INTRODUCTION À L'ANALYSE p-ADIQUE
EXERCICE 11

Exercice 1. Montrer que si f et g commutent et sont analytiques par flots, alors $f \circ g$ est aussi analytique par flot et $X_{f+g} = X_f + X_g$.

Exercice 2. On suppose $d = 1$ et $G \subset \mathrm{Diff}^{\mathrm{an}}(\mathbf{Z}_p)$ analytique par flot. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) G est abélien.

(2) G est nilpotent.

(3) Le centre de G n'est pas trivial.

(4) Il existe un ouvert $U \subset \mathbf{Z}_p^d$ telle que $\mathfrak{g}_{|U}$ est abélienne.

(5) $\mathfrak{g}$ est abélienne.

(Utiliser le théorème de redressement).

Exercice 3. Montrer que si G est un groupe analytique par flot, alors pour tout $G' \subset G$ d'indice fini on a

$$Z(G') = Z(G) \cap G'. \tag{1}$$

(On rappelle que G et G' ont même algèbre de Lie).

Exercice 4. Soit G un groupe nilpotent et soit Z son centre, montrer que

$$\mathrm{nilp}(G) = \mathrm{nilp}(G/Z) + 1. \tag{2}$$

Même question pour les algèbres de Lie.

Exercice 5. Montrer que pour tout ouvert $U \subset \mathbf{Z}_p^d$, l'application de restriction $\Theta(\mathbf{Z}_p^d) \to \Theta(\mathbf{Z}_p^d)_{|U}$ est injective.