

1 Étude d'applications

1.1 BA-ba

Exercice 1

Répondre par vrai ou faux, et justifier.

- 1) 0 est un minimum de la fonction $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$,
- 2) 1 est un minimum de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$,
- 3) 0 est un extremum de la fonction $x \mapsto x^3 + x^2$,
- 4) si f est impaire, alors $f(0) = 0$,
- 5) si f est paire, alors $x \mapsto xf(x)$ est impaire,
- 6) la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle,
- 7) la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est bornée sur $[1, +\infty[$,
- 8) si, pour tout réel x , $f(x+1) \geq f(x)$, alors f est croissante.

Exercice 2

Pour chaque paire f, g déterminer $g \circ f$, $f \circ g$ (en essayant de simplifier l'expression!), et leurs domaines de définition.

- | | |
|---|--|
| 1) $f : x \mapsto 2 \ln(x)$, $g : x \mapsto e^x + 1$, | 5) $f : x \mapsto \frac{x+1}{x}$, $g : x \mapsto \frac{x+2}{x-1}$, |
| 2) $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$, | 6) $f : x \mapsto \frac{x-2}{x+1}$, $g : x \mapsto \frac{x+2}{1-x}$, |
| 3) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$, | 7) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g : x \mapsto \ln(1+x)$, |
| 4) $f : x \mapsto \ln(x)$, $g : x \mapsto \ln(x)$, | 8) $f : x \mapsto \ln(x)$, $g : x \mapsto x^2 + 2x + 1$. |

Exercice 3

Donner le domaine de définition et étudier la parité des fonctions suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1) $x \mapsto \frac{1+x^2}{1-x^2}$, | 6) $x \mapsto \frac{1+e^{2x}}{e^x}$, |
| 2) $x \mapsto xe^{-x^2}$, | 7) $x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x-1}$, |
| 3) $x \mapsto x + \frac{1}{x}$, | 8) $x \mapsto 2^{ x }$, |
| 4) $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, | 9) $x \mapsto 2^x - 2^{-x} $, |
| 5) $x \mapsto x \ln(1+x^2)$, | 10) $x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} + x)^*$, |

Exercice 4

Pour chacune des fonctions suivantes, étudier son domaine de définition, son signe, sa monotonie, sa parité s'il y a lieu, et tracer la forme générale de son graphe.

- | | |
|---|--|
| 1) $x \mapsto \sqrt{1+x}$, | 8) $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, |
| 2) $x \mapsto \ln(1+x) - 1$, | 9) $x \mapsto \ln(1-x^2) - \ln(1-x)$, |
| 3) $x \mapsto e^{-x^2}$, | 10) $x \mapsto e^{(1+x)(1-x)}$, |
| 4) $x \mapsto \ln(1+x^2)$, | 11) $x \mapsto \begin{cases} \ln(-\frac{1}{x}) & \text{si } x < 0 \\ \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$, |
| 5) $x \mapsto \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$, | 12) $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ e^{1-x} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ e^{1+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, |
| 6) $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, | 13) $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ (notée D), |
| 7) $x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ -e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, | 14) $x \mapsto D(x)(D(x) - 1)$. |

*. On pourra commencer par calculer $(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)$

1.2 Pour aller plus loin...

Exercice 5

On pose, pour x et y deux réels, la quantité $f(x, y) = xy^2$.

- 1) Étudier, pour $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$. Quel est son ensemble de définition, sa parité éventuelle, sa monotonie ?
- 2) Étudier, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$. Quel est son ensemble de définition, sa parité éventuelle, sa monotonie ?
- 3) (*) Faire de même pour la quantité $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Saurez-vous reconnaître la forme du graphe de cette fonction à deux variables ?

Exercice 6

On considère une fonction quelconque f définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est une fonction paire.
- 2) Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ est une fonction impaire.
- 3) En déduire que toute fonction peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- 4) (*bonus* *) Montrer que cette décomposition est en réalité unique.

2 Injections, surjections, bijections

2.1 Exemples divers

Exercice 7

Montrer que les ensembles suivants sont en bijection, et exhiber une telle bijection :

- 1) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$,
- 2) $\mathbb{N}$ et l'ensemble des nombres impairs,
- 3) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Exercice 8

Déterminer si les applications suivantes sont injectives ou non :

- 1)
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x - 1| \end{array} ,$$
- 2)
$$\begin{array}{ccc} f_{|[1, +\infty[} : [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x - 1| \end{array} ,$$
- 3)
$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - [x] \end{array} ,$$
- 4)
$$\begin{array}{ccc} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 + 2x + 1 \end{array} .$$

Exercice 9

Déterminer si les applications suivantes sont surjectives ou non :

- 1)
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x - 1| \end{array} ,$$
- 2)
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & |x - 1| \end{array} ,$$
- 3)
$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, 1[\\ x & \longmapsto & x - [x] \end{array} ,$$
- 4)
$$\begin{array}{ccc} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2x \end{array} .$$

Exercice 10

Montrer que

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \ln(e^{2x} + 2e^x + 1) \end{array}$$

est une bijection, et en expliciter la réciproque.

On pourra écrire cette application comme la composée de trois applications simples.

Exercice 11

- 1) a) Soit $y \in \mathbb{R}$. Discuter et résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
- b) En déduire que $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser, et en expliciter la réciproque.
- c) Étudier la monotonie de f , et retrouver le fait qu'elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un certain intervalle. Cette méthode donne-t-elle l'intervalle image?
- 2) a) Soit $y \in \mathbb{R}$. Discuter et résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- b) En déduire que $g : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle à préciser, et en expliciter la réciproque.

2.2 Pour aller plus loin...*Exercice 12 (*)*

Soient E, F, G trois ensembles, et $f : E \rightarrow F$.

- 1) Montrer que s'il existe $g : F \rightarrow G$ telle que $g \circ f$ soit injective, alors f est injective.
- 2) Montrer que s'il existe $g : G \rightarrow E$ telle que $f \circ g$ soit surjective, alors f est surjective.

En déduire le théorème du cours :

Théorème 2.1

Une application $f : E \rightarrow F$ est une bijection si, et seulement si, il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que

$$f \circ g = \text{Id}_F \text{ et } g \circ f = \text{Id}_E.$$

3 Correct ou pas ?*Exercice 13*

Ces raisonnements comportent tous des erreurs ou maladresses de rédaction. Les identifier, et corriger ceux qui peuvent l'être.

- 1) Considérons $f : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$. Calculons $f \circ f$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} \\ &= \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-(x-1)}{x-1}} \\ &= \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}} \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

La fonction $f \circ f$ est donc définie sur $\mathbb{R}$, égale à l'identité : f définit donc une bijection sur $\mathbb{R}$.

- 2) Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}$. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$. Étudions sa parité : si $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) - f(x) &= \frac{e^{-x}}{1+(-x)^2} - \frac{e^x}{1+x^2} \\ &= \frac{e^{-x} - e^x}{1+x^2} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

On a donc $f(x) \neq f(-x)$, la fonction f n'est donc pas paire, et est impaire.