avoir la n^e brique posée, l'unitée de base étant la longueur de la demi-brique.

a) Justifier que $d_1 = 1$.

b) On veut poser deux briques à présent. On pose bien sûr la brique supérieure le plus loin possible, elle dépasse donc de d_1 la brique du dessous. Où ce situe le centre de gravité des deux briques ainsi constituées ? En déduire que $d_2 = \frac{1}{2}\cdot$

c) Même question pour trois briques : montrer que $d_3 = \frac{1}{3}\cdot$

d) On suppose les n briques supérieures posées, la brique i dépassant de d_i de celle du dessous, de sorte que le centre de gravité des n briques est juste au-dessus du bord de la $n+1^e$ brique. En comptant à présent la $n+1^e$ brique, de quelle longueur se décale le centre de gravité ? En déduire que $d_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, et que donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \frac{1}{n}\cdot$

e) À quelle distance au-delà du bord de la falaise se trouve le bord de la brique du dessus si on a construit un pont de n briques ? En déduire qu'avec seulement 4 briques, la brique supérieure est entièrement au-dessus du gouffre.

f) Jusqu'où peut-on aller avec un tel pont au maximum ?

g) Si on veut un pont de n mètres, quelle doit être sa hauteur ? Est-ce pratique ?

h) Et de toute façon, quel poids le pont peut-il supporter, au maximum ?